数理解析研究所講究録
916 巻 1995 年 52-74

欠損性の概念と多項分布の母数の推定について

筑波大・数学 田中 秀和 (Hidekazu Tanaka)
筑波大・数学 赤平 昌文 (Masafumi Akahira)

1 はじめに

Fisher [F25] は漸近有効推定量のクラスの中で最尤推定量が情報量損失を漸近的に最小にすると予想した. その後 Rao [R61] は多項分布の場合にその予想が正しいことを示し, そのことを最尤推定量は 2 次の漸近的有効であるといった. また Rao [R61] はその論文の中で種々の推定量の漸近情報量損失を計算した. また Hodges and Lehmann [HL70] はある統計的推測方式が与えられたとき, それとある意味で同等になる統計的推測方式を, 必要とする標本数の差によって定義される欠損性の概念を提案し, それが情報量の概念などとも密接な関係を持つことも示した. さらに Ponnapalli [P73] は多項分布の場合に Rao [R61] が取り扱った推定量の最尤推定量に対する漸近分散欠損量を計算したが, [R61] のような一様な結果を得ることができなかった. 両者はやや異なる基準を用いていることを考慮に入れても矛盾を隠すことはできないように思える. 本論では, まず Rao and Ponnapalli [RP75] において Rao 欠損量との関連で考察された Hodges-Lehmann 欠損量を一般化したものとの関係について考察する. 次に, 推定量に偏り補正を施すことによって Ponnapalli [P73] の結果は Rao [R61] の結果に一致することを示す. なお本論に関連する高次漸近理論は最近著しい発展を遂げ, 現在も研究されている (例えば赤平 [A94], Ghosh [G94]).

2 情報量による欠損性と標本数による欠損性

この節では Rao and Ponnapalli [RP75] に従い Fisher 情報量による欠損性と標本数による欠損性との関係について論じる. まず, $X_1, \ldots, X_n$ を密度 $q(x;\theta)$ $(\theta \in \mathbf{R})$ をもつ分布からの大きさ n の無作為標本とする. 但し, $q(x;\theta)$ はある σ-有限測度 ν に対する密度とする. また $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ に対して $T_{1n}(\mathbf{X}), T_{2n}(\mathbf{X})$ を θ の推定量とし, それぞれの密度を $q_1(t_1;\theta), q_2(t_2;\theta)$ とする. このとき X_1, T_{jn} $(j = 1, 2)$ の Fisher 情報量をそれぞれ

$$I(\theta) := E_\theta[\{\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(X_1;\theta)\}^2], \qquad I_{T_{jn}}(\theta) := E_\theta[\{\frac{\partial}{\partial\theta}\log g_j(T_{jn};\theta)\}^2] \quad (j = 1, 2)$$

とする.

定義 2.1 密度をもつ推定量 T_n が θ に対して 1 次の漸近的有効であるとは

$$\lim_{n\to\infty}\frac{I_{T_n}(\theta)}{n} = I(\theta)$$

となることをいう.

定義 2.2 推定量 T_{2n}に対する推定量 T_{1n}の漸近欠損量を

$$D_R(T_{1n}, T_{2n}) := \lim_{n\to\infty} \frac{I_{T_{2n}}(\theta) - I_{T_{1n}}(\theta)}{I(\theta)}$$

によって定義し, これを Rao 欠損量という. 但し, 右辺の極限は存在するものとする.

ここで次の条件を仮定する.

(A.2.1) 各 $j = 1, 2$ について推定量 T_{jn}の Fisher 情報量 $I_{T_{jn}}(\theta)$ は次のように展開されるものとする.

$$\frac{I_{T_{jn}}(\theta)}{n} = I(\theta) + \frac{a_j(\theta)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

(A.2.2) 任意の n に対して整数列 k_n が存在して

$$\lim_{n\to\infty} k_n = \infty\ , \qquad I_{T_{2\,k_n-1}}(\theta) < I_{T_{1n}}(\theta) \leq I_{T_{2\,k_n}}(\theta)$$

である.

定義 2.3 条件 (A.2.1), (A.2.2) の下で, T_{2n} に対する T_{1n} の漸近欠損量を

$$D_{HL}(T_{1n}, T_{2n}) := \lim_{n\to\infty} (n - k_n)$$

によって定義し, これを Hodges-Lehmann 欠損量という. 但し右辺の極限は k_n によらず一意に存在するものとする.

定理 2.1 ([RP75]). 条件 (A.2.1), (A.2.2) の下で, 次のことが成り立つ.

(i) T_{1n}, T_{2n}は 1 次の漸近的有効である.

(ii) $\lim_{n\to\infty} k_n/n = 1$.

(iii) $D_R(T_{1n}, T_{2n}) \notin \mathbf{Z}$ のとき $D_{HL}(T_{1n}, T_{2n}) = [D_R(T_{1n}, T_{2n})]$
$D_R(T_{1n}, T_{2n}) \in \mathbf{Z}$ のとき $D_{HL}(T_{1n}, T_{2n}) = D_R(T_{1n}, T_{2n})$ または $D_R(T_{1n}, T_{2n}) - 1$ である. 但し, $\mathbf{Z}$ は整数全体とし, $[x]$ は x の整数部分を表す.

証明.

(i) (A.2.1) より明らか. (iii) 条件 (A.2.1), (A.2.2) より

$$\frac{I_{T_{2n}} - I_{T_{1n}}}{I} = \frac{a_2 - a_1 + o(1)}{I} \longrightarrow \frac{a_2 - a_1}{I} = D_R(T_{1n}, T_{2n}) \quad (n \longrightarrow \infty) \tag{2.1}$$

でありまた

$$(k_n - 1)I + a_2 + o(1) < nI + a_1 + o(1) \leq k_n I + a_2 + o(1)$$

であるから

$$\frac{a_2 - a_1}{I} - 1 + o(1) < n - k_n \le \frac{a_2 - a_1}{I} + o(1) \tag{2.2}$$

になる．従って

$$\frac{a_2 - a_1}{I} - 1 \le \lim_{n\to\infty}(n - k_n) \le \frac{a_2 - a_1}{I}$$

となり

$$D_R(T_{1n}, T_{2n}) - 1 \le D_{HL}(T_{1n}, T_{2n}) \le D_R(T_{1n}, T_{2n})$$

になる．$n - k_n$ は整数列であるから上記の結果を得る．(ii) は (2.2) より明らか． ■

例 2.1 $X_1, \ldots, X_n$ を正規分布 $N(\theta, 1)$ $(\theta \in \mathbf{R})$ からの大きさ n の無作為標本とする．但し $n \ge 2$ とする．このとき θ の推定量として

$$T_{1n} := \frac{1}{n+1}\{X_1 + \cdots + X_{n-1} + 2X_n\}\ , \qquad T_{2n} := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$$

を考えると，これらが θ の不偏推定量であることは明らかである．また θ の推定量 T_{1n} は正規分布 $N(\theta, (n+3)/(n+1)^2)$ に従い，推定量 T_{2n}は正規分布 $N(\theta, 1/n)$ に従うことがわかる．そして簡単な計算から

$$I(\theta) = 1\ ,\quad I_{T_{1n}}(\theta) = \frac{(n+1)^2}{n+3}\ ,\quad I_{T_{2n}}(\theta) = n$$

となり

$$D_R(T_{1n}, T_{2n}) = \lim_{n\to\infty}\left\{n - \frac{(n+1)^2}{n+3}\right\} = 1$$

となる．さらに

$$\frac{I_{T_{1n}}(\theta)}{n} = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\ ,\quad \frac{I_{T_{2n}}(\theta)}{n} = 1$$

となり，条件 (A.2.1) において $a_1 = -1, a_2 = 0$ になる．次に $k_n = n$ とおくと

$$n - 1 < n - 1 + \frac{4}{n+3} \le n$$

となるから条件 (A.2.2) を満たす．従って

$$D_{HL}(T_{1n}, T_{2n}) = \lim_{n\to\infty}(n - n) = 0$$

になる．

注意 2.1 この例の設定の下では，任意の $n \ge 2$ について T_{2n}は θ の一様最小分散不偏推定量であることが知られている．また T_{1n}も θ の不偏推定量であるから T_{2n}は T_{1n}より良い推定量となり，T_{2n}に対する T_{1n}の欠損量について $D_{HL}(T_{1n}, T_{2n}) = 0$ であるという事実は妥当性に欠ける．このことは条件 (A.2.2) に起因する．すなわち条件 (A.2.2) を満たす整数列 k_n をとることに無理があるので，これを次節で改善する．

3 確率化法による一般化欠損量

前節の条件 (A.2.2) は適当でないので k_n を実数列として, Hodges-Lehmann [HL70] のように確率化の方法を用いて, 次のような一般化欠損量を考える. まず $k_n \in \mathbf{R}$ について

$$\begin{aligned} \pi_n &:= k_n - [k_n] \quad (0 \le \pi_n < 1)\,, \\ K &:= \begin{cases} [k_n] & \text{with probability (w.p.) } 1-\pi_n\,, \\ [k_n]+1 & \text{with probabirity (w.p.) } \pi_n\,, \end{cases} \end{aligned}$$

とおくと

$$\begin{aligned} E[K] &= [k_n](1-\pi_n) + ([k_n]+1)\pi_n \\ &= [k_n] + \pi_n \\ &= k_n \end{aligned}$$

になる. さらに

$$\begin{aligned} T_{k_n} &:= \begin{cases} T_{[k_n]} & \text{w. p. } 1-\pi_n\,, \\ T_{[k_n]+1} & \text{w. p. } \pi_n\,, \end{cases} \\ I_{T_{k_n}} &:= (1-\pi_n) I_{T_{[k_n]}} + \pi_n I_{T_{[k_n]+1}} \end{aligned}$$

とおく.

定義 3.1 実数列 k_n を

$$I_{T_{2k_n}} = I_{T_{1n}} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

となるように選ぶ. このとき

$$\lim_{n\to\infty}(n-k_n)$$

が k_n の選び方によらず確定すればこの値を T_{2n}に対する T_{1n}の一般化欠損量といい $D^*_{HL}(T_{1n}, T_{2n})$ で表わす.

