数理解析研究所講究録
917 巻 1995 年 84-88

負係数をもつ関数族について

日大薬学部　関根忠行 (Tadayuki Sekine)

単位円板 $U=\{z:|z|<1\}$ で正則で，次の形をした関数

(1) $$f(z)=z-\sum_{k=n+1}^{\infty}a_kz^k \quad (a_k\geq 0,\ n\in N)$$

からなる関数族を $A(n)$ で表す.
さらに, Uで単葉な関数からなる $A(n)$ の部分族を $T(n)$ で表す. 関数族 $A(n)$, $T(n)$ は, Chatterjea[1] によって導入された.
Chatterjea は $T(n)$ の部分族 $T_\alpha(n)$, $C_\alpha(n)$ を次のように定義した.

$$f(z)\in T_\alpha(n)\Longleftrightarrow \mathrm{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}>\alpha \quad (0\leq\alpha<1),$$

$$f(z)\in C_\alpha(n)\Longleftrightarrow \mathrm{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}>\alpha \quad (0\leq\alpha<1).$$

Chatterjea[1] は Silverman[4] とおなじ方法で, $f(z)$ が $T_\alpha(n)$, $C_\alpha(n)$ に属するための条件を求めた.

補助定理 1 (Chatterjea[1]) $A(n)$ に属する関数 $f(z)$ が $T_\alpha(n)$ に属するための必要十分条件は

(2) $$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{k-\alpha}{1-\alpha}a_k\leq 1$$

が成り立つことである.

補助定理 2 (Chatterjea[1]) $A(n)$ に属する関数 $f(z)$ が $C_\alpha(n)$ に属するための必要十分条件は

(3) $$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{k(k-\alpha)}{1-\alpha}a_k\leq 1$$

が成り立つことである.

Chatterjea[1] の結果 (補助定理 1，2) だけでなく, 負係数をもつ関数族の部分族は, 係数不等式によって特徴づけられている.
この理由により, $A(n)$ に属する関数で, 不等式

(4) $$\sum_{k=n+1}^{\infty}B_ka_k\leq 1 \quad (B_k>0,\ n\in N)$$

を満たすものからなる $A(n)$ の部分族を $A(n;\{B_k\})$ で表す.
$A(n;\{B_k\})$ を負係数をもつ関数族の一般化された部分族という.

注意 **1**　不等式 (4) より

(5) $$A(n;\{B_k\}) \subseteq A(n;\{C_n\}) \quad (0 < C_k \leq B_k)$$

が成立する.

負係数をもつ関数族を特徴づける係数不等式から, n, B_k を決定することによって, 負係数をもつ関数族を $A(n;\{B_k\})$ で表現することができる. たとえば, $T_\alpha(n)$, $C_\alpha(n)$ は補助定理 1, 2 から次のように表される.

(6) $$A\left(n;\left\{\frac{k-\alpha}{1-\alpha}\right\}\right) = T_\alpha(n),$$

(7) $$A\left(n;\left\{\frac{k(k-\alpha)}{1-\alpha}\right\}\right) = C_\alpha(n).$$

負係数をもつ関数族の一般化された部分族に属する関数について, 次の評価を得ている.

補助定理 **3 (Sekine[3],** 定理 2) $f(z)$ が $A(n;\{kB_k\})$ に属し, $B_k \leq B_{k+1}$ ならば,

(8) $$\mathrm{Max}\left\{0, 1-\frac{1}{B_{n+1}}|z|^n\right\} \leq |f'(z)| \leq 1+\frac{1}{B_{n+1}}|z|^n.$$

等号は

(9) $$f(z) = z - \frac{1}{(n+1)B_{n+1}}z^{n+1}$$

で定義される関数で成立する.

