数理解析研究所講究録
914巻 1995年 159-163

対流ロールの安定性と Swift-Hohenberg 方程式

広島商船高等専門学校　桑村雅隆 (KUWAMURA, Masataka)

Rayleigh-Benard 問題において、図1のような対流ロールが形成される過程を記述するモデル方程式として、Swift-Hohenberg [2] による次のものがある。

(1)
$$u_t = (\alpha - (1+\partial_x^2+\partial_y^2)^2)u - u^3$$

ここで、u は各ロールの中心線を通る平面上の各点 (x, y) における流速場の鉛直方向成分を表す。α は (reduced) Rayleigh 数と呼ばれる（温度差に比例する）parameter である。(1) がこのような現象を記述するモデルであることは、次のような heuristic な議論によって了解されるであろう。

$u \equiv 0$（静止状態）のまわりの (1) の線形安定性を調べる。Fourier mode $\exp(i(kx+ly))$ に対する固有値は

$$\mu_{k,l} = \alpha - (1-(k^2+l^2))^2$$

である。これより、もしも $\alpha < 0$ ならば、$\mu_{k,l} < 0$ $(\forall k, l)$ となって、$u \equiv 0$ は安定（熱伝導状態)。もしも $\alpha > 0$ ならば、最大固有値$\mu_{k,l} > 0$ $(k^2+l^2=1)$ となって、$u \equiv 0$ は不安定。特に、Fourier mode $\exp(\pm ix)$ $(k=\pm1, l=0)$ 方向へ不安定性が成長すれば、x 方向に周期的で y 方向に一様な形の定常解が出現する可能性がある（対流ロールの形成)。実際、Collet-Eckmann [1] は、(1) がロール解を持つことを証明した。

Existence of roll solutions [1]: Suppose that ω satisfies

$$2/5 < \omega^2 < 2.$$

Then, there exists a positive constant ε_0 independent of ω such that for $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, the equation

$$(\alpha - (1+\partial_x^2+\partial_y^2)^2)u - u^3 = 0, \quad -\infty < x, y < \infty$$

has a unique solution of the form

$$\alpha = 3\varepsilon^2 + (1-\omega^2)^2,$$

and

(2)
$$u_0(x) = \overline{u}(\omega x), \quad \overline{u}(z) = \varepsilon 2\cos(z) + O(\varepsilon^3).$$

ロール解 (2) の安定性を調べることが、我々の目的である。非常に大きな系において、対流ロールを観察すると次のことがわかる。

(a) ロールは局所的には規則正しく並んでいるが、大域的に見ると空間的な周期 (phase) が弱く緩やかに変調している。
(b) ロール解に対して摂動を加えた場合、ロール解の amplitude 成分は phase 成分に比べて速く減衰する。

上の (a),(b) を考慮して、ロール解 (2) の安定性を次のような形式的な摂動計算によって調べる。(2) のまわりの (1) の解 $u = u(x, y, t)$ は

$$u = \overline{u}(z) + \rho(z, X, Y, T), \tag{3}$$

where

$$z = \omega x + \phi(X, Y, T), \quad X = \nu x, \quad Y = \nu y, \quad T = \nu^2 t,$$

$$\rho = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n(z, X, Y, T)\nu^n, \qquad \phi_T = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n(X, Y, T)\nu^n$$

で与えられると仮定する。ここで、ν は摂動展開 parameter を表す小さな正数である。(3) を (1) に代入して ν について整理することによって次を得る。

$$\begin{aligned} &\phi_T = D_{//}\phi_{XX} + D_{\perp}\phi_{YY} + O(\nu), \\ &D_{//} = 4 - 8W^2 + O(\varepsilon), \quad D_{\perp} = 2\sqrt{3}\varepsilon W, \end{aligned} \tag{4}$$

where

$$W = \frac{\omega^2 - 1}{\sqrt{3}\varepsilon}.$$

これより、$D_{//} > 0$ かつ $D_{\perp} > 0$ すなわち、$0 < W < 1/\sqrt{2}$のときロール解は安定である。一方 $D_{//} < 0$ または $D_{\perp} < 0$ のとき、すなわち $|W| > 1/\sqrt{2}$ または $W < 0$ のときロール解は不安定である。$D_{//} < 0$ のときを Eckhauss 不安定、$D_{\perp} < 0$ のときを zigzag 不安定という。(図２)