定理 3.1 条件 (A.2.1) の下で

$$D^*_{HL}(T_{1n}, T_{2n}) = D_R(T_{1n}, T_{2n}) = \frac{a_2(\theta) - a_1(\theta)}{I(\theta)}.$$

証明. まず

$$(1-\pi_n) I_{T_{2\,[k_n]}} + \pi_n I_{T_{2\,[k_n]+1}} = I_{T_{1n}} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$I_{T_{2\,[k_n]}} = [k_n] I + a_2 + o(1),$$

$$I_{T_{2\,[k_n]+1}} = ([k_n]+1) I + a_2 + o(1)$$

となるから

$$(1-\pi_n)\left\{[k_n] I + a_2 + o(1)\right\} + \pi_n \left\{([k_n]+1) I + a_2 + o(1)\right\} = nI + a_1 + o(1)$$

になる．また

$$k_n I + a_2 = nI + a_1 + o(1)$$

より

$$n - k_n = \frac{a_2 - a_1 + o(1)}{I} \longrightarrow \frac{a_2 - a_1}{I} \quad (n \longrightarrow \infty)$$

が成り立つ．従って (2.1) から結論が得られる． ■

例 2.1 (続) この場合, 条件 (A.2.1) において $a_1 = -1, a_2 = 0$ であるから定理 3.1 から T_{2n} に対する T_{1n} の一般化欠損量は

$$D^*_{HL}(T_{1n}, T_{2n}) = 1$$

となり, これは Rao 欠損量とも一致し, 妥当なものとなる．
例 3.1 $X_1, \dots, X_n$ を正規分布 $N(\theta, 1)$ からの大きさ n の無作為標本とする．但し, $n \geq 2$ とする．このとき, θ の不偏推定量として

$$T_{2n} := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j \ , \ T_{3n}^{(\alpha)} := \frac{1}{n}\{X_1 \ + \cdots + X_{n-2} + \alpha X_{n-1} + (2-\alpha)X_n\}$$

を考える．但し, α は $0 \leq \alpha \leq 2$ となる定数とする．推定量 $T_{2n}, T_{3n}^{(\alpha)}$ のそれぞれの Fisher 情報量は

$$I_{T_{2n}}(\theta) = n \ , \qquad I_{T_{3n}^{(\alpha)}}(\theta) = 1 \Big/ \{\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}(\alpha-1)^2\}$$

になる．このとき

$$I_{T_{3n}^{(\alpha)}}(\theta)/n = 1 - \frac{2}{n}(\alpha-1)^2 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

になるから, 定理 3.1 から T_{2n}に対する T_{3n}の一般化欠損量は

$$D^*_{HL}(T_{3n}^{(\alpha)}, T_{2n}) = 2(\alpha-1)^2$$

になる．

4 多項分布の母数推定における Rao の 2 次の漸近有効性と欠損性

この節では Rao [R61] に基づいて, 確率ベクトル $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$ が多項分布

$$M(n; \pi_1(\theta), \dots, \pi_k(\theta)) \quad (\theta \in \Theta \subset \mathbf{R})$$

に従っている場合に, 母数 θ の推定量の 2 次漸近効率と Rao 欠損量を求める．

定義 4.1 母数 θ の推定量 $\hat{\theta} := \hat{\theta}(\mathbf{X})$ が θ のある関数 $\alpha(\theta), \beta(\theta)$ があって

$$|n^{-1/2}\frac{\partial}{\partial\theta}\log L(\theta;\mathbf{X}) - \alpha(\theta) - \beta(\theta)n^{1/2}(\hat{\theta}-\theta)| \xrightarrow{p} 0 \quad (n \longrightarrow \infty) \tag{4.1}$$

を満たすとき, $\hat{\theta}$ は漸近的有効であるという. 但し$\xrightarrow{p}$ は確率収束を意味する.

定義 4.2 θ の推定量 $\hat{\theta}$ は (4.1) を満たすとする. このとき

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\log L(\theta;\mathbf{X}) - \alpha(\theta)n^{1/2} - n\beta(\theta)(\hat{\theta}-\theta) - \lambda n(\hat{\theta}-\theta)^2 \tag{4.2}$$

の漸近分散の λ に関する最小値を $E_2(\hat{\theta})$ で表わす. $E_2(\hat{\theta})$ の値が小さいほど $\hat{\theta}$ の 2 次の漸近効率が大きいと考えられる.

適当な正則条件の下では,

$$E_2(\hat{\theta}) = \lim_{n\to\infty}(nI(\theta) - I_{\hat{\theta}}(\theta)) \tag{4.3}$$

となること, すなわち $E_2(\hat{\theta})$ は $\hat{\theta}$ の漸近情報量損失になることが知られている ([R61]).

確率ベクトル $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_k)$ が多項分布

$$M(n;\pi_1(\theta), \ldots, \pi_k(\theta)) \quad (\theta \in \Theta \subset \mathbf{R})$$

に従っている, すなわち

$$P_\theta\{X_1 = x_1, \ldots, X_k = x_k\} = \frac{n!}{x_1!\cdots x_k!}\pi_1(\theta)^{x_1}\cdots\pi_k(\theta)^{x_k}$$

で, $x_1, \ldots, x_k$ は $\sum_{j=1}^k x_j = n$ を満たす非負の整数とする. このとき

$$p_r := \frac{X_r}{n} \quad (r = 1, \ldots, k)$$

とおいて, 与えられた方程式

$$g(\theta;\mathbf{p}) = g(\theta;p_1, \ldots, p_k) = 0 \tag{4.4}$$

の解 $\theta = \hat{\theta}(\mathbf{p})$ を θ の推定量とする. ここで次の条件を仮定する.

(A.4.1) 各 $r=1,\ldots,k$ について $\pi_r(\theta)$ はθ の真の値 θ_0 の近傍で 2 回連続微分可能で,

$$\pi_r'(\theta) := \frac{\partial}{\partial\theta}\pi_r(\theta)\ , \qquad \pi_r''(\theta) := \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\pi_r(\theta)$$

と表わす.

(A.4.2) 任意の $\theta \in \Theta$ に対して

$$g(\theta;\boldsymbol{\pi}(\theta)) = 0\ .$$

(A.4.3) $g(\theta;\mathbf{p})$ は $\theta, p_1, \ldots, p_k$ について 2 回連続偏微分可能で,

$$g'(\theta;\mathbf{p}) := \frac{\partial}{\partial\theta}g(\theta;\mathbf{p})\ , \qquad g_r(\theta;\mathbf{p}) := \frac{\partial}{\partial p_r}g(\theta;\mathbf{p})\ ,$$
$$g_{rs}(\theta;\mathbf{p}) := \frac{\partial^2}{\partial p_r \partial p_s}g(\theta;\mathbf{p})\ , \qquad g_r'(\theta;\mathbf{p}) := \frac{\partial^2}{\partial\theta\partial p_r}g(\theta;\mathbf{p})$$

と表わし, 任意の $\theta \in \Theta$ に対して $g'(\theta;\boldsymbol{\pi}(\theta)) \neq 0$ とする.

(A.4.4)

$$\boldsymbol{\pi} : \Theta \ni \theta \longmapsto \boldsymbol{\pi}(\theta) \in \Pi = \left\{(\pi_1,\ldots,\pi_k) : 0 < \pi_r < 1\ \ (r=1,\ldots,k), \sum_{r=1}^{k}\pi_r = 1\right\}$$

が全単射でかつ $\boldsymbol{\pi}^{-1}$ が Π で連続であるとする.

$\mathcal{M}$ を, 条件 (A.4.2),(A.4.3) を満たす g について得られる推定量の全体とし, 各 $i,j = 1,2,\ldots$ について

$$\mu_{ij}(\theta) := \sum_{r=1}^{k}\left(\frac{\pi_r'(\theta)}{\pi_r(\theta)}\right)^i \left(\frac{\pi_r''(\theta)}{\pi_r(\theta)}\right)^j \pi_r(\theta)$$

とおく.

注意 4.1 $\mathbf{U}_j = (U_{1j},\ldots,U_{kj})$, $(j=1,\ldots,n)$ は, 互いに独立に多項分布

$$M(1;\pi_1(\theta),\ldots,\pi_k(\theta))$$

に従う確率ベクトルとする. このとき $(\sum_{j=1}^n U_{1j},\ldots,\sum_{j=1}^n U_{kj})$ は多項分布

$$M(n;\pi_1(\theta),\ldots,\pi_k(\theta))$$

に従うから X_r と $\sum_{j=1}^n U_{rj}$ $(r=1,\ldots,k)$ は同一視できる. 従って, θ の尤度関数は

$$L(\theta;\mathbf{u}_j) = \frac{1}{u_{1j}!\cdots u_{kj}!}\pi_1(\theta)^{u_1}\cdots\pi_k(\theta)^{u_k}\ , \quad (j=1,\ldots,n)$$

となるから

$$I(\theta) = E\left[\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\log L(\theta;\mathbf{U}_1)\right\}^2\right] = E\left[\left\{\sum_{r=1}^{k} U_{r1}\left(\frac{\pi_r'(\theta)}{\pi_r(\theta)}\right)\right\}^2\right] = \mu_{20}(\theta)$$

を得る.

補題 4.1 ([R61]) 条件 (A.4.1) ~ (A.4.4) の下で

$$\hat{\theta}(\mathbf{p}) \longrightarrow \theta_0 \quad (n \longrightarrow \infty) \quad \text{w.p. } 1$$

を満たすような

$$g(\theta;\mathbf{p}) = 0$$

の解 $\theta = \hat{\theta}(\mathbf{p})$ が存在する. また各 $\theta \in \Theta$ に対して $\hat{\theta}$ が漸近的有効となるための必要十分条件は

$$\frac{g_r(\theta;\boldsymbol{\pi}(\theta))}{g'(\theta;\boldsymbol{\pi}(\theta))} + \frac{1}{I(\theta)}\left(\frac{\pi_r'(\theta)}{\pi_r(\theta)}\right) = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, k) \tag{4.5}$$

を満たすことである.

補題 4.2 ([R61]). 各 $r = r_1, r_2, r_3, r_4$ について

$$Y_r := n^{1/2}(p_r - \pi_r)$$

とするとき

$$\begin{aligned}
E[Y_{r_1}^4] &\approx 3V^2(Y_{r_1}) \\
E[Y_{r_1}^3 Y_{r_2}] &\approx 3V(Y_{r_1})\mathrm{Cov}(Y_{r_1}, Y_{r_2}) \\
E[Y_{r_1}^2 Y_{r_2}^2] &\approx V(Y_{r_1})V(Y_{r_2}) + 2\mathrm{Cov}^2(Y_{r_1}, Y_{r_2}) \\
E[Y_{r_1}^2 Y_{r_2} Y_{r_3}] &\approx V(Y_{r_1})\mathrm{Cov}(Y_{r_2}, Y_{r_3}) + 2\mathrm{Cov}(Y_{r_1}, Y_{r_2})\mathrm{Cov}(Y_{r_1}, Y_{r_3}) \\
E[Y_{r_1} Y_{r_2} Y_{r_3} Y_{r_4}] &\approx \mathrm{Cov}(Y_{r_1}, Y_{r_2})\mathrm{Cov}(Y_{r_3}, Y_{r_4}) + \mathrm{Cov}(Y_{r_1}, Y_{r_3})\mathrm{Cov}(Y_{r_2}, Y_{r_4}) \\
&\qquad + \mathrm{Cov}(Y_{r_1}, Y_{r_4})\mathrm{Cov}(Y_{r_2}, Y_{r_3})
\end{aligned}$$

が成り立つ.

