数理解析研究所講究録
914巻 1995年 17-27

ロール型対流解の2次元攪乱に対する安定性について

九大・数理　　隠居　良行　(Yoshiyuki Kagei)

2枚の水平平行板間にある静止した流体を下から一様に熱すると，上下面の温度差が小さいときは流体は静止したままであるが，この温度差がある値を越えると静止状態は不安定になり対流が発生する．このとき水平方向に並んだロール型のパターンをもつ定常対流がよく見られる．ここでは，このロール型対流の安定性を考える．

1．ブシネスク方程式

流体層の厚さを d，上面の温度を T_1, 下面の温度を T_2 とする．水平方向を x,y-方向に，垂直方向を z-方向にとると，この対流現象を記述する方程式の無次元形は次のようになる：

$$
(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}-\Delta u-\lambda\theta e_z+u\cdot\nabla u+\nabla p=0, & \\ \nabla\cdot u=0, & ((x,y,z)\in \mathrm{R}^2\times(0,1),\quad t>0) \\ Pr\dfrac{\partial\theta}{\partial t}-\Delta\theta-\lambda u\cdot e_z+Pr\,u\cdot\nabla\theta=0. & \end{cases}
$$

ここで，$u=(u_x,u_y,u_z)$ は速度場，p は圧力，θ は温度と静止状態の温度分布を表す $1-z$ との差，$e_z=(0,0,1)$ である．λ^2 はレーリー数，Pr はプラントル数と呼ばれる無次元数で，

$$
\lambda^2=\frac{g\chi(T_2-T_1)d^3}{\nu\kappa},\quad Pr=\frac{\nu}{\kappa}.
$$

ただし，g は重力定数，χ は体積膨張率，ν,κ はそれぞれ動粘性率，熱伝導率である．

境界条件としては，ここでは上下面 $z=0,1$ で

$$
(2)\qquad \frac{\partial u_x}{\partial z}=\frac{\partial u_y}{\partial z}=u_z=\theta=0\quad(z=0,1)\,,
$$

x,y-方向には周期条件

$$
(3)\qquad u,p,\theta \text{ は } (x,y) \text{ について } (-\frac{\pi}{\alpha},\frac{\pi}{\alpha})\times(-\frac{\pi}{\omega},\frac{\pi}{\omega})\text{-周期}
$$

を考える．これらに初期条件

$$
(4)\qquad u|_{t=0}=u_0,\quad \theta|_{t=0}=\theta_0
$$

を加えると，初期値境界値問題 (1)–(4) が設定される．

初期値境界値問題 (1)–(4) を考える際に，速度場 u に対するポロイド・トロイド・平均流分解

$$\begin{aligned} u &= \underline{\delta}\varphi + \underline{\varepsilon}\psi + \underline{f} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_{xz}\varphi \\ \partial_{yz}\varphi \\ -(\partial_{xx}+\partial_{yy})\varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \partial_y\psi \\ -\partial_x\psi \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(z) \\ f_2(z) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を用いる．φ, ψ は (x, y) について u と同じ周期をもつ周期関数である．また，

$$\int_{\mathcal{P}} \varphi(x,y,z)dxdy = \int_{\mathcal{P}} \psi(x,y,z)dxdy = 0, \qquad \mathcal{P} = (-\frac{\pi}{\alpha}, \frac{\pi}{\alpha}) \times (-\frac{\pi}{\omega}, \frac{\pi}{\omega})$$

の下でこの分解は一意的である．この分解を用いると (1) は

(5) $$\mathcal{B}\phi' + \mathcal{A}\phi - \lambda\mathcal{C}\phi + \mathcal{N}(\phi,\phi) = 0$$