このように、空間的な周期構造を持った定常解の安定性を phase 成分の dynamics を通して調べる方法を phase dynamics 法という [3],[4] 。

我々は、ロール解 (2) の安定性を spectral analysis によって調べると同時に (4) の数学的な意味を明らかにしたい。また、(4) ではわからなかったロールの軸方向の長さと zigzag 不安定性との関係も明らかにしたい。

$$\Omega = (-L/2, L/2) \times (-M/2, M/2), \quad 0 < L < \infty, \quad 0 < M < \infty$$

とおく。ただし、L は $2\pi/\omega$ の整数倍であるとする。

$A : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$

$$Av = (\alpha - (1 + \partial_x^2 + \partial_y^2)^2)v - 3u_0^2 v, \quad v \in H^4(\Omega)$$

を周期境界条件の下で考える。我々の得た結果は次の通りである。

Theorem 1. (1)*If* $0 \le W < 1/\sqrt{2}$, *then for sufficiently small* $\varepsilon > 0$, *the spectrum of* A *lies in the closed left half-plane in* $\mathbf{C}$. *This is independent of* L *and* M.

(2)*If* $-1/\sqrt{2} < W < 0$, *then for sufficiently small* $\varepsilon > 0$, (i) *the spectrum of* A *lies in the closed left half-plane in* $\mathbf{C}$ *provided* $0 < \varepsilon < \dfrac{2\pi^2}{\sqrt{3}|W|M^2}$, (ii) *the spectrum of* A *intersects the right half-plane in* $\mathbf{C}$ *provided* $\varepsilon > \dfrac{2\pi^2}{\sqrt{3}|W|M^2}$, *where* $\varepsilon M^2 = O(1)$ *as* $\varepsilon \downarrow 0$ *and* $M \to \infty$.

(3) *If* $|W| > 1/\sqrt{2}$, *then for sufficiently small* $\varepsilon > 0$ *and large* L, *the spectrum of* A *intersects the right half-plane in* $\mathbf{C}$.

Theorem 2. *When* $0 < W < 1/\sqrt{2}$ *and* ε *is sufficiently small, for sufficiently large* L *and* M, *there exist* $\beta > 0$ *and* $\gamma > 0$ *which depend on* ε, W, L *and* M *such that* (i) β *and* γ *satisfy*

$$0 < \beta < \gamma, \quad \lim_{L,M\to\infty} \beta(\varepsilon, W, L, M) = 0$$
$$\lim_{L,M\to\infty}(\gamma(\varepsilon, W, L, M) - \beta(\varepsilon, W, L, M)) = 0$$

(ii) *The eigenvalues which belong to the interval* $[-\beta, 0]$ *are given by*

$$\mu_{mn} = -D_\perp\left(\frac{2\pi m}{M}\right)^2 - D_{//}\left(\frac{2\pi n}{L}\right)^2 + O\left(\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{L}\right)^3\right)$$

for $|m| \le \rho_1(M)$ *and* $|n| \le \rho_2(L)$, *where* $\rho_1(M) = o(M), \rho_2(L) = o(L)$ *as* $L, M \to \infty$, *and the associated eigenfunctions are given by*

$$\psi_{mn} = \partial_x u_0 \exp(2\pi i m y/M)\exp(2\pi i n x/L) + O(1/M) + O(1/L).$$

(iii) *The other eigenvalues* μ *which belongs to the interval* $(-\infty, -\beta)$ *satisfy* $\mu < -\gamma$

この定理の証明については、参考文献 [5],[6] を見よ。

参考文献

[1] P. Collet and J.P. Eckmann, Instabilities and fronts in extended systems, Princeton University Press, 1990.

[2] J. Swift and P.C. Hohenberg, Hydrodynamic fluctuations at the convective instability, Phys. Rev. **A**, vol **15**, num.**1** (1977), pp.319–328.

[3] Y. Kuramoto, Phase dynamics of weakly unstable periodic structures, Progress. Theo. Phys. vol. **71**, no. **6** (1984), pp.1182–1196.

[4] Y. Pomeau and P. Manneville, Stability and fluctuations of a spatially periodic convective flow, J. de Phys. Lett. **40** (1979), pp.609–612.

[5] M. Kuwamura, The phase dynamics method with applications to the Swift-Hohenberg equation, J.Dyns. Diff. Eqns., vol. **6**, no. **1** (1994), pp.185–225.