これらのことから次のことが得られる.

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\log L(\theta) - nI(\theta)(\hat{\theta} - \theta) - \lambda n(\hat{\theta} - \theta)^2 \approx Q_n - Z_n W_n + \rho(\lambda) Z_n^2 \tag{4.6}$$

但し

$$
\begin{aligned}
Z_n &= n^{1/2}\sum_{r=1}^{k}(p_r-\pi_r)\left(\frac{\pi_r'}{\pi_r}\right), \quad W_n = n^{1/2}\sum_{r=1}^{k}a_r(p_r-\pi_r),\\
Q_n &= \frac{nI}{2g'(\theta_0;\boldsymbol{\pi}(\theta_0))}\sum_{r=1}^{k}\sum_{s=1}^{k}b_{rs}(\theta)(p_r-\pi_r)(p_s-\pi_s),\\
a_r &= \frac{1}{I}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\pi_r'}{\pi_r}\right) - G\left(\frac{\pi_r'}{\pi_r}\right), \quad G = \frac{1}{I^2}\sum_{t=1}^{k}\left(\frac{\pi_t'}{\pi_t}\right)\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\pi_t'}{\pi_t}\right)\pi_t,\\
b_{rs} &= g_{rs}(\theta;\boldsymbol{\pi}(\theta)) - \frac{2}{I}\left(\frac{\pi_r'}{\pi_r}\right)\sum_{t=1}^{k}g_{st}(\theta;\boldsymbol{\pi}(\theta))\left(\frac{\pi_t'}{\pi_t}\right)\pi_t,
\end{aligned}
$$

であり, $\rho(\lambda)$ は $(-\infty,\infty)$ の値を取り得る.

定理 4.1 ([R61]). 条件 (A.4.1) $\sim$ (A.4.4) の下で, 十分大きな n について

$$
\begin{aligned}
&V\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log L(\theta) - nI(\theta)(\hat{\theta}-\theta) - n\lambda(\hat{\theta}-\theta)^2\right)\\
&\approx V(Q) + V(\rho(\lambda)Z^2) + 2\mathrm{Cov}(Q,\rho(\lambda)Z^2) + V(ZW)\\
&= V(Z^2)\left\{\rho(\lambda) + \frac{\mathrm{Cov}(Q,Z^2)}{V(Z^2)}\right\}^2 + V(Q) - \frac{\mathrm{Cov}^2(Q,Z^2)}{V(Z^2)} + V(ZW) \quad (4.7)
\end{aligned}
$$

が成り立つ.

定理 4.2 ([R61]). 条件 $(A.4.1) \sim (A.4.4)$ を仮定する. このとき θ の推定量 $\hat{\theta}$ の 2 次の漸近情報量損失は

$$E_2(\hat{\theta}) = V(Q) - \frac{\mathrm{Cov}^2(Q,Z^2)}{V(Z^2)} + V(ZW)$$

であり, さらに

$$E_2(\hat{\theta}) \geq V(ZW)$$

が成り立つ.

注意 4.2 定理 4.2 より推定量 $\hat{\theta}$ の 2 次の漸近情報量損失において $V(ZW)$ は $\hat{\theta}$ に無関係になるから, 推定量を比較する場合には

$$\Delta := V(Q) - \frac{\mathrm{Cov}^2(Q,Z^2)}{V(Z^2)}$$

が重要な鍵になる.

次に Rao [R61] に従って, 比較的良く知られた θ の推定量による推定量の漸近情報量損失を求める. それらの推定量は下表のような θ の推定関数 $g(\theta;\mathbf{p})$ に対して, その推定方程式 $g(\theta;\mathbf{p})=0$ の θ の解として得られる.

推定量 $\hat{\theta}$	推定関数 $g(\theta;\mathbf{p})$
最尤推定量 $\hat{\theta}_{\mathrm{ml}}$	$\sum_{r=1}^{k} p_r(\pi'_r/\pi_r)$
最小カイ 2 乗推定量 $\hat{\theta}_{\mathrm{mcs}}$	$\sum_{r=1}^{k} \pi'_r(p_r^2/\pi_r^2)$
修正最小カイ 2 乗推定量 $\hat{\theta}_{\mathrm{mmcs}}$	$\sum_{r=1}^{k} \pi'_r(\pi_r/p_r)$
最小 Haldane 不一致度推定量 $\hat{\theta}_{\mathrm{HmD}_k}$	$\sum_{r=1}^{k} \pi'_r(\pi_r^k/p_r^k)$
最小 Hellinger 距離推定量 $\hat{\theta}_{\mathrm{mHd}}$	$\sum_{r=1}^{k} \pi'_r(p_r/\pi_r)^{1/2}$
最小 Kullback-Leibler 分離度推定量 $\hat{\theta}_{\mathrm{KL}}$	$\sum_{r=1}^{k} \pi'_r\log(\pi_r/p_r)$

表 4.1. 推定量と推定関数

定理 4.2 から表 4.1 の推定量 $\hat{\theta}$ の漸近情報量損失 $E_2(\hat{\theta})$ 及び Rao 欠損量は次の表のようになる.

推定量$\hat{\theta}$	$\hat{\theta}$の漸近情報量損失 $E_2(\hat{\theta})$	$\hat{\theta}_{\mathrm{ml}}$に対する$\hat{\theta}$の Rao 欠損量 $D_R(\hat{\theta},\hat{\theta}_{\mathrm{ml}})$
最尤推定量$\hat{\theta}_{\mathrm{ml}}$	$E_2(\hat{\theta}_{\mathrm{ml}})$	0
最小カイ 2 乗推定量$\hat{\theta}_{\mathrm{mcs}}$	$E_2(\hat{\theta}_{\mathrm{ml}})+\Delta$	Δ/I
修正最小カイ 2 乗推定量$\hat{\theta}_{\mathrm{mmcs}}$	$E_2(\hat{\theta}_{\mathrm{ml}})+4\Delta$	$4\Delta/I$
最小 Haldane 不一致度推定量$\hat{\theta}_{\mathrm{HmD}_k}$	$E_2(\hat{\theta}_{\mathrm{ml}})+(k+1)^2\Delta$	$(k+1)^2\Delta/I$
最小 Hellinger 距離推定量$\hat{\theta}_{\mathrm{mHd}}$	$E_2(\hat{\theta}_{\mathrm{ml}})+\Delta/4$	$\Delta/(4I)$
最小 Kullback-Leibler 分離度推定量$\hat{\theta}_{\mathrm{KL}}$	$E_2(\hat{\theta}_{\mathrm{ml}})+\Delta$	Δ/I

表 4.2. 推定量の漸近情報量損失と欠損量

ここで

$$\Delta=\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k}\left(\frac{\pi'_r}{\pi_r}\right)^2-\frac{\mu_{40}}{I}+\frac{\mu_{30}^2}{2I^2} \tag{4.8}$$

とする. また定理 4.2 から, 条件 (A.4.1) ~ (A.4.4) の下で, θ の最尤推定量が推定量のクラス $\mathcal{M}$ において一様最小 Rao 欠損量をもつことも分かる.

5 多項分布の母数の推定量の漸近分散欠損量

この節では Ponnapalli [P73] に従って前節と同じ推定問題における 推定量の漸近分散欠損量について述べ, その結果が前節のものと矛盾していることを指摘する. そして推定量に偏り補正を施すことによってその結果が前節の結果と一致することを示す.
母数空間を $\Theta=(a,b)$ ($|a|,|b|<\infty$) とし,

$$e_r(\theta):=p_r-\pi_r(\theta)\ ,\ D(\theta;\mathbf{p}):=\sum_{r=1}^{k}p_rf(\frac{\pi_r(\theta)}{p_r})$$

とおく. ここで $f,\boldsymbol{\pi}$ は以下の仮定を満たすものとする. このとき不一致度関数 $D(\theta;\mathbf{p})$ を最小にするような $\hat{\theta}_f(\mathbf{p})$ を θ の最小不一致度推定量 (minimum discrepancy estimator 略して m.d.e.) といい, 以下の仮定 5.1, 5.2 を満たす f について得られる m.d.e. の全体を $\mathcal{L}$ で表す. ここで次の仮定を設ける.

(A.5.1) 関数 f は $(0,\infty)$ で凸で 4 回微分可能である.

(A.5.2) $f_2 := f''(1) \neq 0$, $f_3 := f'''(1)$, $f_4 := f^{(4)}(1)$.

(A.5.3) $\pi_r(\theta)$ の 3 次導関数が任意の $\theta \in \Theta, r = 1,\ldots,k$ に対して存在し, $\pi_r'(\theta)$ がある区間で恒等的に 0 になることはない.

(A.5.4) 推定方程式

$$D'(\theta,\mathbf{p}) = \sum_{r=1}^{k} f'(\frac{\pi_r(\theta)}{p_r})\pi_r'(\theta) = 0$$

の解で, $D(\theta,\mathbf{p})$ を $[a,b]$ において最小にする $\theta = \hat{\theta}_f(\mathbf{p})$ が存在し, $\hat{\theta}_f(\mathbf{p})$ は p_r ($r = 1,\ldots,k$) に関して, 4 回偏微分可能である. また $\partial^4\hat{\theta}(\mathbf{p})/\partial p_r\partial p_s\partial p_t\partial p_u$ は $\boldsymbol{\pi}$ の近傍で有界である.

(A.5.5) $\mathcal{L}$ の任意の元 $\hat{\theta}_f(\mathbf{p})$ は Fisher 一致推定量, すなわち

$$\hat{\theta}_f(\boldsymbol{\pi}(\theta)) = \theta \ , \quad \forall\theta \in \Theta$$

とする.

また

$$c_f := 2 + \frac{f_3}{f_2} \ , \ \delta_{ij} := \begin{cases} 0 & (\ i \neq j\ )\ , \\ 1 & (\ i = j\ )\ , \end{cases}$$

$$a_r(\theta) := \left.\frac{\partial\hat{\theta}(\mathbf{p})}{\partial p_r}\right|_{\mathbf{p}=\boldsymbol{\pi}(\theta)} \ , \ b_{rs}(\theta) := \left.\frac{\partial^2\hat{\theta}(\mathbf{p})}{\partial p_r\partial p_s}\right|_{\mathbf{p}=\boldsymbol{\pi}(\theta)} \ , \ c_{rst}(\theta) := \left.\frac{\partial^3\hat{\theta}(\mathbf{p})}{\partial p_r\partial p_s\partial p_t}\right|_{\mathbf{p}=\boldsymbol{\pi}(\theta)}$$

とおく.

