数理解析研究所講究録
919巻 1995年 68-78

Singular vectors of Virasoro algebra in terms of Jack symmetric polynomials

九大数理　三町　勝久 (Katsuhisa Mimachi)
九大数理　山田　泰彦 (Yasuhiko Yamada)

1　Virasoro 代数の Fock 表現

まず、Virasoro 代数の Fock 表現の復習をする。$\mathbf{C}$ 上の無限次元リー環 $\mathcal{A}$ を、生成元 a_n $(n \in \mathbf{Z})$ と関係式

$$[a_n, a_m] = n\delta_{n+m,0},$$

で定義する。

Fock 空間 F_α $(\alpha \in \mathbf{C})$ を、つぎの関係式を満たす真空 vector $|\alpha\rangle$ で生成される自由左 $\mathcal{A}$-加群とする

$$a_n|\alpha\rangle = 0,\ (n > 0), \qquad a_0|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle.$$

$\alpha_0 \in \mathbf{C}$ をパラメータとして a_n の二次式で作られるつぎの作用素

$$L_n = \frac{1}{2}\sum_{m\in\mathbf{Z}} : a_{n-m}a_m : -\alpha_0(n+1)a_n,$$

を考える[1]。ここで、ノーマル積の記号 $: a_n a_m :$ は、$n > m$ のとき $a_m a_n$ を、$n \leq m$ のとき $a_n a_m$ をあらわす。計算により、次が確かめられる、

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \tfrac{c}{12}(n^3 - n)\delta_{n+m,0},$$
$$[L_n, a_m] = -ma_{n+m} - \alpha_0 n(n+1)\delta_{n+m,0},$$

ここに $c = 1 - 12\alpha_0{}^2$ とおいた。はじめの方の関係式は、Virasoro 代数の定義関係式にほかならない。また、

$$L_n|\alpha\rangle = 0,\ (n > 0), \qquad L_0|\alpha\rangle = h_\alpha|\alpha\rangle,$$

がなりたつ。ただし、$h_\alpha = \alpha^2/2 - \alpha_0\alpha$。

[1] Feigin-Fuchs, Dotsenko-Fateev, 古くは Chodos-Thorn (1974) など。このあたりを含めて物理の文献等は [2] 参照。

まとめると、2つのパラメータ α, α_0 をもつ、Virasoro 代数の最高ウエイト表現が得られたわけである。(Fock 表現)

以下では、α_0 のかわりに $\beta \in \mathbf{C}^*$ をパラメータとして

$$\alpha_0 = \frac{\beta}{2} - \frac{1}{\beta}, \qquad t = \frac{\beta^2}{2},$$

とする。このとき Virasoro の中心 c の値は、

$$c = 13 - 3(\beta^2 + \frac{4}{\beta^2}) = 13 - 6(t + \frac{1}{t}),$$

である。

問題はこの表現の構造を調べることである。特に、表現の既約性をみるために、つぎの式で定義される特異 vector (singular vector) を探すことがまず問題になる。

$$L_n|\chi\rangle = 0,\ (n > 0), \qquad L_0|\chi\rangle = (h_\alpha + N)|\alpha\rangle,$$

ここで N は非負整数で　特異 vector $|\chi\rangle$ の重みという。実は、Fock 表現の構造論は完全に調べられており、特に、特異 vector の存在については、次のことがわかっている。

定理。 非負整数の組 $r, s \in \mathbf{Z}_{>0}$ が存在して、パラメータ β と α が、関係式

$$\alpha = \alpha_{r,s} = (1 + r)\frac{\beta}{2} - (1 + s)\frac{1}{\beta},$$

に従うとき、しかもそのときのみ、特異 vector $|\chi_{r,s}\rangle$ が存在する。$|\chi_{r,s}\rangle$ は、スカラー倍を除いて一意的で、重みは $N = rs$ である。

我々が問題にしたいことは、この特異 vector $|\chi_{r,s}\rangle$ の具体形を決定することである。これは各重み N ごとに、有限次元の線形代数の問題であり、小さな N については、具体的に計算できる。