と書くことができる．ここで，$\phi = (\varphi, \psi, \theta, f_1, f_2)^T$,

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} (-\Delta)(-(\partial_{xx}+\partial_{yy})) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-(\partial_{xx}+\partial_{yy})) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & PrI & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \Delta^2(-(\partial_{xx}+\partial_{yy})) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-\Delta)(-(\partial_{xx}+\partial_{yy})) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-\Delta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-\partial_{zz}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (-\partial_{zz}) \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (-(\partial_{xx}+\partial_{yy})) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (-(\partial_{xx}+\partial_{yy})) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{N}(\phi,\phi) = \begin{pmatrix} \underline{\delta}\cdot((\underline{\delta}\varphi+\underline{\varepsilon}\psi+\underline{f})\cdot\nabla(\underline{\delta}\varphi+\underline{\varepsilon}\psi+\underline{f})) \\ -\underline{\varepsilon}\cdot((\underline{\delta}\varphi+\underline{\varepsilon}\psi+\underline{f})\cdot\nabla(\underline{\delta}\varphi+\underline{\varepsilon}\psi+\underline{f})) \\ Pr(\underline{\delta}\varphi+\underline{\varepsilon}\psi+\underline{f})\cdot\nabla\theta \\ \frac{1}{|\mathcal{P}|}\int_{\mathcal{P}}(\underline{\delta}\varphi+\underline{\varepsilon}\psi)\cdot\nabla(\underline{\delta}\varphi+\underline{\varepsilon}\psi)_x dxdy \\ \frac{1}{|\mathcal{P}|}\int_{\mathcal{P}}(\underline{\delta}\varphi+\underline{\varepsilon}\psi)\cdot\nabla(\underline{\delta}\varphi+\underline{\varepsilon}\psi)_y dxdy \end{pmatrix}.$$

境界条件は

(6) $$\varphi = \partial_{zz}\varphi = \partial_z\psi = \theta = \partial_z f_1 = \partial_z f_2 = 0 \quad (z = 0, 1),$$

(7) $$\varphi,\ \psi,\ \theta \text{ は } (x, y) \text{ について } \quad \mathcal{P}\text{-周期}$$

となる．初期条件

(8) $$\phi|_{t=0} = \phi_0$$

を加えると，対応する初期値境界値問題が設定される．

$\Omega = \mathcal{P} \times (0,1)$ とし，

$$L^2_M(\Omega) = \{\varphi \in L^2(\Omega); \int_{\mathcal{P}} \varphi(x,y,z)dxdy = 0,\ z \in (0,1)\},$$

$$L^2_M(0,1) = \{f \in L^2(0,1); \int_0^1 f(z)dz = 0\}$$

とおくと，$\mathcal{B}, \mathcal{A}$ は境界条件 (6),(7) の下で，$L^2_M(\Omega)^2 \times L^2(\Omega) \times L^2_M(0,1)^2$ において正定値自己共役作用素になる．

ここでは，2次元問題のみを考えるため，以後

$$\partial_y \equiv 0, \quad \Omega = (-\frac{\pi}{\alpha}, \frac{\pi}{\alpha}) \times (0,1)$$

とする．(5) に $\mathcal{B}^{-1}$ を作用させると問題は次の (9) に帰着される：

(9) $$\phi' + \overline{\mathcal{A}}\phi - \lambda\mathcal{B}^{-1}\mathcal{C}\phi + \mathcal{B}^{-1}\mathcal{N}(\phi,\phi) = 0 \qquad \text{in } D(\mathcal{B}^{1/2}).$$

ここで，$\overline{\mathcal{A}}$ は $\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}$ の $D(\mathcal{B}^{1/2})$ における自己共役拡張である．

2．ロール解の存在

(9) は次のような x-方向に $\frac{2\pi}{\alpha}$-周期であるようなロール型対流を表す定常解をもつ：

定理1．(Judovich [3], Rabinowitz [8])

$\alpha_c = \pi/\sqrt{2}$ とし，$|\alpha - \alpha_c| < \varepsilon_1$ ($\varepsilon_1 > 0$ はある定数) とする．このとき $\exists\varepsilon_0 > 0$, $\exists\{\phi_s, \lambda\} = \{\phi_s(\varepsilon), \lambda(\varepsilon)\}$ ($|\varepsilon| < \varepsilon_0$) : non-trivial solution branch of (9) such that

$$\phi_s = (\varphi_s, \psi_s, \theta_s, f_{1s}, f_{2s})^T, \quad \psi_s = f_{1s} = f_{2s} = 0,$$

$$\begin{aligned}
\varphi_s &= \varepsilon \sin\pi z \cos\alpha x + O(\varepsilon^3),\\
\theta_s &= \varepsilon\alpha(\alpha^2+\pi^2)^{1/2} \sin\pi z \cos\alpha x - \varepsilon^2 \frac{Pr\alpha^3(\alpha^2+\pi^2)^{1/2}}{8\pi} \sin 2\pi z + O(\varepsilon^3),\\
\lambda &= \lambda_0 + \varepsilon^2 \frac{Pr^2\alpha^3(\alpha^2+\pi^2)^{1/2}}{16} + O(\varepsilon^3), \quad \lambda_0 = \frac{(\alpha^2+\pi^2)^{3/2}}{\alpha}.
\end{aligned}$$