注意 5.1 最尤推定量 $\hat{\theta}_{\mathrm{ml}}$ は $f(x) = -\log x$ とすることにより得られ $f''(x) = 1/x^2$, $f'''(x) = -2/x^3$ となるから $c_{\mathrm{ml}} = 0$ となる. 同様に最小カイ 2 乗推定量 $\hat{\theta}_{\mathrm{mcs}}$ は $f(x) = 1/x$, $c_{\mathrm{mcs}} = -1$, 修正最小カイ 2 乗推定量 $\hat{\theta}_{\mathrm{mmcs}}$ は $f(x) = x^2$, $c_{\mathrm{mmcs}} = 2$, 最小 Haldane 不一致度推定量 $\hat{\theta}_{\mathrm{mHD}_k}$ は $f(x) = x^{k+1}$, $c_{\mathrm{mHD}_k} = k+1$, 最小 Hellinger 距離推定量 $\hat{\theta}_{\mathrm{mHd}}$ は $f(x) = -x^{1/2}$, $c_{\mathrm{mHd}} = 1/2$, 最小 Kullback-Leibler 分離度推定量 $\hat{\theta}_{\mathrm{KL}}$ は $f(x) = x\log x$, $c_{\mathrm{KL}} = 1$ となる.

次に θ の推定量 $\hat{\theta}_f(\mathbf{p})$ の漸近分散を求める. θ の推定量 $\hat{\theta}_f(\mathbf{p})$ $\left(\in \mathcal{L}\right)$ を $\mathbf{p} = \boldsymbol{\pi}(\theta)$ の周りで Taylor 展開すると

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_f(\mathbf{p}) &= \theta + \sum_{r=1}^{k} a_r e_r + \frac{1}{2!}\sum_{r=1}^{k}\sum_{s=1}^{k} b_{rs}e_r e_s + \frac{1}{3!}\sum_{r=1}^{k}\sum_{s=1}^{k}\sum_{t=1}^{k} c_{rst}e_r e_s e_t \\ &\quad + \frac{1}{4!}\sum_{r=1}^{k}\sum_{s=1}^{k}\sum_{t=1}^{k}\sum_{u=1}^{k} \left.\frac{\partial^4\hat{\theta}_f(\mathbf{p})}{\partial p_r\partial p_s\partial p_t\partial p_u}\right|_{\mathbf{p}=\boldsymbol{\pi}+\gamma\mathbf{e}} e_r e_s e_t e_u \end{aligned} \tag{5.1}$$

になる. 但し, γ は 確率変数で

$$0<\gamma<1 \quad \text{w.p.1.}$$

とする. このとき

$$|\gamma\mathbf{e}|=|\gamma||\mathbf{e}|\leq|\mathbf{e}|\longrightarrow 0 \quad \text{w.p.1}$$

であるから (A.5.4) より

$$\left.\frac{\partial^4\hat{\theta}_f(\mathbf{p})}{\partial p_r\partial p_s\partial p_t\partial p_u}\right|_{\mathbf{p}=\boldsymbol{\pi}+\gamma\mathbf{e}}$$

は確率 1 で n に関して有界である.

ここで, 注意 4.1 から次の関係を得る.

$$\begin{aligned}
E[e_r] &= 0,\\
E[e_re_s] &= \frac{1}{n^2}\sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n}E[(U_{rj_1}-\pi_r)(U_{sj_2}-\pi_s)]\\
&= \begin{cases}\dfrac{1}{n}\pi_r(1-\pi_r) & (\ r=s\ ),\\ -\dfrac{1}{n}\pi_r\pi_s & (\ r\neq s\ ),\end{cases}\\
E[e_re_se_t] &= \frac{1}{n^3}\sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n}\sum_{j_3=1}^{n}E[(U_{rj_1}-\pi_r)(U_{sj_2}-\pi_s)(U_{tj_3}-\pi_t)]\\
&= \begin{cases}\dfrac{1}{n^2}\pi_r(1-\pi_r)(1-2\pi_r) & (\ r=s=t\ ),\\ -\dfrac{1}{n^2}\pi_r(1-2\pi_r)\pi_s & (\ r=t\neq s\ ),\\ \dfrac{2}{n^2}\pi_r\pi_s\pi_t & (\ r\neq s\neq t\neq r\ ),\end{cases}\\
E[e_re_se_te_u] &= \frac{1}{n^4}\sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n}\sum_{j_3=1}^{n}\sum_{j_4=1}^{n}E[(U_{rj_1}-\pi_r)(U_{sj_2}-\pi_s)(U_{tj_3}-\pi_t)(U_{uj_4}-\pi_u)]\\
&= \frac{1}{n^4}\sum_{j=1}^{n}E[(U_{rj}-\pi_r)(U_{sj}-\pi_s)(U_{tj}-\pi_t)(U_{uj}-\pi_u)]\\
&\qquad +\frac{1}{n^4}\sum\sum_{j_1\neq j_2}^{n}E[(U_{rj_1}-\pi_r)(U_{sj_1}-\pi_s)]E[(U_{tj_2}-\pi_t)(U_{uj_2}-\pi_u)]\\
&\qquad +\frac{1}{n^4}\sum\sum_{j_1\neq j_2}^{n}E[(U_{rj_1}-\pi_r)(U_{tj_1}-\pi_t)]E[(U_{sj_2}-\pi_s)(U_{uj_2}-\pi_u)]\\
&\qquad +\frac{1}{n^4}\sum\sum_{j_1\neq j_2}^{n}E[(U_{rj_1}-\pi_r)(U_{uj_1}-\pi_u)]E[(U_{sj_2}-\pi_s)(U_{tj_2}-\pi_t)]\\
&= \mathrm{Cov}(e_r,e_s)\mathrm{Cov}(e_t,e_u)+\mathrm{Cov}(e_r,e_t)\mathrm{Cov}(e_s,e_u)\\
&\qquad +\mathrm{Cov}(e_r,e_u)\mathrm{Cov}(e_s,e_t)+O\left(\frac{1}{n^3}\right)
\end{aligned}$$

補題 5.1 [P73]. 次の条件

$$l := l_r + \cdots + l_s \geq 5$$

が成り立てば

$$E[e_r^{l_r} \cdots e_s^{l_s}] = O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

である.

そこで (5.1) と 補題 5.1 より

$$\begin{aligned}
E[(\hat{\theta}_f(\mathbf{p}) - \theta)^2] &= E[(\sum_{r=1}^{k} a_r e_r)^2] + E[(\sum_{r=1}^{k} a_r e_r)(\sum_{r=1}^{k}\sum_{s=1}^{k} b_{rs} e_r e_s)] \\
&\quad + \frac{1}{4} E[(\sum_{r=1}^{k}\sum_{s=1}^{k} b_{rs} e_r e_s)^2] + \frac{1}{3} E[(\sum_{r=1}^{k} a_r e_r)(\sum_{r=1}^{k}\sum_{s=1}^{k}\sum_{t=1}^{k} c_{rst} e_r e_s e_t)] \\
&\quad + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \qquad (5.2)
\end{aligned}$$

となる. 同様に

$$\begin{aligned}
E[\hat{\theta}_f(\mathbf{p}) - \theta] &= E[\sum_{r=1}^{k} a_r e_r] + \frac{1}{2!} E[\sum_{r=1}^{k}\sum_{s=1}^{k} b_{rs} e_r e_s] + \frac{1}{3!} E[\sum_{r=1}^{k}\sum_{s=1}^{k}\sum_{t=1}^{k} c_{rst} e_r e_s e_t] \\
&\quad + \frac{1}{4!} E[\sum_{r=1}^{k}\sum_{s=1}^{k}\sum_{t=1}^{k}\sum_{u=1}^{k} \frac{\partial^4 \hat{\theta}(\mathbf{p})}{\partial p_r \partial p_s \partial p_t \partial p_u}|_{\mathbf{p}=\boldsymbol{\pi}+\gamma\mathbf{e}} e_r e_s e_t e_u] \\
&= \frac{1}{2n} \sum_{r=1}^{k} b_{rr} \pi_r + O\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

であるから

$$\left(E[\hat{\theta}_f(\mathbf{p}) - \theta]\right)^2 = \frac{1}{4n^2} \left(\sum_{r=1}^{k} b_{rr} \pi_r\right)^2 + O\left(\frac{1}{n^3}\right) ,$$

となる.

次に a_r, b_{rs}, c_{rst} を別の形で表わす. $(A.5.4)$ より

$$\sum_{r=1}^{k} f'(\frac{\pi_r(\hat{\theta}_f(\mathbf{p}))}{p_r}) \pi'_r(\hat{\theta}_f(\mathbf{p})) = 0 \qquad (5.3)$$

の両辺を p_s で偏微分すると

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \hat{\theta}(\mathbf{p})}{\partial p_s} \sum_{r=1}^{k} f''(\frac{\pi_r(\hat{\theta}_f(\mathbf{p}))}{p_r}) \frac{\pi_r'^2(\hat{\theta}_f(\mathbf{p}))}{p_r} - \frac{1}{p_s^2} f''(\frac{\pi_s(\hat{\theta}_f(\mathbf{p}))}{p_s}) \pi_s(\hat{\theta}_f(\mathbf{p})) \pi'_s(\hat{\theta}_f(\mathbf{p})) \\
&\quad + \frac{\partial \hat{\theta}(\mathbf{p})}{\partial p_s} \sum_{r=1}^{k} f'(\frac{\pi_r(\hat{\theta}_f(\mathbf{p}))}{p_r}) \pi''_r(\hat{\theta}_f(\mathbf{p})) = 0 \qquad (5.4)
\end{aligned}$$

