数理解析研究所講究録
919巻 1995年 56-67

A Vanishing Theorem of Cohomology Groups of Local Systems

九大・数理学研究科 趙 康治(Koji Cho)

Introduction

この小論では題目にあるとおり、局所系の高次コホモロジー群の消滅についてのある十分条件を与える。まず底空間が1次元の場合について話を始める。

$\mathbb{P}^1$: 1次元複素射影空間

$U := \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, x, \infty\}$, 但し $x \neq 0, 1, \infty$ とする。

$\omega := \alpha \frac{dt}{t} + \beta \frac{dt}{t-1} + \gamma \frac{dt}{t-x}$, ここで $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, t は $\mathbb{C} = \mathbb{P}^1 - \{\infty\}$ の座標。

$\nabla := d + \omega$: ω から定まる flat connection

$L := L_\omega = \mathrm{Ker}(\nabla : \mathcal{O}_U \longrightarrow \Omega^1_U)$ は ∇ より定まる U 上の local system. 但, $\mathcal{O}_U$, Ω^1_U はそれぞれ U の構造層, 1-forms のなす層.

U は affine なので, $H^i(U, L) = 0$ $(i > 1)$ となる.

また, $\chi(U, L) := \dim H^0(U, L) - \dim H^1(U, L)$ とおくと,

$\chi(U, L) = \chi(U)$ $(= -2)$ ($\chi(U)$ は U の Euler 標数) となるので, $H^0(U, L) = 0$ ならば,

$\dim H^1(U,L)=2$ となる.

さて, いつ $H^0(U,L)=0$ となるか? 簡単な計算から分るように, α, β, γ のうち少なくともひとつが整数でないならば, $H^0(U,L)=0$ となる.

このとき, $H^1(U,L)$ の basis を見つけるのはたやすい. 実際,

K ; $\mathbb{P}^1$ の canonical line bundle,

D : $0, 1, x, \infty$ という 4 点からなる divisor とする.

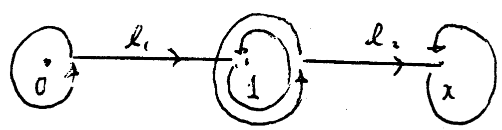
$H^1(U,L)\cong\Gamma(\mathbb{P}^1, K+D)/\mathbb{C}\cdot\omega$ という同型を使うと,

$$\Gamma(\mathbb{P}^1, K+D)=\mathbb{C}\left(\frac{dt}{t}-\frac{dt}{t-1}\right)+\mathbb{C}\left(\frac{dt}{t-1}-\frac{dt}{t-x}\right)+\mathbb{C}\,\frac{dt}{t}$$

より, $H^1(U,L)$ の basis の代表元が得られる.

さて, コホモロジー $H^1(U,L)$ があれば, ホモロジー $H_1(U,L^\vee)$ ($L^\vee$ は L の dual) を考えるのは当然であり, しかもこれらのペアリング (つまり積分) を考えるのも自然である.

$H_1(U,L^\vee)$ の basis を図示すると下図のようになる. 詳しくは, 吉田さんの論説を参照のこと.



さて $H^1(U,L)$ と $H_1(U,L^\vee)$ の pairing を考えよう.

$u:=t^\alpha(t-1)^\beta(t-x)^\gamma$ とすると $(d-\omega)u=0$ となる.

このとき，問題の pairing（積分）は次の形になる．（正確には 2×2 行列の $(1,1)$-成分であるが）

$$\int_0^1 u\left(\frac{dt}{t}-\frac{dt}{t-1}\right) = -\int_0^1 t^{\alpha-1}(t-1)^{\beta-1}(t-x)^{\gamma}dt.$$

右辺は，（定数倍を除いて）Gauss の超幾何函数の積分表示に他ならない．良く知られているように、Gauss の超幾何函数は2階の常微分方程式をみたす．$\dim H^1(U,L)=2$ を思い出すと，この数字の一致は偶然ではなく，実は $\dim H^1(U,L)$ と上に述べたように導かれる微分方程式のランクの間には密接な関係がある．このように消滅定理は超幾何函数論において重要である．

次章では，コホモロジーの消滅定理の喜多－野海による高次元版を述べる．

喜多－野海の消滅定理

Notation:

$u=(u_1,\dots,u_n)$

$P_j(u)$: 次数 l_j の多項式 $(1\le j\le m)$

$\bar{P}_j(u)$: P_j の最高次数の項

$$\omega := \sum_{j=1}^{m}\alpha_j\frac{dP_j}{P_j} \qquad (\alpha_1,\dots,\alpha_m\in\mathbb{C})$$