3．ロール解の安定性

自然数 N に対して，ロール解 ϕ_s は明らかに x について $\frac{2N\pi}{\alpha}$ -周期である．ここでは，x について $\frac{2N\pi}{\alpha}$ -周期であるような攪乱に対するロール解 ϕ_s の安定性を考える．考えたいクラスに属する攪乱 ϕ の挙動は次で支配される．

$$\phi' + \overline{\mathcal{A}}_N\phi - \lambda\mathcal{B}_N^{-1}\mathcal{C}_N\phi + \mathcal{B}_N^{-1}\mathcal{M}\phi + \mathcal{B}_N^{-1}\mathcal{N}(\phi,\phi) = 0. \tag{10}$$

ここで，$\mathcal{B}_N, \overline{\mathcal{A}}_N$ や $\mathcal{C}_N$ はそれぞれ，作用素 $\mathcal{B}, \overline{\mathcal{A}}$ や $\mathcal{C}$ を$\Omega_N = (-\frac{N\pi}{\alpha}, \frac{N\pi}{\alpha}) \times (0,1)$ 上で考えたものであり，

$$\mathcal{M}\phi = \mathcal{N}(\phi_s,\phi) + \mathcal{N}(\phi,\phi_s)$$

である．(10) に対する線形化固有値問題は

$$-\sigma\phi + \mathcal{L}_N\phi = 0. \tag{11}$$

ここで，

$$\mathcal{L}_N\phi = \overline{\mathcal{A}}_N\phi - \lambda\mathcal{B}_N^{-1}\mathcal{C}_N\phi + \mathcal{B}_N^{-1}\mathcal{M}\phi.$$

$\mathcal{L}_N$ のスペクトルを $\sigma(\mathcal{L}_N)$ と書く．新しいパラメータ β を

$$\alpha = \alpha_c + \beta\varepsilon$$

で定めると次が成り立つ．

定理２． (i) $256\beta^2 < Pr^2\pi^4$ とする．このとき，十分小さな ε に対して，

$$\sigma(\mathcal{L}_N) \subset \{0\} \cup \{\sigma; \mathrm{Re}\,\sigma > 0\}.$$

また，0 は simple eigenvalue で，固有関数は $\partial_x\phi_s$ である．

(ii) $256\beta^2 > Pr^2\pi^4$ とする．このとき，十分小さな ε と十分大きな N に対して，$\mathrm{Re}\,\sigma < 0$ となるような $\sigma \in \sigma(\mathcal{L}_N)$ が存在する．

注意. (i) $256\beta^2 < Pr^2\pi^4$ とする．このとき，$\exists\gamma_0 > 0$: ε, N に無関係，$\exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ s.t. 十分大きな N に対して，$\sigma \in \sigma(\mathcal{L}_N) \cap \{\sigma\,;\, 0 \le \mathrm{Re}\,\sigma \le \delta\}$ はつぎの形で書ける：

$$\sigma = \frac{1}{1+Pr}\left(1 - \frac{256\beta^2}{Pr^2\pi^4} + O(\varepsilon)\right)\alpha_m^2 + O(N^{-3}).$$

ここで，

$$\alpha_m = \frac{\alpha}{N}m, \quad |m| \le \varepsilon\frac{\gamma_0}{\alpha}N, \quad m \in \mathrm{Z}.$$

(ii) Kirchgässner-Kielhöfer [5] は次を示した．$\alpha \ne \alpha_c$ のとき，十分大きな N に対して，$|\lambda(\varepsilon) - \lambda_0| \ll 1$ であれば，$\mathrm{Re}\,\sigma < 0$ となるような $\sigma \in \sigma(\mathcal{L}_N)$ が存在する．

(iii) Busse-Bolton [1] は，3次元攪乱に対するロール解の安定性を考え，さまざまな安定性の判定条件を導き，とくに，2次元攪乱に対する安定性の判定条件として，定理2の条件を得ている．定理2は [1] の計算を数学的に正当化したものである．

(iv) Swift-Hohenberg 方程式に対して，定理2と同様の結果が Collet-Eckmann [2], Kuwamura [6], [7] によって得られている．

4．定理2の証明の概略

簡単のため $\psi = f_1 = f_2 = 0$, $\phi = (\varphi, \theta)^T$ とする．このとき，

$$-\sigma\phi + \mathcal{L}_N\phi = 0 \tag{11}$$

は次のようになる：

$$\begin{cases} -\sigma\varphi + \overline{A}_N\varphi - \lambda B_N^{-1}(-\partial_{xx})\theta + B_N^{-1}\mathcal{M}_1\varphi &= 0, \\ -\sigma\theta + Pr^{-1}(-\Delta)\theta - \lambda Pr^{-1}(-\partial_{xx})\varphi + Pr^{-1}\mathcal{M}_2\phi &= 0. \end{cases} \tag{12}$$