となり, (5.4) に $\mathbf{p}=\boldsymbol{\pi}$ を代入することにより

$$a_s=\frac{1}{I}\left(\frac{\pi_s'}{\pi_s}\right)\qquad (s=1,\ldots,k)$$

が得られる. また (5.4) の両辺を p_t で偏微分すると

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\hat\theta(\mathbf{p})}{\partial p_s}\frac{\partial\hat\theta(\mathbf{p})}{\partial p_t}\sum_{r=1}^{k}\frac{1}{n_r^2}f'''(\frac{\pi_r(\hat\theta(\mathbf{p}))}{p_r})\pi_r'^3(\hat\theta_f(\mathbf{p}))\\
&+2\frac{\partial\hat\theta(\mathbf{p})}{\partial p_s}\frac{\partial\hat\theta(\mathbf{p})}{\partial p_t}\sum_{r=1}^{k}f''(\frac{\pi_r(\hat\theta(\mathbf{p}))}{p_r})\pi_r'(\hat\theta_f(\mathbf{p}))\pi_r''(\hat\theta_f(\mathbf{p}))\\
&+\frac{\partial^2\hat\theta(\mathbf{p})}{\partial p_s\partial p_t}\sum_{r=1}^{k}f''(\frac{\pi_r(\hat\theta(\mathbf{p}))}{p_r})\pi_r'(\hat\theta_f(\mathbf{p}))^2-\frac{1}{p_s^2}\frac{\partial\hat\theta(\mathbf{p})}{\partial p_t}f''(\frac{\pi_s(\hat\theta(\mathbf{p}))}{p_s})\pi_s'^2(\hat\theta_f(\mathbf{p}))\\
&-\frac{1}{p_s^2}\frac{\partial\hat\theta(\mathbf{p})}{\partial p_t}f''(\frac{\pi_s(\hat\theta(\mathbf{p}))}{p_s})\pi_s(\hat\theta_f(\mathbf{p}))\pi_s''(\hat\theta_f(\mathbf{p}))-\frac{1}{p_s^3}\frac{\partial\hat\theta(\mathbf{p})}{\partial p_t}f'''(\frac{\pi_s(\hat\theta(\mathbf{p}))}{p_s})\pi_s(\hat\theta_f(\mathbf{p}))\pi_s'^2(\hat\theta_f(\mathbf{p}))\\
&+\frac{\partial^2\hat\theta(\mathbf{p})}{\partial p_s\partial p_t}\sum_{r=1}^{k}f'(\frac{\pi_r(\hat\theta(\mathbf{p}))}{p_r})\pi_r''(\hat\theta_f(\mathbf{p}))+\frac{\partial\hat\theta(\mathbf{p})}{\partial p_s}\frac{\partial\hat\theta(\mathbf{p})}{\partial p_t}\sum_{r=1}^{k}f'(\frac{\pi_r(\hat\theta(\mathbf{p}))}{p_r})\pi_r'''(\hat\theta_f(\mathbf{p}))\\
&+\frac{\partial\hat\theta(\mathbf{p})}{\partial p_s}\frac{\partial\hat\theta(\mathbf{p})}{\partial p_t}\sum_{r=1}^{k}\frac{1}{p_r}f''(\frac{\pi_r(\hat\theta(\mathbf{p}))}{p_r})\pi_r'(\hat\theta_f(\mathbf{p}))\pi_r''(\hat\theta_f(\mathbf{p}))\\
&-\frac{\partial\hat\theta(\mathbf{p})}{\partial p_s}\frac{1}{p_t^3}f'''(\frac{\pi_t(\hat\theta(\mathbf{p}))}{p_t})\pi_t(\hat\theta_f(\mathbf{p}))\pi_t'^2(\hat\theta_f(\mathbf{p}))\\
&-\frac{\partial\hat\theta(\mathbf{p})}{\partial p_s}\frac{1}{p_t^2}f''(\frac{\pi_t(\hat\theta(\mathbf{p}))}{p_t})\pi_t'^2(\hat\theta_f(\mathbf{p}))-\frac{\partial\hat\theta(\mathbf{p})}{\partial p_s}\frac{1}{p_t^2}f''(\frac{\pi_t(\hat\theta(\mathbf{p}))}{p_t})\pi_t(\hat\theta_f(\mathbf{p}))\pi_t''^2(\hat\theta_f(\mathbf{p}))\\
&+\frac{1}{p_t^4}f'''(\frac{\pi_t(\hat\theta(\mathbf{p}))}{p_t})\pi_t^2(\hat\theta_f(\mathbf{p}))\pi_t'(\hat\theta_f(\mathbf{p}))\delta_{st}\\
&+2\frac{1}{p_t^3}f''(\frac{\pi_t(\hat\theta(\mathbf{p}))}{p_t})\pi_t(\hat\theta_f(\mathbf{p}))\pi_t'(\hat\theta_f(\mathbf{p}))\delta_{st}=0
\end{aligned}\tag{5.5}$$

となり, (5.5) に $\mathbf{p}=\boldsymbol{\pi}$ を代入すると

$$\begin{aligned}
b_{st} &= \frac{1}{I^2}\left(\frac{\pi_t'}{\pi_t}\right)\left\{(c_f-1)\left(\frac{\pi_s'}{\pi_s}\right)^2+\left(\frac{\pi_s''}{\pi_s}\right)\right\}+\frac{1}{I^2}\left(\frac{\pi_s'}{\pi_s}\right)\left\{(c_f-1)\left(\frac{\pi_t'}{\pi_t}\right)^2+\left(\frac{\pi_t''}{\pi_t}\right)\right\}\\
&\quad -\frac{1}{I^3}\{3\mu_{11}+(c_f-2)\mu_{30}\}\left(\frac{\pi_s'}{\pi_s}\right)\left(\frac{\pi_t'}{\pi_t}\right)-\frac{c_f}{I}\left(\frac{\pi_t''}{\pi_t}\right)\delta_{st}
\end{aligned}$$

が得られる. 同様に (5.5) の両辺を p_u で偏微分して $\mathbf{p}=\boldsymbol{\pi}$ を代入することにより,

$$\begin{aligned}
c_{stu} &= -\frac{1}{I}\Bigg[3a_sa_ta_u\mu_{02}+4a_sa_ta_u\sum_{r=1}^{k}\left(\frac{\pi_r'}{\pi_r}\right)\left(\frac{\pi_r'''}{\pi_r}\right)\pi_r+3\mu_{11}(a_tb_{su}+a_sb_{tu}+a_ub_{st})\\
&\quad -3\left\{a_sa_t\left(\frac{\pi_u'}{\pi_u}\right)\left(\frac{\pi_u''}{\pi_u}\right)+a_ta_u\left(\frac{\pi_s'}{\pi_s}\right)\left(\frac{\pi_s''}{\pi_s}\right)+a_sa_u\left(\frac{\pi_t'}{\pi_t}\right)\left(\frac{\pi_t''}{\pi_t}\right)\right\}
\end{aligned}$$

$$-\left\{b_{st}\left(\frac{\pi_u'}{\pi_u}\right)^2+b_{su}\left(\frac{\pi_t'}{\pi_t}\right)^2+b_{tu}\left(\frac{\pi_s'}{\pi_s}\right)^2\right\}-\left\{b_{st}\left(\frac{\pi_u''}{\pi_u}\right)+b_{tu}\left(\frac{\pi_s''}{\pi_s}\right)+b_{su}\left(\frac{\pi_t''}{\pi_t}\right)\right\}$$
$$-3\left\{a_sa_t\left(\frac{\pi_u'}{\pi_u}\right)\left(\frac{\pi_u''}{\pi_u}\right)+a_ta_u\left(\frac{\pi_s'}{\pi_s}\right)\left(\frac{\pi_s''}{\pi_s}\right)+a_sa_u\left(\frac{\pi_t'}{\pi_t}\right)\left(\frac{\pi_t''}{\pi_t}\right)\right\}$$
$$-\left\{a_sa_t\left(\frac{\pi_u'''}{\pi_u}\right)+a_sa_u\left(\frac{\pi_t'''}{\pi_t}\right)+a_ta_u\left(\frac{\pi_s'''}{\pi_s}\right)\right\}+2\left\{a_s\frac{\pi_u''}{\pi_u^2}\delta_{tu}+a_t\frac{\pi_s''}{\pi_s^2}\delta_{us}+a_u\frac{\pi_t''}{\pi_t^2}\delta_{st}\right\}$$
$$+2\left\{a_s\left(\frac{\pi_t'}{\pi_t}\right)\frac{\pi_u'}{\pi_u^2}\delta_{tu}+a_t\left(\frac{\pi_u'}{\pi_u}\right)\frac{\pi_s'}{\pi_s^2}\delta_{us}+a_u\left(\frac{\pi_s'}{\pi_s}\right)\frac{\pi_t'}{\pi_t^2}\delta_{st}\right\}-6\frac{\pi_s'}{\pi_s^3}\delta_{st}\delta_{tu}\Bigg]$$
$$-\frac{1}{I}\frac{f_3}{f_2}\Bigg[6a_sa_ta_u\mu_{21}+\mu_{30}(a_sb_{tu}+a_tb_{us}+a_ub_{st})$$
$$-2\left\{a_sa_t\left(\frac{\pi_u'}{\pi_u}\right)^3+a_ta_u\left(\frac{\pi_s'}{\pi_s}\right)^3+a_ua_s\left(\frac{\pi_t'}{\pi_t}\right)^3\right\}$$
$$-3\left\{a_sa_t\left(\frac{\pi_u'}{\pi_u}\right)\left(\frac{\pi_u''}{\pi_u}\right)+a_ta_u\left(\frac{\pi_s'}{\pi_s}\right)\left(\frac{\pi_s''}{\pi_s}\right)+a_ua_s\left(\frac{\pi_t'}{\pi_t}\right)\left(\frac{\pi_t''}{\pi_t}\right)\right\}$$
$$-\left\{b_{st}\left(\frac{\pi_u'}{\pi_u}\right)^2+b_{tu}\left(\frac{\pi_s'}{\pi_s}\right)^2+b_{us}\left(\frac{\pi_t'}{\pi_t}\right)^2\right\}+\left\{a_s\frac{\pi_t''}{\pi_t^2}\delta_{tu}+a_t\frac{\pi_u''}{\pi_u^2}\delta_{us}+a_u\frac{\pi_s''}{\pi_s^2}\delta_{st}\right\}$$
$$+4\left\{a_s\frac{\pi_t'}{\pi_t^2}\left(\frac{\pi_u'}{\pi_u}\right)\delta_{tu}+a_t\frac{\pi_u'}{\pi_u^2}\left(\frac{\pi_s'}{\pi_s}\right)\delta_{us}+a_u\frac{\pi_s'}{\pi_s^2}\left(\frac{\pi_t'}{\pi_t}\right)\delta_{st}\right\}-6\frac{\pi_s'}{\pi_s^3}\Bigg]$$
$$-\frac{1}{I}\frac{f_4}{f_2}\left[\mu_{40}a_sa_ta_u-\left\{a_sa_t\left(\frac{\pi_u'}{\pi_u}\right)^3+a_ta_u\left(\frac{\pi_s'}{\pi_s}\right)^3+a_ua_s\left(\frac{\pi_t'}{\pi_t}\right)^3\right\}\right.$$
$$\left.\times\left\{a_s\frac{\pi_t'}{\pi_t^2}\left(\frac{\pi_u'}{\pi_u}\right)\delta_{tu}+a_t\frac{\pi_u'}{\pi_u^2}\left(\frac{\pi_s'}{\pi_s}\right)\delta_{us}+a_u\frac{\pi_s'}{\pi_s^2}\left(\frac{\pi_t'}{\pi_t}\right)\delta_{st}\right\}-\frac{\pi_s'}{\pi_s^3}\delta_{st}\delta_{tu}\right]$$