$\nabla := d+\omega$

D_j : P_j により定まる (reduced) effective divisor.

i.e. $D_j = \{ u \in \mathbb{C}^n \mid P_j(u) = 0 \}$

$U := \mathbb{C}^n \setminus \bigcup_{j=1}^{m} D_j$

$L := \mathrm{Ker}(\nabla : \mathcal{O}_U \to \Omega^1_U)$

$(d\bar{P}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{P}_{j_r}, \bar{P}_{j_1}, \ldots, \bar{P}_{j_r})$ を以下に述べるもので生成される

$\mathbb{C}[u_1, \cdots u_n]$ の ideal;

$\begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{P}_{j_1}}{\partial u_1}, \cdots, \frac{\partial \bar{P}_{j_1}}{\partial u_n} \\ \\ \frac{\partial \bar{P}_{j_r}}{\partial u_1}, \cdots, \frac{\partial \bar{P}_{j_r}}{\partial u_n} \end{pmatrix}$ の全ての $r \times r$ - 小行列式と $\bar{P}_{j_1} \cdots \bar{P}_{j_r}$

<u>定理 (喜多 − 野海)</u>

次の (1), (2), (3) を仮定しよう.

(1) $1 \leq {}^{\forall} r \leq \min(m, n-1)$, $1 \leq {}^{\forall} j_1 < \cdots < {}^{\forall} j_r \leq m$ に対して,

$\mathrm{height}(d\bar{P}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{P}_{j_r}, \bar{P}_{j_1}, \cdots, \bar{P}_{j_r}) \geq n$.

(2) $1 \leq {}^{\forall} s \leq \min(m, n)$, $1 \leq {}^{\forall} j_1 < \cdots < j_s \leq m$ に対して,

$\bar{P}_{j_1}, \cdots, \bar{P}_{j_s}$ は regular sequence.

(3) $\sum_{j=1}^{m} l_j \alpha_j \notin \mathbb{Z}$

このとき,

$H^i(U; \mathcal{L}) = 0 \quad (i \neq n)$

従って, $\dim H^n(U, \mathcal{L}) = (-1)^n \chi(U)$

ここでは, height, regular sequence の定義については述べませんが(興味ある人は可換環論の本を参照して下さい), 実は(1), (2)は後で述べるように幾何的に解釈出来る.

さて, この定理は大変重要であるが, 次のような重要な例には直接適用出来ない.

<u>Appell's F_4</u>

$$(*) \quad \iint u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} (1-u_1-u_2)^{\alpha_3} (u_1 u_2 - x_1 u_1 - x_2 u_2)^{\alpha_4} du_1 \wedge du_2$$

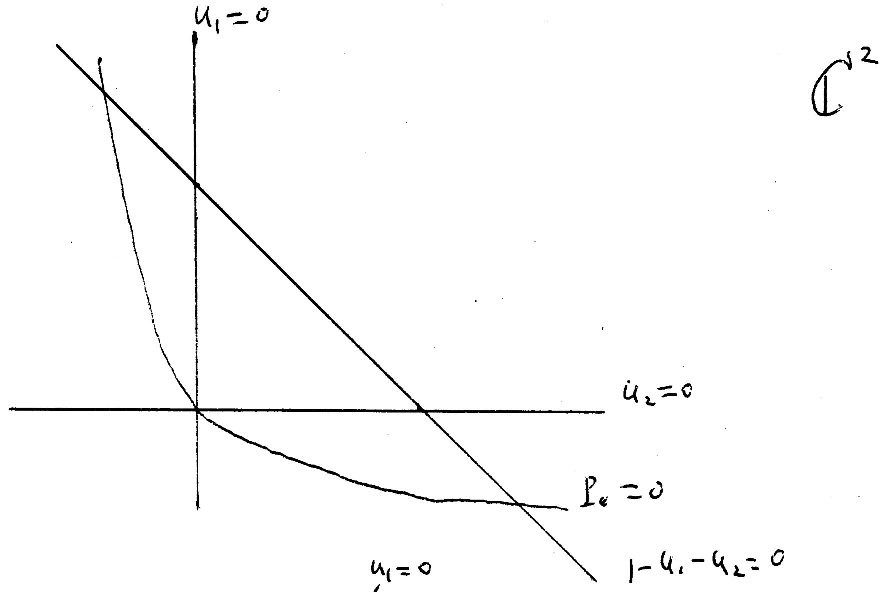
x_1, x_2 は一般.