[6] M. Kuwamura, On the stability criterion of convective rolls in the Rayleigh-Bénard problem, submitted to SIAM J. Math. Anal.

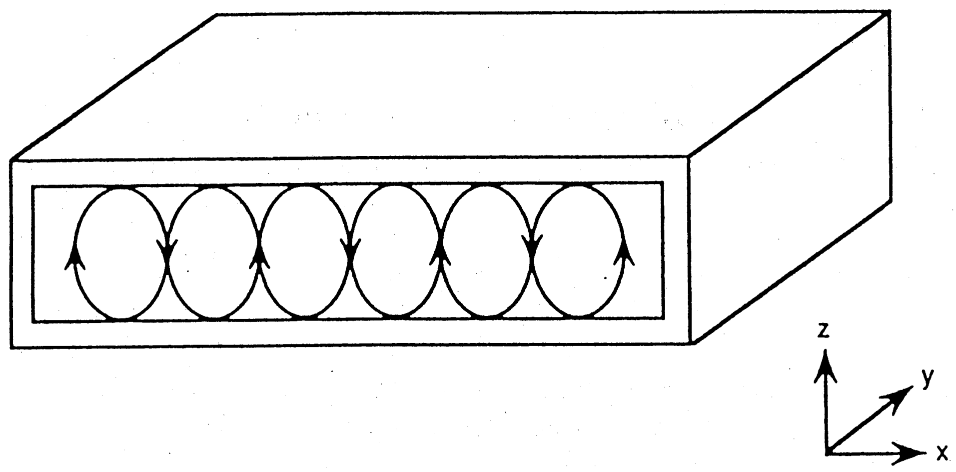

Figure 1.

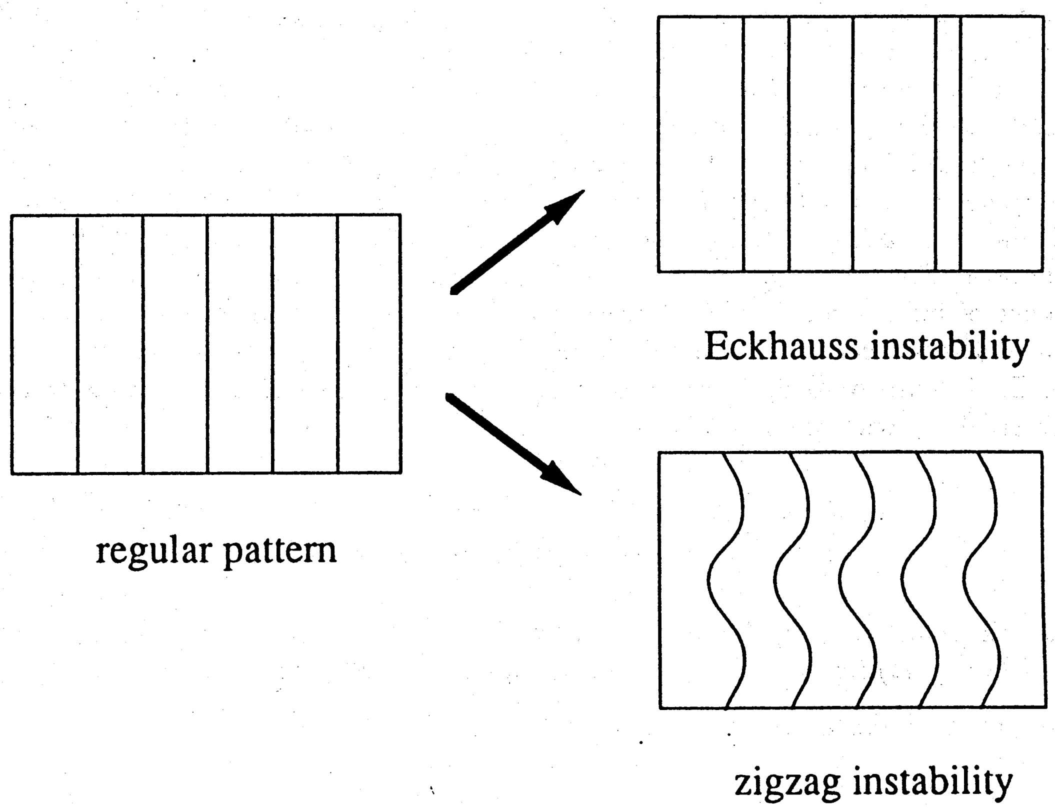

Figure 2.