を得る．さらに次のことが成り立つ．

$$\sum_{r=1}^k a_r\pi_r=0\ ,\ \sum_{r=1}^k\sum_{s=1}^k b_{rs}\pi_r\pi_s=0\ ,\ \sum_{r=1}^k a_r^2\pi_r=\frac{1}{I}\ ,\ \sum_{r=1}^k a_r\pi_r'=1\ ,$$
$$\sum_{r=1}^k b_{rr}\pi_r=\frac{1}{I}(c_f\mu_{30}-\mu_{11})-\frac{c_f}{I}\sum_{r=1}^k\left(\frac{\pi_r'}{\pi_r}\right)\ ,\ \sum_{r=1}^k\sum_{s=1}^k\sum_{t=1}^k b_{rs}b_{rt}\pi_r\pi_s\pi_t=\frac{1}{I}\ ,$$
$$\sum_{r=1}^k a_rb_{rr}\pi_r=-\frac{c_f}{I^2}\sum_{r=1}^k\left(\frac{\pi_r'}{\pi_r}\right)^2+\frac{2}{I^3}\{\mu_{21}+(c_f-1)\mu_{40}\}-\frac{1}{I^4}\{(c_f-2)\mu_{30}^2+3\mu_{11}\mu_{30}\}\ ,$$
$$\sum_{r=1}^k\sum_{s=1}^k a_rb_{rs}\pi_r\pi_s=-\frac{1}{I}\ ,\ \sum_{r=1}^k\sum_{s=1}^k a_ra_sb_{rs}\pi_r\pi_s=-\frac{\mu_{11}}{I^3}\ ,\ \sum_{s=1}^k\sum_{t=1}^k\sum_{u=1}^k a_sc_{stu}\pi_s\pi_t\pi_u=\frac{2}{I}\ ,$$
$$\sum_{r=1}^k\sum_{s=1}^k a_rb_{rs}\left(\frac{\pi_s'}{\pi_s}\right)^2\pi_r\pi_s=\frac{1}{I^2}(\mu_{21}-\mu_{40})+\frac{1}{I^3}(\mu_{30}^2-2\mu_{11}\mu_{30})\ ,$$
$$\sum_{r=1}^k\sum_{s=1}^k b_{rs}^2\pi_r\pi_s=\frac{c_f^2}{I^2}\sum_{r=1}^k\left(\frac{\pi_r'}{\pi_r}\right)^2+\frac{2}{I^3}\{(1-c_f^2)\mu_{40}-2\mu_{21}+\mu_{02}\}$$

$$+\frac{1}{I^4}\{(c_f^2-2)\mu_{30}^2+4\mu_{11}\mu_{30}-\mu_{11}^2\}\ ,$$

$$\sum_{r=1}^{k}\sum_{s=1}^{k}a_r c_{rss}\pi_r\pi_s = -\frac{1}{I^2}\left\{c_f\sum_{r=1}^{k}\left(\frac{\pi_r'''}{\pi_r}\right)-2c_f\sum_{r=1}^{k}\left(\frac{\pi_r'}{\pi_r}\right)^2\right\}$$
$$+\frac{1}{I^3}\left\{-\mu_{21}+2\mu_{40}-\mu_{02}-\sum_{r=1}^{k}\left(\frac{\pi_r'}{\pi_r}\right)\left(\frac{\pi_r'''}{\pi_r}\right)\pi_r+3c_f\mu_{21}-4c_f\mu_{40}\right.$$
$$\left.+2c_f\mu_{11}\sum_{r=1}^{k}\left(\frac{\pi_r'}{\pi_r}\right)-c_f\mu_{30}\left(\frac{\pi_r'}{\pi_r}\right)\right\}$$
$$+\frac{1}{I^4}\{4\mu_{11}^2+\mu_{11}\mu_{30}-2\mu_{30}^2+3c_f\mu_{30}^2-4c_f\mu_{11}\mu_{30}\}\ .$$

以上のことから θ の推定量 $\hat{\theta}_f(\mathbf{p})$ の漸近分散は次のようになる.

$$\begin{aligned}
V(\hat{\theta}_f(\mathbf{p})) &= E[(\hat{\theta}_f(\mathbf{p})-\theta)^2]-\Big(E[\hat{\theta}_f(\mathbf{p})-\theta]\Big)^2\\
&= \frac{1}{nI}+\frac{1}{n^2}\left[-\frac{1}{I}+\frac{1}{2I^2}\left\{(c_f^2+2c_f)\sum_{r=1}^{k}\left(\frac{\pi_r'}{\pi_r}\right)^2-2c_f\sum_{r=1}^{k}\left(\frac{\pi_r''}{\pi_r}\right)\right\}\right.\\
&\quad +\frac{1}{I^3}\left\{-(c_f^2+2c_f-1)\mu_{40}+(3c_f-1)\mu_{21}\right.\\
&\quad \left.+2c_f\mu_{11}\sum_{r=1}^{k}\left(\frac{\pi_r'}{\pi_r}\right)-c_f\mu_{30}\sum_{r=1}^{k}\left(\frac{\pi_r'}{\pi_r}\right)-\sum_{r=1}^{k}\left(\frac{\pi_r'}{\pi_r}\right)\left(\frac{\pi_r'''}{\pi_r}\right)\pi_r\right\}\\
&\quad \left.+\frac{1}{2I^4}\{7\mu_{11}^2+(c_f^2+4c_f-2)\mu_{30}^2-8c_f\mu_{11}\mu_{30}\}\right]+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\ . \qquad (5.6)
\end{aligned}$$

さて, 一般に θ の漸近有効推定量 T_{1n}, T_{2n} の漸近分散をそれぞれ $V_\theta(T_{1n}), V_\theta(T_{2n})$ で表す. このとき

$$V_\theta(T_{2k_n})=V_\theta(T_{1n})+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

となるように正数の列 $\{k_n\}$ を選び, $\lim_{n\to\infty}(k_n-n)$ が存在してこれが k_n の選び方に無関係ならば, この値を T_{1n} に対する T_{2n} の漸近分散欠損量という. 各 $j=1,2$ に対して T_{jn} の漸近分散が

$$V_\theta(T_{jn})=\frac{1}{nI(\theta)}+\frac{\delta_j(\theta)}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

と展開されるとき, T_{1n} に対する T_{2n} の漸近分散欠損量は

$$\lim_{n\to\infty}(k_n-n)=I(\theta)\{\delta_2(\theta)-\delta_1(\theta)\}=:d(T_{2n},T_{1n})$$

になる. そこで, (5.6) から任意の $\hat{\theta}_f(\mathbf{p}), \hat{\theta}_g(\mathbf{p})$ ($\in\mathcal{L}$) の漸近分散は

$$V(\hat{\theta}_f(\mathbf{p}))=\frac{1}{nI}+\frac{\alpha_f}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\ ,\qquad V(\hat{\theta}_g(\mathbf{p}))=\frac{1}{nI}+\frac{\alpha_g}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

の形に表わされる. このとき上記のことから $\hat{\theta}_f$ に対する $\hat{\theta}_g$ の漸近分散欠損量を $d(\hat{\theta}_g, \hat{\theta}_f)$ で表すと

$$d(\hat{\theta}_g, \hat{\theta}_f) = I(\alpha_g - \alpha_f) \tag{5.7}$$

になる. また, 適当な仮定の下で Hodges-Lehmann 欠損量を一般化したものが漸近分散欠損量に一致することも示される.

補題 5.2 [P73]. 任意の $c_0 \in \mathbf{R}$ に対して $c_f = c_0$ となる 条件 (A.5.1), (A.5.2) を満たす f が存在する.

証明. (i) $c_0 < 0$ または $1 < c_0$ のとき $f(x) = x^{c_0}$, (ii) $0 < c_0 < 1$ のとき $f(x) = -x^{c_0}$, (iii) $c_0 = 0$ のとき $f(x) = -\log x$, (iv) $c_0 = 1$ のとき $f(x) = x \log x$ とすればよい. ■

補題 5.3 [P73]. 条件 (A.5.1) ~ (A.5.5) の下で $\hat{\theta}_f$ に対する $\hat{\theta}_g$ の漸近分散欠損量は

$$\begin{aligned} d(\hat{\theta}_g, \hat{\theta}_f) &= \frac{1}{2I}\left\{((c_g^2 - c_f^2) + 2(c_g - c_f))\sum_{r=1}^{k}\left(\frac{\pi_r'}{\pi_r}\right)^2 - 2(c_g - c_f)\sum_{r=1}^{k}\left(\frac{\pi_r''}{\pi_r}\right)\right\} \\ &\quad -\frac{1}{I^2}\left\{((c_g^2 - c_f^2) + 2(c_g - c_f))\mu_{40} - 2(c_g - c_f)\mu_{11}\sum_{r=1}^{k}\left(\frac{\pi_r'}{\pi_r}\right)\right. \\ &\quad \left. -3(c_g - c_f)\mu_{21} + (c_g - c_f)\mu_{30}\sum_{r=1}^{k}\left(\frac{\pi_r'}{\pi_r}\right)\right\} \\ &\quad +\frac{1}{2I^3}\{((c_g^2 - c_f^2) + 2(c_g - c_f))\mu_{30}^2 - 4(c_g - c_f)\mu_{11}\mu_{30}\} \end{aligned}$$

である. また $\hat{\theta}_f$ を $\hat{\theta}_{\mathrm{ml}}$ とすると $c_f = 0$ となり

$$d(\hat{\theta}_g, \hat{\theta}_{\mathrm{ml}}) = \frac{Q_1}{2I^3}c_g^2 + \frac{Q_2}{I^3}c_g$$

である. 但し

$$\begin{aligned} Q_1(\theta) &= \mu_{30}^2(\theta) - 2I(\theta)\mu_{40}(\theta) + I^2(\theta)\sum_{r=1}^{k}\left(\frac{\pi_r'(\theta)}{\pi_r(\theta)}\right)^2, \\ Q_2(\theta) &= 2\mu_{30}^2(\theta) - 2I(\theta)\mu_{40}(\theta) + I^2(\theta)\sum_{r=1}^{k}\left(\frac{\pi_r'(\theta)}{\pi_r(\theta)}\right)^2 \\ &\quad -4\mu_{11}(\theta)\mu_{30}(\theta) + 2I(\theta)\mu_{11}(\theta)\sum_{r=1}^{k}\left(\frac{\pi_r'(\theta)}{\pi_r(\theta)}\right) + 3I(\theta)\mu_{21}(\theta) \\ &\quad -\mu_{30}I(\theta)\sum_{r=1}^{k}\left(\frac{\pi_r'(\theta)}{\pi_r(\theta)}\right) - I^2(\theta)\sum_{r=1}^{k}\left(\frac{\pi_r''(\theta)}{\pi_r(\theta)}\right). \end{aligned}$$

補題 5.4 [P73]. 条件 (A.5.1) ~ (A.5.5) の下で, 任意の $\theta \in \Theta$ に対して

$$Q_1(\theta) \geq 0$$

であり, 任意の $\theta \in \Theta$ に対して等号が成り立つのは $k = 2$ のときに限る.