$P_1 := u_1$

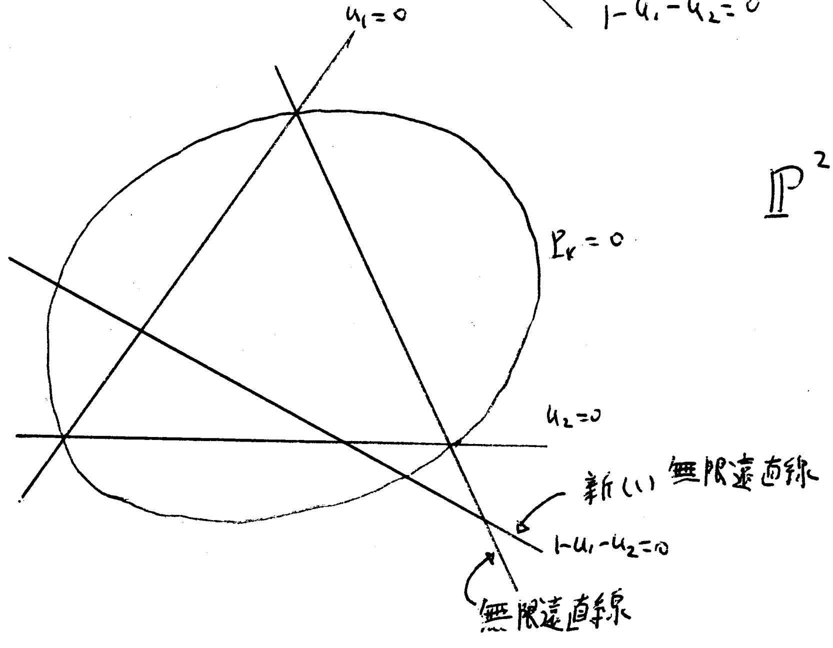
$P_2 := u_2$

$P_3 := 1-u_1-u_2$

$P_4 := u_1 u_2 - x_1 u_1 - x_2 u_2$ とおく.



$u_1=0$
$\mathbb{C}^2$
$u_2=0$
$P_\epsilon=0$
$1-u_1-u_2=0$



$u_1=0$
$\mathbb{P}^2$
$P_\epsilon=0$
$u_2=0$
新しい無限遠直線
$1-u_1-u_2=0$
無限遠直線

直ぐに分かるように，このとき定理の条件を満たしていない．しかし，金子譲一氏が次のようなうまい射影変換を考えた．

(☆) $v_1 := \dfrac{-u_1}{1-u_1-u_2}$, $v_2 := \dfrac{-u_2}{1-u_1-u_2}$

そうすると，(カ)は定数倍を除いて次の形になる．

(カ)′ $\displaystyle\iint \prod_{j=1}^{4} Q_j(v_1, v_2)^{\beta_j}\, dv_1 \wedge dv_2$

但し，

$Q_1 = v_1$, $Q_2 = v_2$, $Q_3 = 1 - v_1 - v_2$,

$Q_4 = x_1 v_1 + x_2 v_2 - x_1 v_1^2 + (1 - x_1 - x_2) v_1 v_2 - x_2 v_2^2$

$\beta_1 = \alpha_1$, $\beta_2 = \alpha_2$, $\beta_3 = -\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - 2\alpha_4 - 3$

$\beta_4 = \alpha_4$.

このとき Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 は定理の条件(1),(2)を満たすことがわかる．

従って $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + 2\beta_4 = -\alpha_3 - 3 \notin \mathbb{Z}$ ならば

$H^i(U, L) = 0$ $(i \neq 2)$, $H^2(U, L) = 4$ となる．

反省：何故元の形(カ)ではうまく定理が適用出来なかったのに，(☆)という射影変換をほどこすと定理が適用出来るようになったのだろうか？

射影変換(☆)をよく見ると，結局のところ，新しい座標では $1-u_1-u_2=0$ で定まる直線が無限遠直線になっている．さて，元の座標での無限遠直線と他の曲線の交わりを見ると正規交叉でない．一方新らたな無限遠直線と他の曲線の交わりは正規交叉である．実は，このことが新しい座標で考えると物事がうまくいった理由である．これに気がつけば，定理の条件(1)，(2)は次のように言い換えられることが直ぐ分かる．

(1)，(2)

$\Leftrightarrow$ $\overline{D}_j$; D_j の $\mathbb{P}^n$ における閉包

H_∞ ; $\mathbb{P}^n$ における無限遠超平面　とするとき

$\left(\bigcup_{j=1}^{m}\overline{D}_j\right)\cup H_\infty$ は H_∞ の近傍で正規交叉．

また条件(3)は　H_∞ における ω の留数が整数でないことが分かる．

このように定理の条件を解釈すれば，Appell's F_4 の場合でも図を見ることにより直ちに定理が応用出来る．また，これらの考察から次の定理を予想することは自然である．

主定理

Notation

M:　complex projective manifold of complex dimension n

D: effective reduced divisor on M

$D = \sum_{j=1}^{m} D_j$ ： Dの既約分解とする.