ここで，

$$B_N\varphi = (-\Delta)(-\partial_{xx})\varphi,$$

$$\varphi \in D(B_N) = \{\varphi \in L^2_M(\Omega_N); B_N\varphi \in L^2(\Omega_N),\ \varphi = 0,\ z = 0, 1\},$$

$\overline{A}_N$ は $B_N^{-1}A_N$ の $D(B_N^{1/2})$ における自己共役拡張で，

$$A_N\varphi = \Delta^2(-\partial_{xx})\varphi,$$

$$\varphi \in D(A_N) = \{\varphi \in L^2_M(\Omega_N); A_N\varphi \in L^2(\Omega_N),\ \varphi = \partial_{zz}\varphi = 0,\ z = 0, 1\}$$

であり，

$$\mathcal{M}_1\varphi = \underline{\delta}\cdot(\underline{\delta}\varphi_s \cdot \nabla\underline{\delta}\varphi + \underline{\delta}\varphi\cdot\nabla\underline{\delta}\varphi_s),$$

$$\mathcal{M}_2\phi = Pr(\underline{\delta}\varphi_s \cdot \nabla\theta + \underline{\delta}\varphi \cdot \nabla\theta_s).$$

である．

以下，N が十分大きいとき，$\mathcal{L}_N$ の 0 に近い固有値が定理2の注意 (i) の形で与えられること示す．

$\phi_s = \phi_{s,\varepsilon}$ であるから，$\mathcal{L}_N = \mathcal{L}_{N,\varepsilon}$ と書く．$\mathcal{L}_{N,0}$ は 0 を固有値としてもち，対応する固有関数は

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha(\alpha^2+\pi^2)^{1/2} \end{pmatrix} \sin\pi z \exp(\pm\alpha x)$$

である．また，$\mathcal{L}_{N,0}$ の 0 に近い固有値の固有関数は

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha(\alpha^2+\pi^2)^{1/2} \end{pmatrix} \sin\pi z \exp(\pm i\alpha x)\exp(i\alpha_m x), \tag{13}$$

$\alpha_m = \dfrac{\alpha}{N}m$, $|\alpha_m| \ll 1$, で近似的に与えられる．したがって，$\varepsilon > 0$ のとき $\mathcal{L}_{N,\varepsilon}$ の 0 に近い固有値の固有関数の主要部は (13) の形で与えられることが予想される．そこで，$\varphi \in L^2(\Omega_N)$ のフーリエ展開を次のように書く (Bloch method)：

$$\begin{aligned}\varphi(x,z) &= \sum_{q\in\mathrm{Z}} a_q(z)\exp(i\frac{\alpha}{N}qx)\\ &= \sum_{-[\frac{N}{2}]}^{[\frac{N-1}{2}]}\sum_{q\in\mathrm{Z}} a_{Nq+m}(z)\exp(i(\alpha q+\alpha_m)x),\quad \alpha_m = \frac{\alpha}{N}m\\ &= \sum_{-[\frac{N}{2}]}^{[\frac{N-1}{2}]}\left(\sum_{q\in\mathrm{Z}} a_{Nq+m}(z)\exp(i\alpha qx)\right)\exp(i\alpha_m x).\end{aligned}$$

$\varphi_m(x,z) = \sum_{q\in\mathrm{Z}} a_{Nq+m}(z)\exp(i\alpha qx)$ とおくと，$\varphi_m(x,z)$ は x について $\frac{2\pi}{\alpha}$-周期である．ここで，

$$T_m : L^2(\Omega_N) \to L^2(\Omega)$$

を

$$T_m\varphi = \varphi_m$$

で定義する．T_m は次の性質

(i) $$T_m : L^2_M(\Omega_N) \to \begin{cases} L^2_M(\Omega) & (m=0),\\ L^2(\Omega) & (m\neq 0),\end{cases}$$

(ii) $$T_m(\partial_x\varphi) = (i\alpha_m+\partial_x)T_m\varphi,\quad T_m(\partial_z\varphi) = \partial_z T_m\varphi$$