定理 5.1 [P73]. 条件 (A.5.1) ~ (A.5.5) の下で, θ の最尤推定量 $\hat{\theta}_{\mathrm{ml}}$ は $Q_2(\theta) \equiv 0$ のときに限り $\mathcal{L}$ において一様最小漸近分散欠損量をもち, θ の最小カイ 2 乗推定量 $\hat{\theta}_{\mathrm{mcs}}$ は $Q_3(\theta) := Q_2(\theta) - Q_1(\theta) \equiv 0$ のときに限り $\mathcal{L}$ において一様最小漸近分散欠損量をもつ.

証明. $Q_2(\theta) \equiv 0$ のとき, $\hat{\theta}_{\mathrm{ml}}$ に対する $\hat{\theta}_g$ の漸近分散欠損量は

$$d(\hat{\theta}_g, \hat{\theta}_{\mathrm{ml}}) = \frac{Q_1}{2I^3} c_g^2 \geq 0$$

となり, 最尤推定量が一様最小漸近分散欠損量をもつことが分かる. また $Q_2(\theta) \neq 0$ とすると

$$d\,(\hat{\theta}_g, \hat{\theta}_{\mathrm{ml}}) = \frac{Q_1}{2I^3}(c_g + \frac{Q_2}{Q_1})^2 - \frac{1}{2I^3}\frac{Q_2^2}{Q_1}$$

となり, ある c_g, θ に対して $d(\hat{\theta}_g, \hat{\theta}_{\mathrm{ml}}) < 0$ となる. つまり, 最尤推定量は一様最小漸近分散欠損量をもたない. $\hat{\theta}_{\mathrm{mcs}}$ についても同様に示される. ■

従って, $\mathcal{L}$ が $\mathcal{M}$ の部分集合であるから Ponnapalli [P73] の結果は最尤推定量が $\mathcal{M}$ において一様最小 Rao 欠損量をもつという Rao [R61] の結果 (表 4.2) に矛盾している.

例 5.1 $k = 3$ で $\pi_1(\theta) = \pi_2(\theta) = \theta$, $\pi_3(\theta) = 1 - 2\theta$ ($\Theta = (0, 1/2)$) の場合を考える. このとき

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}_{\mathrm{ml}} &= \frac{1}{2}(p_1 + p_2)\,, \\
\hat{\theta}_{\mathrm{mcs}} &= \left(2 + p_3\sqrt{\frac{2}{p_1^2 + p_2^2}}\right)^{-1}, \\
\hat{\theta}_{\mathrm{mmcs}} &= \left(2 + \frac{p_3}{2}\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}\right)\right)^{-1}, \\
\hat{\theta}_{\mathrm{HmD}_k} &= \left(2 + \frac{p_3}{2^{1/3}}\left(\frac{1}{p_1^3} + \frac{1}{p_2^3}\right)^{1/3}\right)^{-1}, \\
\hat{\theta}_{\mathrm{mHd}} &= \left(2 + \frac{4p_3}{(\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2})^2}\right)^{-1}, \\
\hat{\theta}_{\mathrm{KL}} &= \left(2 + \frac{p_3}{\sqrt{p_1 p_2}}\right)^{-1}
\end{aligned}$$

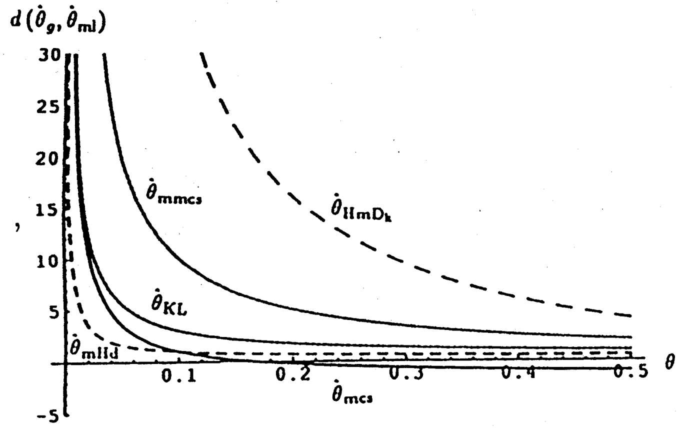

図 5.1

となり, また

$$Q_1(\theta) = \frac{4}{\theta^4(1 - 2\theta)^2}, \quad Q_2(\theta) = \frac{8}{\theta^3(1 - 2\theta)^3}$$

になるから, 補題 5.2 より $\hat{\theta}_{\mathrm{ml}}$ に対する $\hat{\theta}_g$ の漸近分散欠損量は

$$d\,(\hat{\theta}_g, \hat{\theta}_{\mathrm{ml}}) = \frac{1}{4\theta}\{c_g^2(1 - 2\theta) + 4c_g\theta\}$$

となる. これは, 非負とは限らないから Rao [R61] の結果に矛盾する.

6 多項母数の補正最尤推定量に対する補正最小不一致度推定量の漸近分散欠損量

この節では推定量に次数 $o(1/n)$ まで偏り補正した後で, 補正推定量の漸近分散欠損量について考察する ([TA95]). θ の推定量 $\hat{\theta}(\mathbf{p})$ ($\in \mathcal{L}$) の偏りは

$$E[\hat{\theta}(\mathbf{p})-\theta]=\frac{1}{n}\frac{1}{2I(\theta)^2}\left\{c\left(\mu_{30}(\theta)-I(\theta)\sum_{r=1}^{k}\left(\frac{\pi_r'(\theta)}{\pi_r(\theta)}\right)\right)-\mu_{11}(\theta)\right\}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

となるから, $\hat{\theta}(\mathbf{p})$ を $o(1/n)$ の次数まで偏り補正する. まず

$$\mu(\theta):=\frac{1}{2I(\theta)^2}\left\{c\left(\mu_{30}(\theta)-I(\theta)\sum_{r=1}^{k}\left(\frac{\pi_r'(\theta)}{\pi_r(\theta)}\right)\right)-\mu_{11}(\theta)\right\}$$

とおき, $\hat{\theta}(\mathbf{p})$ を補正した推定量

$$\hat{\theta}^*(\mathbf{p}):=\hat{\theta}(\mathbf{p})-\frac{1}{n}\mu(\hat{\theta}(\mathbf{p}))$$

とする. このとき次の仮定を設ける.

(A.6.1) $\mathcal{N}_0:=\left\{(p_1,\ldots,p_k)\ :\ 0\le p_r\le 1\ (r=1,\ldots,k)\ \ \sum_{r=1}^{k}p_r=1\right\}$,

$\hat{\Theta}_0:=\hat{\theta}(\mathcal{N}_0)$

とおいて, $\mu'(\theta)$ は $\bar{\hat{\Theta}}_0$ 上で連続である.

まず

$$\begin{aligned}nE[\hat{\theta}^*(\mathbf{p})-\theta] &= nE[\hat{\theta}(\mathbf{p})-\frac{1}{n}\mu(\hat{\theta}(\mathbf{p}))-\theta]\\ &= -E[\mu(\hat{\theta}(\mathbf{p}))-\mu(\theta)]\end{aligned}$$

となり,

$$\mathcal{N}_n:=\left\{(p_1,\ldots,p_k)\ :\ p_r=\frac{0}{n},\frac{1}{n},\cdots,\frac{n}{n}\ \ (r=1,\ldots,k)\ \ \sum_{r=1}^{k}p_r=1\right\}$$

とすると

$$\begin{aligned}\sup_{\mathbf{p}\in\mathcal{N}_n}|\mu(\hat{\theta}(\mathbf{p}))-\mu(\theta)| &\le \sup_{\mathbf{p}\in\mathcal{N}_0}|\mu(\hat{\theta}(\mathbf{p}))-\mu(\theta)|\\ &= \sup_{\theta'\in\bar{\hat{\Theta}}_0}|\mu(\theta')-\mu(\theta)|\\ &\le 2\sup_{\theta'\in\bar{\hat{\Theta}}_0}|\mu(\theta')|\end{aligned}$$

になる．このとき条件 (A.6.1) より $\mu(\theta)$ は $\bar{\bar{\Theta}}_0$ で連続で $\bar{\bar{\Theta}}_0$ は有界閉集合であるから $\mu(\theta)$ は有界となり有界収束定理より

$$\lim_{n\to\infty} E[\mu(\hat{\theta}(\mathbf{p}))-\mu(\theta)] = E[\lim_{n\to\infty}\{\mu(\hat{\theta}(\mathbf{p}))-\mu(\theta)\}] = 0$$

となる．従って

$$E[\hat{\theta}^*(\mathbf{p})-\theta] = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

になり $\hat{\theta}^*(\mathbf{p})$ は次数 $o(1/n)$ まで偏り補正されている．このとき $\hat{\theta}^*(\mathbf{p})$ を $\hat{\theta}(\mathbf{p})$ の補正推定量といい，$\mathcal{L}$ に属する推定量の補正推定量全体を $\mathcal{L}^*$ とする．

定理 6.1 条件 (A.5.1) ~ (A.5.5) および (A.6.1) の下で，$\hat{\theta}_f, \hat{\theta}_g \left(\in \mathcal{L}\right)$ の補正推定量 $\hat{\theta}^*_f, \hat{\theta}^*_g \left(\in \mathcal{L}^*\right)$ について，$\hat{\theta}^*_f(\mathbf{p})$ に対する $\hat{\theta}^*_g(\mathbf{p})$ の漸近分散欠損量は

$$d\left(\hat{\theta}^*_g, \hat{\theta}^*_f\right) = \frac{1}{2I^3}(c_g^2 - c_f^2)Q_1$$

である．但し，Q_1 は補題 5.2 で与えられたものとする．特に $\hat{\theta}^*_f = \hat{\theta}^*_{\mathrm{ml}}$ とすれば

$$d\left(\hat{\theta}^*_g, \hat{\theta}^*_{\mathrm{ml}}\right) = \frac{1}{2I^3}c_g^2 Q_1$$