補助定理 **4 (Sekine[3],** 定理 3) $f(z)$ が $A(n;\{k^pB_k\})(2 \leq p \leq n+1))$ に属し, $B_k \leq B_{k+1}$ ならば,

(10) $$\left|f^{(j)}(z)\right| \leq \frac{\prod_{i=2}^{j}(n+i)}{(n+1)^{p-1}B_{n+1}}|z|^{n-j+1} \quad (2 \leq j \leq p).$$

任意階数での歪曲定理を求めるために, Fractional Calculus を導入する. Riemann-Liouville 積分にもとずく, Owa[2] による次の定義を利用する.

定義 1 (Owa[2]) $f(z)$ の, 階数が λ の *Fractional integral* を

$$D_z^{-\lambda} f(z) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^z \frac{f(\xi)}{(z-\xi)^{1-\lambda}} d\xi$$

で定義する. ただし, $\lambda > 0$ で, $f(z)$ は原点を含む複素平面の単連結な領域で正則とする. また, $(z-\xi)^{\lambda-1}$の多価性は, $(z-\xi) > 0$ のとき, $\log(z-\xi)$ は実数とすることによって取り除く.

定義 2 (Owa[2]) $f(z)$ の, 階数が λ の *Fractional derivative* を

$$D_z^{\lambda} f(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)} \cdot \frac{d}{dz} \int_0^z \frac{f(\xi)}{(z-\xi)^{\lambda}} d\xi$$

で定義する. ただし, $0 \leq \lambda < 1$ で, $f(z)$ は原点を含む複素平面の単連結な領域で正則とする. また, $(z-\xi)^{-\lambda}$ の多価性は, $(z-\xi) > 0$ のとき, $\log(z-\xi)$ は実数とすることによって取り除く.

定義 3 (Owa[2]) 定義 4.2 の仮定のもとで, $f(z)$ の, 階数 $(n+\lambda)$ での *Fractional derivative* を,

$$D_z^{n+\lambda} f(z) = \frac{d^n}{dz^n} D_z^{\lambda} f(z)$$

で定義する. ただし, $0 \leq \lambda < 1$, $n \in N_0 = \{0, 1, 2, \cdots\}$ とする.

これらの定義から次の結果を得ている.

補助定理 5 (Sekine[3], 定理 5) $f(z)$ が $A(n; \{kB_k\})$ に属し, $B_k \leq B_{k+1}$ならば,

$$\mathrm{Max}\left[0, \frac{|z|^{1-\lambda}}{\Gamma(2-\lambda)}\left\{1 - \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(2-\lambda)}{B_{n+1}\Gamma(n+2-\lambda)}|z|^n\right\}\right] \tag{11}$$

$$\leq \left|D_z^{\lambda} f(z)\right| \leq \frac{|z|^{1-\lambda}}{\Gamma(2-\lambda)}\left\{1 + \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(2-\lambda)}{B_{n+1}\Gamma(n+2-\lambda)}|z|^n\right\} \quad (0 \leq \lambda < 1)$$

が成り立つ.
等号は (9) 式で定義された関数で成立する.

補助定理 1 と補助定理 3 から, 次の結果を得ている.

補助定理 6 (Sekine[3], 定理 6) $f(z)$ が $A(n; \{k^2 B_k\})$ に属し, $B_k \leq B_{k+1}$ ならば

$$\left|D_z^{1+\lambda} f(z)\right| \leq \frac{|z|^{-\lambda}}{\Gamma(2-\lambda)}\left[(1+\lambda) + \frac{1}{B_{n+1}} \times \left\{1 + \frac{\lambda\Gamma(n+1)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(n+2-\lambda)}\right\}|z|^n\right] \quad (0 \leq \lambda < 1,\ 0 < |z| < 1) \tag{12}$$

が成り立つ.