をもつことに注意して，T_m を (12) に作用させると (11) は次に帰着される：

(14) $$\begin{cases} -\sigma\varphi + \overline{A}(\alpha_m)\varphi - \lambda B(\alpha_m)^{-1}(-(i\alpha_m+\partial_x)^2)\theta + B(\alpha_m)^{-1}\mathcal{M}_1(\alpha_m)\varphi = 0,\\ -\sigma\theta + Pr^{-1}(-\Delta_m)\theta - \lambda Pr^{-1}(-(i\alpha_m+\partial_x)^2)\varphi + Pr^{-1}\mathcal{M}_2(\alpha_m)\phi = 0.\end{cases}$$

ここで，$\phi = (\varphi,\theta)^T \in D(B(\alpha_m)^{1/2})\times L^2(\Omega)$ であり，作用素 $(-\Delta_m)$, $B(\alpha_m)$, $\overline{A}(\alpha_m)$, $\mathcal{M}_i(\alpha_m)$, $(i=1,2)$ はそれぞれ次で定義する：

$$(-\Delta_m)\theta = -((i\alpha_m+\partial_x)^2+\partial_{zz})\theta,$$

$$\theta \in D((-\Delta_m)) = \{\theta\in L^2(\Omega); (-\Delta_m)\theta \in L^2(\Omega),\ \theta = 0,\ z=0,1\},$$

$$B(\alpha_m)\varphi = (-\Delta_m)(-(i\alpha_m+\partial_x)^2)\varphi,$$

$$\varphi \in D(B(\alpha_m)) = \{\varphi\in L^2(\Omega); B(\alpha_m)\varphi\in L^2(\Omega),\ \varphi=0,\ z=0,1\},\quad (m\neq 0),$$

$$\varphi \in D(B(\alpha_m)) = \{\varphi\in L^2_M(\Omega); B(\alpha_m)\varphi\in L^2(\Omega),\ \varphi=0,\ z=0,1\},\quad (m=0),$$

$\overline{A}(\alpha_m)$ は $B(\alpha_m)^{-1}A(\alpha_m)$ の $D(B(\alpha_m)^{1/2})$ における自己共役拡張で,

$$A(\alpha_m)\varphi = \Delta_m^2(-\partial_{xx})\varphi,$$

$$\varphi \in D(A(\alpha_m)) = \{\varphi \in L^2(\Omega); A(\alpha_m)\varphi \in L^2(\Omega),\ \varphi = \partial_{zz}\varphi = 0,\ z = 0,1\},\ \ (m \neq 0),$$

$$\varphi \in D(A(\alpha_m)) = \{\varphi \in L^2_M(\Omega); A(\alpha_m)\varphi \in L^2(\Omega),\ \varphi = \partial_{zz}\varphi = 0,\ z = 0,1\},\ \ (m = 0)$$

である.

$$\mathcal{M}_1(\alpha_m)\varphi = \sum_{k=0}^{5} \alpha_m^k \mathcal{M}_1^{(k)}\varphi,\quad \mathcal{M}_1^{(0)}\phi = \underline{\delta}\cdot(\underline{\delta}\varphi_s\cdot\nabla\underline{\delta}\varphi + \underline{\delta}\varphi\cdot\nabla\underline{\delta}\varphi_s),$$

$$\mathcal{M}_2(\alpha_m)\phi = \sum_{k=0}^{5} \alpha_m^k \mathcal{M}_2^{(k)}\phi,\quad \mathcal{M}_2^{(0)}\phi = Pr(\underline{\delta}\varphi_s\cdot\nabla\theta + \underline{\delta}\varphi\cdot\nabla\theta_s).$$

(注. $\alpha_m = 0$ のときは $B(0) = B_1, \overline{A}(0) = \overline{A}_1$ となり, 問題は $N = 1$ の場合と同じものになる.)

(14) を

$$-\sigma\phi + \mathcal{L}(\alpha_m)\phi = 0 \tag{15}$$

と書く.

$\alpha_m = 0$ のとき, 問題は $N = 1$ の場合と同じであり, ある正定数 $c_1 = c_1(Pr)$ が存在して,

$$\sigma(\mathcal{L}(0)) \subset \{0\} \cup \{\sigma;\ \mathrm{Re}\,\sigma \geq c_1\varepsilon^2\}$$

となる. ここで, 0 は simple eigenvalue で, 対応する固有関数は $\partial_x\phi_s$ である. $\mathcal{L}_N$ の 0 に近い固有値は, $\mathcal{L}(\alpha_m)$, $(|\alpha_m| \ll 1)$, の 0 に近い固有値で与えられることを期待して, 以下, $\mathcal{L}(\alpha_m)$, $(|\alpha_m| \ll 1)$, の 0 に近い固有値を次のようにして求める. (注. $D(B(\alpha_m)^{1/2}) \neq D(B_1^{1/2})$ $(\alpha_m \neq 0)$, $B(\alpha_m)^{-1} = O(\alpha_m^{-2})$ $(\alpha_m \to 0)$.)

