数理解析研究所講究録
917巻 1995年 1-6

α-starlike functions of order β について

和歌山大学・教育　福井 誠一
(Seiichi FUKUI)

1.　準備

坂口は [3] で α-starlike functions を次のように定義した。

$f(z)=z+a_2z^2+\cdots\cdots$ を単位円板 $U=\{z\in U\ ;\ |z|<1\}$ 内で正則な関数とし（この関数の集合をAとする）

$$\mathrm{Re}\left\{\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)+\alpha\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}\geqq 0,\quad z\in U \tag{1}$$

を満たす関数を α-starlike と呼んだ。この関数の集合を $S(\alpha)$とする。坂口は [3] で次を示した。

<u>定理　A</u>.　$f(z)\in S(\alpha)$ に対し、 $\alpha=-1$ なら $f(z)\equiv z$, $-1<\alpha\leqq 0$ なら $f(z)\in K$, また $\alpha>0$ なら $f(z)\in S^*$ である。

ここに、KとS* は共にA内の単葉な部分族でそれぞれ凸型関数(convex function), 星型関数 (starlike function)の集合であり $K\subset S^*\subset A$ を満たす。 よって定理A は次のようにも書ける。

<u>定理　A′</u>. $\alpha\geqq -1$ なら $S(\alpha)\subset S^*$ で、 特に、$-1\leqq\alpha\leqq 0$ のとき $S(\alpha)\subset K$ となる。

(1) で $z=0$ と置けば分かるように、$1+\alpha\geqq 0$ 即ち $\alpha\geqq -1$ は必要な条件である。Mocanu は1969年に α-convex function を新しく定義し、Miller-Mocanu-Readeらは 1973年に上記の定理Aと関連した結果を得ている。α-convex function と α-starlike function とは密接な関係があるが、ここでは述べないでおく。

この報告では次のような若干一般化された関数族を導入してその性質を調べる。

<u>定義</u>.　$f(z)\in A$ に対して、$f(z)\in S(\alpha,\beta)$ であるとは、$1+\alpha>\beta$である任意の実数 αとβ に対して

$$\mathrm{Re}\left\{\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)+\alpha\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}>\beta,\quad z\in U \tag{2}$$

を満たすものとする。 この関数を α-starlike function of order β と呼ぶことにする。

$1+\alpha>\beta$ が必要な条件であることは前述と同様である。ここでは、等号を考えないことにする。（調和関数の最大値·最小値の原理を考えれば簡単に処理できるからである。）以下の議論では次の補題（福井［1］系1）が必要である。

<u>補題</u>. a を実数、n を自然数とし、$p(z)=a+p_nz^n+\cdots\cdots$ を U で正則とする。ある $z_0\in U$ が存在して、かつ $\mathrm{Re}\, p(z)>\gamma$, $|z|<|z_0|$, $\mathrm{Re}\, p(z_0)=\gamma$ が満たされれば、

$$\mathrm{Re}\frac{z_0\, p'(z_0)}{p(z_0)}\leqq\frac{n(\gamma-a)}{2\gamma}\qquad\left(a>\gamma\geqq\frac{a}{2}\geqq 0\right)\tag{3}$$

$$\mathrm{Re}\frac{z_0\, p'(z_0)}{p(z_0)}\leqq\frac{n\gamma}{2(\gamma-a)}\qquad\left(\frac{a}{2}\geqq\gamma\geqq 0\right)\tag{4}$$

が成立する。

2．　主定理と証明

$S^*(\gamma)$ を order γ の星型関数の集合とする。即ち、$f(z)\in S^*(\gamma)$ のとき、

$\mathrm{Re}\dfrac{zf'(z)}{f(z)}>\gamma$, $z\in U$ $(1>\gamma\geqq 0)$ を満たす。特に $S^*(0)=S^*$ とする。

このとき、$S(\alpha,\beta)\subset S^*(\gamma)$ となる条件を求める。

<u>定理　1</u>. $f(z)\in S(\alpha,\beta)$ に対して、$1+\alpha>\beta$ で

(i)　$1>\gamma\geqq\dfrac{1}{2}$ のとき、
$$(1+\alpha)\gamma+\frac{\gamma-1}{2\gamma}\leqq\beta,\tag{5}$$

(ii)　$\dfrac{1}{2}\geqq\gamma\geqq 0$ のとき、
$$(1+\alpha)\gamma+\frac{\gamma}{2(\gamma-1)}\leqq\beta\tag{6}$$

ならば、$f(z)\in S^*(\gamma)$、$z\in U$ となる。

<u>証明</u>. $W(z)=\left(1+\dfrac{zf''(z)}{f'(z)}\right)+\alpha\cdot\dfrac{zf'(z)}{f(z)}$, $p(z)=\dfrac{zf'(z)}{f(z)}$ とおくと