例題。$N = 2$ の場合。

$$|\chi\rangle = (xa_{-1}^2 + ya_{-2})|\alpha\rangle,$$

とおくと、

$$\begin{aligned} L_1|\chi\rangle &= 2[(\alpha - 2\alpha_0)x + y]|\alpha\rangle = 0, \\ L_2|\chi\rangle &= [x + 2(\alpha - 3\alpha_0)y]|\alpha\rangle = 0, \end{aligned}$$

を解くことになる。(一般に $L_3, L_4, \cdots$ の条件は L_1, L_2 から導かれるので、これで十分。) 非自明な解は、

$$\alpha = \alpha_{1,2} = \beta - \tfrac{3}{\beta}, \qquad (x, y) = (1, \tfrac{1}{\beta}),$$
$$\alpha = \alpha_{2,1} = \tfrac{3\beta}{2} - \tfrac{2}{\beta}, \qquad (x, y) = (1, -\tfrac{\beta}{2}),$$

となる。さらに、いくつか例をあげておくのが教育的であろう。ここでは、

$$\exp(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta a_{-n}}{n}z^n)=\sum_{m=0}^{\infty}e_m z^m.$$

で定義される $e_m\in \mathbf{C}[a_{-1},a_{-2},a_{-3},\cdots]$ $(m\geq 0)$ および、分割 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots)$ に対して $e_\lambda=e_{\lambda_1}e_{\lambda_2}\cdots$, という記号をもちいる。

$$\begin{aligned}
|\chi_{1,1}\rangle &= e_1|\alpha_{1,1}\rangle,\\
|\chi_{1,2}\rangle &= e_2|\alpha_{1,2}\rangle,\\
|\chi_{2,1}\rangle &= [e_{11}-\frac{2t}{t+1}e_2]|\alpha_{2,1}\rangle,\\
|\chi_{1,3}\rangle &= e_3|\alpha_{1,3}\rangle,\\
|\chi_{3,1}\rangle &= [e_{111}-\frac{6t}{2t+1}e_{21}+\frac{6t^2}{(2t+1)(t+1)}e_3]|\alpha_{3,1}\rangle,\\
|\chi_{1,4}\rangle &= e_4|\alpha_{1,4}\rangle,\\
|\chi_{2,2}\rangle &= [e_{22}-\frac{2t}{t+1}e_{31}+\frac{2t(t-1)}{(t+1)(t+2)}e_4]|\alpha_{2,2}\rangle,\\
|\chi_{4,1}\rangle &= [e_{1111}-\frac{12t}{3t+1}e_{211}+\frac{12t^2}{(2t+1)(3t+1)}e_{22}\\
&\quad+\frac{24t^2}{(2t+1)(3t+1)}e_{31}+\frac{24t^3}{(t+1)(2t+1)(3t+1)}e_4]|\alpha_{4,1}\rangle.
\end{aligned}$$

例をみていると、シューア多項式などの対称関数が連想される。実際 $t=1$ したがって $c=1$ の場合、特異 vector $|\chi_{r,s}\rangle$ が分割 $\lambda=(r,r,...,r)$ (r が s 個）に対するシューア多項式と本質的に一致することが [10] により知られている。だとすれば、$t=1$ 以外の場合にも、シューア多項式のある変形で特異 vector が表されると期待されるが、例から次の事実が見つかる。

観察。特異 vector $|\chi_{r,s}\rangle$ は　分割 $\lambda=\lambda_{r,s}=(r,r,...,r)$ (r が s 個）に対するジャック多項式である。

すなわち、ジャック多項式 $J_{\lambda_{r,s}}(x_1,\cdots,x_n)$ を基本対称多項式 $e_\lambda=e_{\lambda_1}e_{\lambda_2}\cdots$, $e_m=\sum_{i_1<\cdots<i_m}x_{i_1}\cdots x_{i_m}$ の基底で表示するとき、スカラー倍を除いて、特異 vector $|\chi_{r,s}\rangle$ の上の表示に一致する。