まず, $P : L^2(\Omega) \to L^2(0,1)$ を

$$(P\varphi)(z) = \frac{\alpha}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{\alpha}}^{\frac{\pi}{\alpha}} \varphi(x,z)dx$$

で定義する. $P_1 = I - P$ とおくと, P_1 は $L^2_M(\Omega)$ 上への直交射影となる. このとき,

(i)

$$PB(\alpha_m)^{-1}P = B(\alpha_m)^{-1}P = \alpha_m^{-2}(-\partial_{zz} + \alpha_m^2)^{-1}P.$$

ここで, $-\partial_{zz}$ は $D((-\partial_{zz})) = H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$ を定義域とする Laplace 作用素である.

(ii) $P_1B(\alpha_m)^{-1}P_1 = B(\alpha_m)^{-1}P_1$ は $L^2_M(\Omega)$ 上の有界作用素で α_m について analyitic.

(iii)

$$P\mathcal{M}_1^{(0)}\varphi = \mathcal{M}_1^{(0)}P\varphi = 0,\quad \mathcal{M}_2^{(0)}\phi = 0,\quad \phi = (P\varphi, 0)^T,$$

$$P\mathcal{M}_1^{(k)}(P_1\varphi + P\varphi) = P\mathcal{M}_1^{(k)}P_1\varphi,\quad k = 1,\cdots,5.$$

(iv)

$$PD(B(\alpha_m)^{1/2}) = D((-\partial_{zz})^{1/2}), \quad P_1 D(B(\alpha_m)^{1/2}) = D(B_1^{1/2})$$

が成り立つ.

$$A_1(\alpha_m) = P_1\overline{A}(\alpha_m)P_1 = \overline{A}(\alpha_m)P_1,$$
$$A_2(\alpha_m) = P\overline{A}(\alpha_m)P = \overline{A}(\alpha_m)P$$

とおくと,

命題 3. (i) ある正数 $C > 0$ が存在して, $\mathrm{Re}\,\sigma \leq C$ であれば, (15) $(m \neq 0)$ は次の (16)–(19) に帰着される:

$$\begin{aligned}(16)\quad & -\sigma\varphi_1 + A_1(\alpha_m)\varphi_1 - \lambda(-\Delta_m)^{-1}P_1\theta + B(\alpha_m)^{-1}P_1\mathcal{M}_1(\alpha_m)\varphi_1 \\ & +B(\alpha_m)^{-1}P_1\sum_{k=1}^{5}\alpha_m^k\mathcal{M}_1^{(k)}\varphi_2 + B(\alpha_m)^{-1}P_1\sum_{k=1}^{5}\alpha_m^{k-1}\mathcal{M}_1^{(k)}\varphi_3 = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(17)\quad & -\sigma\theta + Pr^{-1}(-\Delta_m)\theta - \lambda Pr^{-1}[(-(i\alpha_m+\partial_x)^2)\varphi_1 + \alpha_m^2\varphi_2 + \alpha_m\varphi_3] \\ & +Pr^{-1}\mathcal{M}_2(\alpha_m)\phi_1 + Pr^{-1}\sum_{k=1}^{5}\alpha_m^k\mathcal{M}_2^{(k)}\phi_2 + Pr^{-1}\sum_{k=1}^{5}\alpha_m^{k-1}\mathcal{M}_2^{(k)}\phi_3 = 0,\end{aligned}$$

$$(18)\quad -\sigma\varphi_2 + A_2(\alpha_m)\varphi_2 + (-\partial_{zz}+\alpha_m^2)^{-1}P\left(-\lambda\theta + \sum_{k=2}^{5}\alpha_m^{k-2}\mathcal{M}_1^{(k)}\varphi_1\right) = 0,$$

$$(19)\quad -\sigma\varphi_3 + A_2(\alpha_m)\varphi_3 + (-\partial_{zz}+\alpha_m^2)^{-1}P\mathcal{M}_1^{(1)}\varphi_1 = 0.$$

ここで, $(\varphi_1, \theta, \varphi_2, \varphi_3)^T \in D(B_1^{1/2}) \times L^2(\Omega) \times D((-\partial_{zz})^{1/2})^2$; $\phi_1 = (\varphi_1, \theta)^T$; $\phi_2 = (\varphi_2, 0)^T$; $\phi_3 = (\varphi_3, 0)^T$.