$p(z)=1+p_1z+\cdots\cdots$は U で正則で、$W(z)=p(z)+\dfrac{zp'(z)}{p(z)}+\alpha\cdot p(z)$

$=(1+\alpha)p(z)+\dfrac{zp'(z)}{p(z)}$ となる。　証明すべきことは、$\mathrm{Re}W(z)>\beta, z\in U$ ならば

$\mathrm{Re}\ p(z)>\gamma, z\in U, 1>\gamma\geqq 0$ となることである。 $p(0)=1>\gamma$ だから $z=0$ の近傍については定理の結論は成立している。 (5)または(6)の条件の下に $\mathrm{Re}\ p(z)>\gamma$, $z\in U$ を示せばよい。それには、ある $z_0\in U$ に対して $\mathrm{Re}\ p(z)>\gamma$, $|z|<|z_0|$ かつ $\mathrm{Re}\ p(z_0)=\gamma$ となれば、$\mathrm{Re}W(z)>\beta$, $z\in U$ に反することを示せばよい。 補題で $a=1$, $n=1$ とおき $1>\gamma\geqq\dfrac{1}{2}$ のとき、 $\mathrm{Re}W(z_0)\leqq(1+\alpha)\gamma+\dfrac{\gamma-1}{2\gamma}$ となり $(1+\alpha)\gamma+\dfrac{\gamma-1}{2\gamma}\leqq\beta$ が求める条件である。 $\dfrac{1}{2}\geqq\gamma\geqq 0$ についても同様にして求められる。□

この定理から、$S(\alpha,0)=S(\alpha)$ に注意すると坂口の結果 (定理Aまたは 定理A′) が得られる。

<u>系 1</u>. 定理A′ が成立する。

<u>証明</u>. 先ず、$\alpha>-1$ のとき $S(\alpha)\subset S^*$ となるのは次のようにして示す。(6)で $\gamma=0$ とおくと $\beta\geqq 0$ となり、$1+\alpha>\beta$ で $\beta=0$ とおく。 これより、

$$\mathrm{Re}\left\{\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)+\alpha\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}>0, \quad z\in U \tag{7}$$

ならば、$f(z)\in S^*(0)=S^*$, $z\in U$ が成立する。 次に、 $0\geqq\alpha>-1$ のときは、(5) または(6)で $\gamma=\dfrac{1}{2}$ とおくと、$\dfrac{\alpha}{2}\leqq\beta$、また $\beta=0$ とおけば $-1<\alpha\leqq 0$ を得 、このとき(7)が成立すれば $f(z)\in S^*(\dfrac{1}{2})$, $z\in U$ と成ることを示している。

一般には $K\subset S^*(\dfrac{1}{2})\subset S^*$ であるが、 $\mathrm{Re}\dfrac{zf'(z)}{f(z)}>0$ と (7) から

$$\mathrm{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)>(-\alpha)\cdot\mathrm{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)}>0, \quad z\in U$$

となり $f(z)\in K$ が示された。

$\alpha=-1$ のときはもとに戻って証明する。 即ち、$f(z)\in S(\alpha)$、$\alpha=-1$ なら (7) より $\mathrm{Re}\left(1+\dfrac{zf''(z)}{f'(z)}\right)>\mathrm{Re}\dfrac{zf'(z)}{f(z)}$, $z\in U$ が成立している。 これは $p(z)=$

$\dfrac{zf'(z)}{f(z)}$ とおけば、 $\mathrm{Re}\,\dfrac{zp'(z)}{p(z)}>0$, $z\in U$ となる。この条件のもとに補題を使って $\mathrm{Re}\,p(z)>0$, $z\in U$ を示せばよい。 □

さらに、定理の応用として次の坂口－福井 ([4] Theorem 3)の結果が得られる。

系 2. $f(z)\in A$ に対して、

$$\mathrm{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}-\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)>-\lambda,\quad z\in U \tag{8}$$