であり，さらに $\hat{\theta}^*_{\mathrm{ml}}$ は $\mathcal{L}^*$ において一様最小漸近分散欠損量をもつ．

証明. $\hat{\theta}^*(\mathbf{p})$ は $\hat{\theta}(\mathbf{p})$ の補正推定量であるから，

$$\begin{aligned}
E[(\hat{\theta}^*(\mathbf{p})-\theta)^2] &= E[\{(\hat{\theta}(\mathbf{p})-\theta) - \frac{1}{n}(\mu(\hat{\theta}(\mathbf{p}))-\mu(\theta)) - \frac{1}{n}\mu(\theta)\}^2] \\
&= E[(\hat{\theta}(\mathbf{p})-\theta)^2] + \frac{1}{n^2}E[(\mu(\hat{\theta}(\mathbf{p}))-\mu(\theta))^2] + \frac{1}{n^2}\mu^2(\theta) \\
&\quad -\frac{2}{n}E[(\hat{\theta}(\mathbf{p})-\theta)(\mu(\hat{\theta}(\mathbf{p}))-\mu(\theta))] + \frac{2}{n^2}\mu(\theta)E[\mu(\hat{\theta}(\mathbf{p}))-\mu(\theta)] \\
&\quad -\frac{2}{n}\mu(\theta)E[\hat{\theta}(\mathbf{p})-\theta]
\end{aligned}$$

となる．先ほどと同様にして

$$E[(\mu(\hat{\theta}(\mathbf{p}))-\mu(\theta))^2] = o(1)$$

を得る．また

$$\begin{aligned}
&|n\{E[(\hat{\theta}(\mathbf{p})-\theta)(\mu(\hat{\theta}(\mathbf{p}))-\mu(\theta))] - \mu'(\theta)E[(\hat{\theta}(\mathbf{p})-\theta)^2]\}| \\
&\quad = |nE[(\hat{\theta}(\mathbf{p})-\theta)^2(\mu'(\theta+\eta(\hat{\theta}(\mathbf{p})-\theta))-\mu'(\theta))]| \\
&\quad \le n\{E[(\hat{\theta}(\mathbf{p})-\theta)^4]\}^{1/2}\{E[(\mu'(\theta+\eta(\hat{\theta}(\mathbf{p})-\theta))-\mu'(\theta))^2]\}^{1/2}
\end{aligned}$$

であり

$$E[(\hat{\theta}(\mathbf{p})-\theta)^4] = \frac{3}{n^2I^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

であるから

$$n\{E[(\hat{\theta}(\mathbf{p})-\theta)^4]\}^{1/2}=O(1)$$

になる. さらに

$$\begin{aligned}\sup_{\mathbf{p}\in\mathcal{N}_n}|\mu'(\theta+\eta(\hat{\theta}(\mathbf{p})-\theta))-\mu'(\theta)|^2 &\leq \sup_{\mathbf{p}\in\mathcal{N}_0}|\mu'(\theta+\eta(\hat{\theta}(\mathbf{p})-\theta))-\mu'(\theta)|^2\\ &= \sup_{\theta'\in\bar{\bar{\Theta}}_0}|\mu'(\theta+\eta(\theta'-\theta))-\mu'(\theta)|^2\\ &\leq 4\sup_{\theta'\in\bar{\bar{\Theta}}_0}|\mu'(\theta')|^2\end{aligned}$$

になる. 条件 (A.6.1) より $|\mu'(\theta')|^2$ は有界となるから

$$\lim_{n\to\infty}E[(\mu'(\theta+\eta(\hat{\theta}(\mathbf{p})-\theta))-\mu'(\theta))^2]=0$$

となり,

$$E[(\hat{\theta}(\mathbf{p})-\theta)(\mu(\hat{\theta}(\mathbf{p}))-\mu(\theta))]=\mu'(\theta)E[(\hat{\theta}(\mathbf{p})-\theta)^2]+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

を得る. 以上より

$$\begin{aligned}E[(\hat{\theta}^*(\mathbf{p})-\theta)^2] &= E[(\hat{\theta}(\mathbf{p})-\theta)^2]-\frac{1}{n^2}\mu^2(\theta)-\frac{2}{n^2}\frac{\mu'(\theta)}{I}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\ &= V(\hat{\theta}(\mathbf{p}))-\frac{2}{n^2}\frac{\mu'(\theta)}{I}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

を得る. 従って補正推定量 $\hat{\theta}_f^*$ に対する補正推定量 $\hat{\theta}_g^*$ の漸近分散欠損量は

$$\begin{aligned}d\,(\hat{\theta}_g^*,\hat{\theta}_f^*) &= d(\hat{\theta}_g,\hat{\theta}_f)-2\{\mu'(\theta)|_{c=c_g}-\mu'(\theta)|_{c=c_f}\}\\ &= d(\hat{\theta}_g,\hat{\theta}_f)-\frac{1}{I^3}(c_g-c_f)\Bigg\{(2\mu_{30}^2-4\mu_{11}\mu_{30})\\ &\quad +I\left(3\mu_{21}-2\mu_{40}+2\mu_{11}\sum_{r=1}^{k}\left(\frac{\pi_r'}{\pi_r}\right)-\mu_{30}\sum_{r=1}^{k}\left(\frac{\pi_r'}{\pi_r}\right)\right)\\ &\quad -I^2\left(\sum_{r=1}^{k}\left(\frac{\pi_r''}{\pi_r}\right)-\sum_{r=1}^{k}\left(\frac{\pi_r'}{\pi_r}\right)^2\right)\Bigg\}\\ &= d(\hat{\theta}_g,\hat{\theta}_f)-(c_g-c_f)Q_2\\ &= \frac{1}{2I^3}(c_g^2-c_f^2)\left\{\mu_{30}^2-2I\mu_{40}+I^2\sum_{r=1}^{k}\left(\frac{\pi_r'}{\pi_r}\right)^2\right\}\\ &= \frac{1}{2I^3}(c_g^2-c_f^2)Q_1\end{aligned}$$

になる. 特に $\hat{\theta}_f^*=\hat{\theta}_{\mathrm{ml}}^*$ とすると

$$d\,(\hat{\theta}_g^*,\hat{\theta}_{\mathrm{ml}}^*)=\frac{1}{2I^3}c_g^2Q_1$$

になり, 補題 5.4 より

$$d\,(\hat{\theta}_g^*,\hat{\theta}_{\mathrm{ml}}^*)\geq 0$$

となる. 従って $\hat{\theta}_{\mathrm{ml}}^*$ は $\mathcal{L}^*$ において一様最小漸近分散欠損量をもつ. ■

系 6.1 条件 (A.5.1) ~ (A.5.5) および (A.6.1) の下で, $\hat{\theta}^*_{\rm ml}$ に対する $\hat{\theta}^*_g$ の漸近分散欠損量 $d\,(\hat{\theta}^*_g, \hat{\theta}^*_{\rm ml})$ は次の表のように与えられる.

$\hat{\theta}^*_g$	c_g	$d\,(\hat{\theta}^*_g, \hat{\theta}^*_{\rm ml})$
$\hat{\theta}^*_{\rm mcs}$	-1	Δ/I
$\hat{\theta}^*_{\rm mmcs}$	2	$4\Delta/I$
$\hat{\theta}^*_{{\rm HmD}_k}$	$k+1$	$(k+1)^2\Delta/I$
$\hat{\theta}^*_{\rm mHd}$	$1/2$	$\Delta/(4I)$
$\hat{\theta}^*_{\rm KL}$	1	Δ/I

表 6.1. 推定量の漸近分散欠損量

但し, Δ は (4.8) で与えられたものとする. 証明は, 定理 6.1 より $d\,(\hat{\theta}^*_g, \hat{\theta}^*_{\rm ml}) = c_g^2\Delta/I$ となること, および $c_g = 2 + (g_1/g_2)$ と注意 5.1 から得られる.

系 6.1 からこれは Rao [R61] の結果 (表 4.2) と一致していることが分かる.

例 5.1 (続) 例 5.1 の場合に, 推定量に偏り補正を施すと図 5.1 は図 6.1 のようになり, 一様な結果が得られることがわかる.

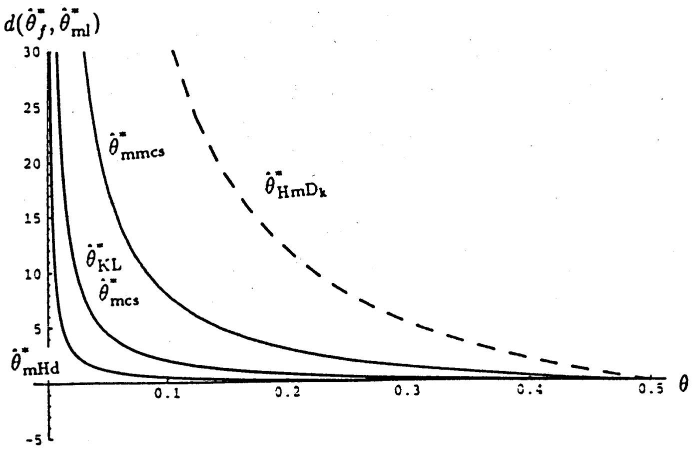

図 6.1

参考文献

[A94] 赤平昌文 (1994). Fisher 予想の解決と高次漸近理論の発展. 竹内·竹村 編「数理統計学の理論と応用」23 – 46, 東京大学出版会.

[F25] Fisher, R. A. (1925). Theory of statistical estimation. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **22**, 700 – 725.

[G94] Ghosh, J. K. (1994). *Higher Order Asymptotics.* NSF-CBMS Regional Conference Series Probab. and Statist., **4**, Inst. Math. Statist., Hayward, California.

[HL70] Hodges, J. L. and Lehmann, E. L. (1970). Deficiency. *Ann. Math. Statist.*, **41**, 783 – 801.

[L83] Lehmann, E. L. (1983). *Theory of Point Estimation.* Wiley, New York.

[P73] Ponnapalli, R. (1973). Deficiency of minimum discrepancy estimators. *Canad. J. Statist.*, **4**, 33 – 50.

[R61] Rao, C. R. (1961). Asymptotic efficiency and limiting information. *Proc. Fourth Berkeley Symp. Math. Statist. Probab.*, **1**, 531 – 546, Univ. California Press, Berkeley.

[RP75] Rao, M. S. and Ponnapalli, R. (1975). A note on deficiency. *Sankhyā.* Ser. A **37**, 301 – 302.

[TA95] Tanaka, H. and Akahira, M. (1995). Deficiency of minimum discrepancy estimators of multinomial parameters. *Mathematical Research Note* 95-007, Institute of Mathematics, University of Tsukuba.