(ii) (16)–(19) を

$$(20)\quad -\sigma\phi + \tilde{\mathcal{L}}(\alpha_m)\phi = 0, \quad \phi = (\varphi_1, \theta, \varphi_2, \varphi_3)^T$$

と書くと, $\tilde{\mathcal{L}}(\alpha_m)$ は holomorphic family of type (A) (cf. [4]) であり, $\sigma = 0$ は $\tilde{\mathcal{L}}(0)$ の simple eigenvalue で, 固有関数は $\phi^{(0)} = (\partial_x\varphi_s, \partial_x\theta_s, 0, 0)^T$ である.

(16)–(19) の導出. $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, $\varphi_1 = P_1\varphi$, $\varphi_2 = P\varphi$ とすると, (14) から

$$\begin{aligned}(21)\quad & -\sigma\varphi_1 + A_1(\alpha_m)\varphi_1 - \lambda(-\Delta_m)^{-1}P_1\theta + B(\alpha_m)^{-1}P_1\mathcal{M}_1(\alpha_m)\varphi_1 \\ & +B(\alpha_m)^{-1}P_1\sum_{k=1}^{5}\alpha_m^k\mathcal{M}_1^{(k)}\varphi_2 = 0,\end{aligned}$$

$$-\sigma\theta + Pr^{-1}(-\Delta_m)\theta - \lambda Pr^{-1}(-(i\alpha_m+\partial_x)^2)\varphi_1 - \lambda Pr^{-1}\alpha_m^2\varphi_2$$

(22)
$$Pr^{-1}\mathcal{M}_2(\alpha_m)\phi_1 + Pr^{-1}\sum_{k=1}^{5}\alpha_m^k\mathcal{M}_2^{(k)}\phi_2 \;=\; 0,$$

(23)
$$-\sigma\varphi_2 + A_2(\alpha_m)\varphi_2 + (-\partial_{zz}+\alpha_m^2)^{-1}P\left(-\lambda\theta + \sum_{k=1}^{5}\alpha_m^{k-2}\mathcal{M}_1^{(k)}\varphi_1\right) = 0.$$

ここで，$\phi_1 = (\varphi_1, \theta)^T$; $\phi_2 = (\varphi_2, 0)^T$.

$L_2(\sigma, \alpha_m) = -\sigma I + A_2(\alpha_m)$ とおくと，ある正数 $C > 0$ が存在して，$\mathrm{Re}\,\sigma \le C$ であれば，$D((-\partial_{zz})^{1/2})$ 上で有界な $K = L_2(\sigma, \alpha_m)^{-1}$ が存在することがわかる．(23) より

$$\varphi_2 = \Psi_1 + \alpha_m^{-1}\Psi_2$$

と書ける．ここで，

$$\Psi_1 = -K(-\partial_{zz}+\alpha_m^2)^{-1}P\left(-\lambda\theta + \sum_{k=2}^{5}\alpha_m^{k-2}\mathcal{M}_1^{(k)}\varphi_1\right),$$

$$\Psi_2 = -K(-\partial_{zz}+\alpha_m^2)^{-1}P\mathcal{M}_1^{(1)}\varphi_1$$

である．これを (21),(22) へ代入すると，

$$-\sigma\varphi_1 + A_1(\alpha_m)\varphi_1 - \lambda(-\Delta_m)^{-1}P_1\theta + B(\alpha_m)^{-1}P_1\mathcal{M}_1(\alpha_m)\varphi_1$$

$$+B(\alpha_m)^{-1}P_1\sum_{k=1}^{5}\alpha_m^k\mathcal{M}_1^{(k)}\Psi_1 + B(\alpha_m)^{-1}P_1\sum_{k=1}^{5}\alpha_m^{k-1}\mathcal{M}_1^{(k)}\Psi_2 \;=\; 0,$$

$$-\sigma\theta + Pr^{-1}(-\Delta_m)\theta - \lambda Pr^{-1}(-(i\alpha_m+\partial_x)^2)\varphi_1 - \lambda Pr^{-1}\alpha_m^2\Psi_1 - \lambda Pr^{-1}\alpha_m\Psi_2$$

$$Pr^{-1}\mathcal{M}_2(\alpha_m)\phi_1 + Pr^{-1}\sum_{k=1}^{5}\alpha_m^k\mathcal{M}_2^{(k)}\psi_1 + Pr^{-1}\sum_{k=1}^{5}\alpha_m^{k-1}\mathcal{M}_2^{(k)}\psi_2 \;=\; 0.$$