が成立しているとする。このとき、

(i) $\lambda=\dfrac{1}{2}$ ならば $f(z)\in K\subset S^*$ で、

(ii) $\lambda>\dfrac{1}{2}$ ならば 一般には $f(z)\in S^*$

であるとは限らない。

証明. $\lambda>0$ に注意する。 定理 1 で、$1+\alpha>\beta=-\lambda$ で $\alpha=-1$ とおく。(5) で、$\lambda=\dfrac{1}{2}$ 即ち、$\beta=-\dfrac{1}{2}$ とおくと、$\dfrac{\gamma-1}{2\gamma}\leqq-\dfrac{1}{2}$ と $1>\gamma\geqq\dfrac{1}{2}$ から $\gamma=\dfrac{1}{2}$ を得る。あるいは、(6) からでも $\gamma=\dfrac{1}{2}$ を得る。 これは、$\mathrm{Re}\left(1+\dfrac{zf''(z)}{f'(z)}-\dfrac{zf'(z)}{f(z)}\right)>-\dfrac{1}{2}$, $z\in U$ なら $\mathrm{Re}\,\dfrac{zf'(z)}{f(z)}>\dfrac{1}{2}$, $z\in U$ 即ち $f(z)\in S^*(\dfrac{1}{2})$ を示している。 同時に、$\mathrm{Re}\left(1+\dfrac{zf''(z)}{f'(z)}\right)>\mathrm{Re}\left(\dfrac{zf'(z)}{f(z)}-\dfrac{1}{2}\right)>0$, $z\in U$ 即ち $f(z)\in K$ を示している。 また、$\gamma>\dfrac{1}{2}$ のときは、凸型関数族K を含む関数ばかりではなく星型でない関数を少なくとも1つ含む関数族であることが分かる。 例えば、$p(z)=\dfrac{zf'(z)}{f(z)}=\dfrac{1}{(1-z)^{2\lambda}}$ となる関数をとればよい。□

さらに特別な場合として、よく知られた Marx-Strohhäcker の定理 ([2],[5]),即ち $K\subset S^*(\frac{1}{2})$ が得られる。定理1で $\alpha=0$ 、次に $\beta=0$ とおけば $\gamma=\frac{1}{2}$ を得る。

系 3. $f(z)\in A$ に対して $\mathrm{Re}\,(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)})>0$, $z\in U$ ならば、

$$\mathrm{Re}\,\frac{zf'(z)}{f(z)} > \frac{1}{2}\ , \quad z\in U$$ が成立する。

3. p-valently α-starlike functions of order β

$f(z)= z^p+a_{p+n}z^{p+n}+\cdots\cdots$ を U で正則な関数とし、この関数の集合を$A_p(n)$とする。 ここで、p と n は共に自然数とする。 $f(z)\in A_p(n)$ が α-starlike function of order β であるとは、

$$\mathrm{Re}\,\frac{zf'(z)}{f(z)} >\gamma,\quad z\in U \qquad (p>\gamma\geqq 0)$$

を満たすこと、と定義する。 この関数族を$S^*_p(\gamma)$ とおく。

$f(z)\in A_p(n)$ に対して、$P(z) = \frac{zf'(z)}{f(z)} = p+p_nz^n+\cdots\cdots$, $1+\frac{zf''(z)}{f'(z)} = p+q_nz^n+\cdots\cdots$ と展開できて、定理1と同様にして次の結果が得られる。

定理 2. $f(z)\in A_p(n)$ に対して、αを実数として (2) が成立すれば、即ち

$$\mathrm{Re}\,\{(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)})+\alpha\frac{zf'(z)}{f(z)}\} >\beta\ , \quad z\in U \tag{2}$$

ならば、$f(z)\in S^*_p(\gamma)$, $z\in U$. ただし、$(1+\alpha)p>\beta$ で

(i) $p>\gamma\geqq\frac{p}{2}>0$ のとき、 $$(1+\alpha)\gamma+\frac{n(\gamma-p)}{2\gamma}\leqq\beta \tag{9}$$

(ii) $\frac{p}{2}\geqq\gamma\geqq 0$ のとき、 $$(1+\alpha)\gamma+\frac{n\gamma}{2(\gamma-p)}\leqq\beta \tag{10}$$

を満たすものとする。

証明は定理１のときと同様にやればよいので省略する。また、αが複素数の場合は定理２で $(1+\alpha)\gamma$ の変わりに $\mathrm{Re}(1+\alpha)\gamma$ とすればそのまま成立する。

REFERENCES

[1] S. Fukui, Jackの補題とMiller-Mocanuの補題について、京都大学数理解析研究所講究録 881(1994)、1-8.

[2] A. Marx, Untersuchungen über schlichte Abbildungen, Math. Ann., (1932), 40-67.

[3] K. Sakaguchi, A note on p-valent functions, J. Math. Soc. Japan Vol. 14, (3)(1962) 312-321.

[4] K. Sakaguchi and S. Fukui, On alpha-starlike functions and related functions, Bull. Nara Univ. Educ., Vol. 28, (2)(Nat.), (1979), 5-12.

[5] E. Strohhäcker, Beiträge zur Theorie der schlichiten Functionen, Math. Z., 37 (1933), 356-380.