この事実は、Virasoro 代数とジャック多項式という、一見無関係なものを結び付ける関係として興味深いが、さらに重要なことは、上の事実を証明する課程で副産物として得られたジャック多項式の新しい積分表示であり、つぎにこれについてのべる。

2 ジャック多項式の積分表示

前節で引用した特異 vector の存在定理の一つの証明は、いわゆる頂点作用素の積の積分から Virasoro 代数の Intertwiner を構成することによりなされる。詳しくは、例えば、[8] を参照のこと。

その結果によれば、特異 vector $|\chi_{r,s}\rangle$ は、つぎの積分によって与えられる、

$$|\chi_{r,s}\rangle = \int_\Gamma dz_1\cdots dz_r \prod_{1\le i<j\le r}(z_i-z_j)^{2t}\prod_{i=1}^{r} z_i^{(1-r)t-(s+1)}\exp(\sum_{i=1}^{r}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta a_{-n}}{n}z_i^n)|\alpha_{r,s}\rangle.$$

ここで、サイクル Γ は、被積分関数の定める局所系に係数をもつ r 次元ホモロジーの元にとる。exp の中の無限和が気になるが、展開してしまえば z 達について総計 rs 次の項しか寄与しないので、実際は有限和である。この $|\chi_{r,s}\rangle$ は、L_n $(n>0)$ を作用させた結果がモジュロ境界項で消えるように作ってある。従って、上記のホモロジーの元 Γ で積分値の消えないものの存在は、特異 vector の存在と等価である。このサイクルの問題は [8] により詳しく調べられ、その結果が先に掲げた定理というわけである。

多価関数の多重積分というだけで、私[2]のような素人は、グルグル目が回ってしまう上に、この場合、関数の特異性が normal crossing でないという事情が加わって、単純な（これとて高次元では難解な）、twisted cycle （土管工事）のみで話が済まない。結局、吹いて膨らませて (blow up して) から kintamaization する [9] という、成熟した大人の技法を必要とする。我々は以下で、ジャック多項式の積分表示を考察する際、その非自明性に関しては、全く [8] の次の結果を借用する。

定理。 [8] t が generic すなわち、$d(d+1)t$, $d(r-d)t$, $(d=1,\cdots,r-1)$ がすべて整数でないとき、上記のようなサイクルで、積分値が対応する Selberg 積分（の解析接続）に一致するものが存在する。

例。 $(r,s)=(2,1)$ の場合。前節の記号 $e_{11}=\beta^2a_{-1}^2$ $e_2=(\beta^2a_{-1}^2+\beta a_{-2})/2$ を使って、

$$|\chi_{2,1}\rangle = \int_\Gamma dz_1dz_2(z_1-z_2)^{2t}\prod_{i=1}^{2} z_i^{-t-2}(e_{11}z_1z_2+e_2({z_1}^2+{z_2}^2))|\alpha_{2,1}\rangle.$$

$z_2=uz_1$ と変換し、z_1 について $z_1=0$ での留数をとると、

$$|\chi_{2,1}\rangle = \int_{\Gamma'} du(1-u)^{2t}u^{-t-2}(e_{11}u+e_2(1+u^2))|\alpha_{2,1}\rangle.$$

ここで、$2t$ が整数でないとすれば、残ったサイクルを図のように

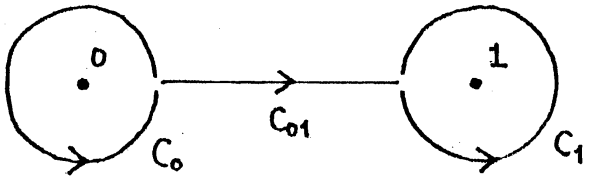
$$\Gamma' = -\frac{C_0}{e^{2\pi it}-1}+C_{01}+\frac{C_1}{e^{-4\pi it}-1},$$