ここで，$\psi_1 = (\Psi_1, 0)^T$, $\psi_2 = (\Psi_2, 0)^T$. Ψ_1, Ψ_2 をあらためて $\Psi_1 = \varphi_2$, $\Psi_2 = \varphi_3$ とおけば，(16)–(19) を得る．

命題 3 より 0 は $\tilde{\mathcal{L}}(0)$ の simple eigenvalue だから $\langle\phi^{(0)}, \phi^{(0)*}\rangle = 1$, $\tilde{\mathcal{L}}(0)^*\phi^{(0)*} = 0$ となる $\phi^{(0)*}$ が存在する．ここで，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ は $D(B_1^{1/2}) \times L^2(\Omega) \times D((-\partial_{zz})^{1/2})^2$ の内積である．また $\tilde{\mathcal{L}}(\alpha_m)$ の 0 にもっとも近い固有値 σ と対応する固有関数は

$$\sigma = \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_m^k\sigma^{(k)}, \quad \phi = \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_m^k\phi^{(k)}$$

と展開できる．$\tilde{\mathcal{L}}(\alpha_m)$ を

$$\tilde{\mathcal{L}}(\alpha_m) = \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_m^k\tilde{\mathcal{L}}^{(k)}, \quad \tilde{\mathcal{L}}^{(0)} = \tilde{\mathcal{L}}(0)$$

と展開すると，

$$\tilde{\mathcal{L}}^{(0)}\phi^{(0)} = 0,$$

$$\tilde{\mathcal{L}}^{(0)}\phi^{(1)} + \tilde{\mathcal{L}}^{(1)}\phi^{(0)} = \sigma^{(1)}\phi^{(0)},$$

$$\tilde{\mathcal{L}}^{(0)}\phi^{(2)} + \tilde{\mathcal{L}}^{(1)}\phi^{(1)} + \tilde{\mathcal{L}}^{(2)}\phi^{(0)} = \sigma^{(2)}\phi^{(0)} + \sigma^{(1)}\phi^{(1)},$$

$$\cdots\cdots$$

を得る．この第2式より

$$\sigma^{(1)} = \langle \tilde{\mathcal{L}}^{(1)}\phi^{(0)}, \phi^{(0)*}\rangle.$$

$\phi^{(0)}$, $\phi^{(0)*}$ はともに x について奇関数であることなどに注意すると，

$$\langle \tilde{\mathcal{L}}^{(1)}\phi^{(0)}, \phi^{(0)*}\rangle = 0$$

がわかり，したがって

$$\sigma^{(1)} = 0.$$

第3式より

$$\sigma^{(2)} = \langle \tilde{\mathcal{L}}^{(1)}\phi^{(1)}, \phi^{(0)*}\rangle + \langle \tilde{\mathcal{L}}^{(2)}\phi^{(0)}, \phi^{(0)*}\rangle.$$

右辺を計算すると

$$\sigma^{(2)} = \frac{1}{1+Pr}\left(1 - \frac{256\beta^2}{Pr^2\pi^4} + O(\varepsilon)\right)$$

がわかり，したがって $\tilde{\mathcal{L}}(\alpha_m)$ の 0 に近い固有値 σ, つまり $\mathcal{L}_N$ の 0 に近い固有値 σ は

$$\sigma = \frac{1}{1+Pr}\left(1 - \frac{256\beta^2}{Pr^2\pi^4} + O(\varepsilon)\right)\alpha_m^2 + O(\alpha_m^3)$$

で与えられることがわかる．

References

[1] F. H. Busse and E. W. Bolton, Instabilities of convection rolls with stress-free boundaries near threshold, J. Fluid Mech., 146 (1984), pp. 115–125.

[2] P. Collet and J. P. Eckmann, Instabilities and fronts in extended systems, Princeton Univ. Press, Princeton, 1990.

[3] V. I. Judovich, On the origin of convection, J. Appl. Math. Mech., 30 (1966), pp. 1193–1199.

[4] T. Kato, Perturbation theory for linear operators, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1966.

[5] K. Kirchgässner and H. Kielhöfer, Stability and bifurcation in fluid dynamics, Rocky Mount. J. Math., 3 (1973), pp. 275–318.

[6] M. Kuwamura, The phase dynamics method with applications to the Swift-Hohenberg equation, J. Dyns. Diff. Eqns., 6 (1994), pp. 185–225.

[7] M. Kuwamura, On the stability criterion of convective rolls in the Rayleigh- Bénard problem, preprint.

[8] P. H. Rabinowitz, Existence and nonuniqueness of rectanglar solutions of the Bénard problem, Arch. Rational Mech. Anal., 29 (1968), pp. 32–57.