補助定理４，５，６から次の定理を得た．

定理 **1** $f(z)$ が $A(n;\{k^3B_k\})$ に属し，$B_k \leq B_{k+1}$ ならば

$$\begin{aligned}(13)\qquad \left|D_z^{2+\lambda}f(z)\right| &\leq \frac{|z|^{-\lambda-1}}{\Gamma(2-\lambda)}\left[\lambda^2+3\lambda+\left\{\frac{n+2}{n+1}\right.\right.\\ &+ \left.\left.2\lambda+\frac{(\lambda^2+\lambda)\Gamma(n+1)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(n+2-\lambda)}\right\}\frac{|z|^n}{B_{n+1}}\right],\end{aligned}$$

$(0 \leq \lambda < 1,\ 0 < |z| < 1)$
が成り立つ．

証明　$\Psi(z)$ を $\Psi(z)=\Gamma(2-\lambda)z^\lambda D_z^\lambda f(z)$ で定義された関数とすると

$$\Psi(z)=z-\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\Gamma(k+1)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(k+1-\lambda)}a_kz^k.$$

一方

$$\begin{aligned}z^2\Psi''(z) &= \lambda(\lambda-1)\Gamma(2-\lambda)z^\lambda D_z^\lambda f(z)\\ &+ 2\lambda\Gamma(2-\lambda)z^{1+\lambda}D_z^{1+\lambda}f(z)+\Gamma(2-\lambda)z^{2+\lambda}D_z^{2+\lambda}f(z).\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}(14)\qquad z^{2+\lambda}D_z^{2+\lambda}f(z) &= \frac{z^2\Psi''(z)}{\Gamma(2-\lambda)}\\ &- \lambda(\lambda-1)z^\lambda D_z^\lambda f(z)-2\lambda z^{1+\lambda}D_z^{1+\lambda}f(z).\end{aligned}$$

仮定より $f(z)\in A(n;\{k^3B_k\})$ だから，

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}k^2B_k\left\{\frac{\Gamma(k+1)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(k+1-\lambda)}\right\}a_k \leq \sum_{k=n+1}^{\infty}k^3B_ka_k \leq 1.$$

したがって，$\Psi(z)$ が $A(n;\{k^2B_k\})$ に属することに注意すると，補助定理２から

$$(15)\qquad |\Psi''(z)| \leq \frac{n+2}{(n+1)B_{n+1}}|z|^{n-1}.$$

$f(z)$ は 仮定から $A(n;\{k^3B_k\})$ に属しているで，(5) から，$f(z)$ は $A(n;\{kB_k\})$ に属している．
したがって，補助定理５の上側の評価

$$(16)\qquad \left|D_z^\lambda f(z)\right| \leq \frac{|z|^{1-\lambda}}{\Gamma(2-\lambda)}\left\{1+\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(2-\lambda)}{B_{n+1}\Gamma(n+2-\lambda)}|z|^n\right\}$$

が成り立つ．同様に，$f(z)$ は $A(n;\{k^2B_k\})$ に属するので，補助定理 6 における評価 (12) 式が成り立つ．
(14), (15), (16) と補助定理 6 の (12) 式から次式が得られる．

$$(17)\qquad \left|z^{2+\lambda}D_z^{2+\lambda}f(z)\right| \leq \frac{|z|}{\Gamma(2-\lambda)}\left[\lambda^2+3\lambda+\left\{\frac{n+2}{n+1}\right.\right. + 2\lambda+\left.\left.\frac{(\lambda^2+\lambda)\Gamma(n+1)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(n+2-\lambda)}\right\}\frac{|z|^n}{B_{n+1}}\right].$$

したがって，上の (17) 式より，$D_z^{2+\lambda}f(z)$ の評価 (13) 式が得られる．

References

[1] S. K. Chatterjea, On starlike functions, J. Pure Math. 1(1981), 23-26.

[2] S. Owa, On the distortion theorems I, Kyungpook Math. J. 18(1978), 53-59.

[3] T. Sekine, On new generalized classes of analytic functions with negative coefficients, Report Res. Inst. Sci. Tec. Nihon Univ. 35(1987), 1-26.

[4] H. Silverman, Univalent functions with negative coefficients, Proc. Amer. Math. Soc. 51(1975), 109-116.