ωをM上の meromorphic 1-form で局所的には次のような形をしているもの；

D_jの定義方程式をf_jとし, $x \in M$において,

$f_{j_1}(x) = \cdots = f_{j_r}(x) = 0$, 他の$f_j$に対して, $f_j(x) \neq 0$となるとき,

$$\omega = \sum_{i=1}^{r} \alpha_{j_i} \frac{df_{j_i}}{f_{j_i}} + (\text{d-closed holomorphic 1-form})$$

$\nabla = d + \omega$, ($\nabla^2 = 0$に注意)

$U := M \setminus D$

$L := \mathrm{Ker}(\nabla : \mathcal{O}_U \to \Omega_U^1)$とする.

このとき, 次が成立する.

<u>定理</u>

ある$J \subset \{1, \ldots, m\}$が存在して,

(1) $D' := \sum_{j \in J} D_j$ はある effective ample divisor の台

(2) DはD'の近傍で正規交叉

(3) $\alpha_j \notin \mathbb{Z}$ for ${}^{\forall} j \in J$

を満たすならば,

$$H^i(U, L) = 0 \quad (i \neq n),$$

従って $H^n(U, L) = (-1)^n \chi(U)$.

ここでは証明については述べないが，key point は代数幾何で良く知られているSerreの消滅定理を使うことである．

因みにSerreの消滅定理とは；

M：n次元 projective variety

$\mathcal{L}$：ample line bundle on M

としたとき，任意のcoherent sheaf $\mathcal{M}$に対して，ある十分大きい$m>0$に対して，

$$H^i(M, \mathcal{M} \otimes \mathcal{L}^{\otimes m}) = 0 \quad \text{for } {}^\forall i > 0$$

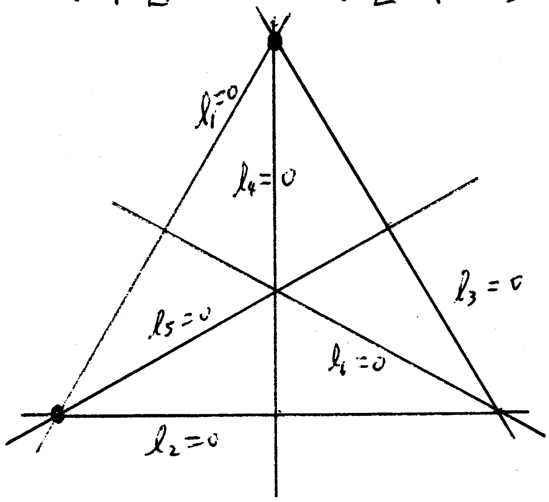
が成り立つことである．

エピローグ

主定理は実は[Aom]の結果を含むように拡張される．正確なstatementを述べるのを止め，例をひとつあげるのにとどめよう．

例

$\mathbb{P}^2$において下図のような直線の配置を考える.



各l_iは1次同次式で, $\alpha_1, \dots, \alpha_6 \in \mathbb{C}$で$\alpha_1+\cdots+\alpha_6=0$を満たすもの. $\omega := \sum_{j=1}^{6} \alpha_j \frac{dl_j}{l_j}$とすると$\omega$は$U := \mathbb{P}^2 - \bigcup_{i=1}^{6}\{l_j=0\}$上正則な1-form

もし, $\alpha_1 \notin \mathbb{Z}$, $\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4 \notin \mathbb{Z}$, $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_5 \notin \mathbb{Z}$

ならば

$$H^i(U, L) = 0 \qquad (i \neq 2)$$

となる. 但し, $L := \mathrm{Ker}(d+\omega \,;\, \mathcal{O}_U \to \Omega^1_U)$.

注意: この小論ではrank 1のlocal systemのコホモロジー群の消滅定理について述べたが, 喜多-野海の結果を始め主定理についても高いrankの場合についても同様の消滅定理が成立する.

参考分献

[Aom] K. Aomoto, Un théorème du type de Matsushima-Murakami concernant l'intégrale des fonctions multiformes, J. Math. Pures Appl. 52 (1973), 1−11

[A-K] 青本-喜多, 超幾何関数論, シュプリンガー現代数学シリーズ, シュプリンガー・フェアラーク東京

[K-N] M. Kita - M. Noumi, On the structure of cohomology groups attached to integrals of certain many valued analytic functions, Japan. J. Math. 9 (1983) 113 − 157

[Cho] K. Cho, A note on vanishing theorems of cohomology groups of local systems, preprint