[2] 以下、本稿では、我々＝{私、共同研究者}、私＝山田、共同研究者＝三町、の定義にしたがう。

と取ることができて (twisted cycle または、regularized cycle) 、結局

$$|\chi_{2,1}\rangle = \Gamma(2t+1)\left[\frac{\Gamma(-t)}{\Gamma(t+1)}e_{11} + \left\{\frac{\Gamma(-t-1)}{\Gamma(t)} + \frac{\Gamma(-t+1)}{\Gamma(t+2)}\right\}e_2\right]|\alpha_{2,1}\rangle.$$

を得る。見かけは派手だが、もちろんスカラー倍で前の例に一致する。

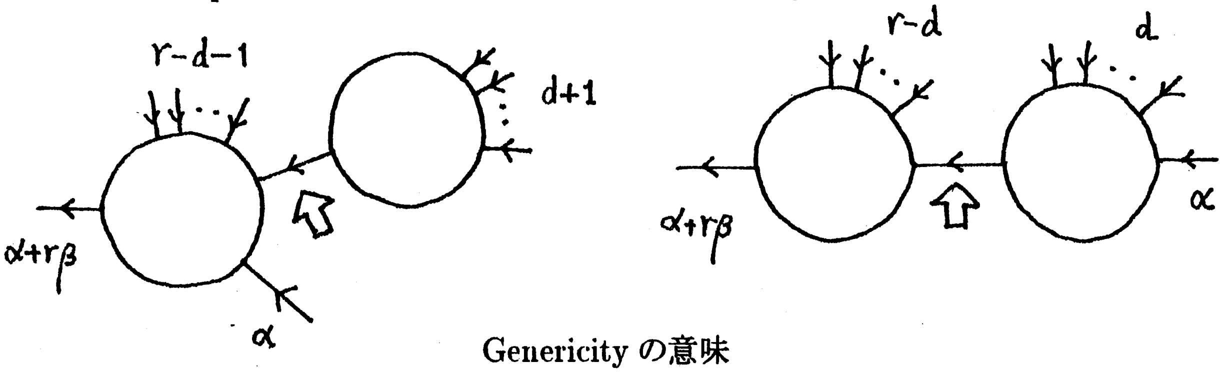


Twisted cycle の例

注意。generic でない場合でも、サイクルは存在し得る。例で、$t \in \mathbf{Z}$ のときは、留数積分でよい。

注意。Kac-determinant との関係。特異 vector の存在は、いわゆる、Kac-determinant 公式から導かれるが、後者を示すのには特異 vector の存在がいる。この鶏と卵の関係から抜け出るのに、"すべての"特異 vector を構成する必要はない。なぜならば、Kac-determinant の zero 点の order は、別だてで、おさえることができるから、そこで必要な数だけ作ればよいからである。その意味では、$t \in \mathbf{Z}$ に限って留数積分で特異 vector を構成し（非自明性は Dyson 予想による：もちろん証明されている）、それから、Kac-determinant 公式を証明し、一般の t での特異 vector の存在を導く、という筋書きが成り立つ。実際、歴史的にはこうして証明されたことになっている (Kac, Feigin-Fucks)。もちろん、そうして存在の示された特異 vector が、あらゆるパラメータで積分表示をもつか否かはまた別問題で、その都度サイクルの問題に立ち入らねばならない。このあたりの事情は、ジャック多項式の積分表示でも同様である。

またまた余談になるが、なにやら難しそうな論文 [8] で実際そのような難しい問題が解かれていることは、(少なくとも、物理学者の間では、私自身を含めて) あまり知られていなかったと思う。その意味で、今回の仕事をして勉強になったと喜んでいる次第である。参考までに、定理の genericity の条件は、次の図の中間状態の exponent が整数でないことを意味している。



Genericity の意味

さて、本題のジャック多項式の積分表示に話を戻そう。前節の、特異 vector $|\chi_{r,s}\rangle$ から、ジャック多項式 $J_{\lambda_{r,s}}(x_1,\cdots,x_n)$ への対応は、言い換えれば、$(-1)^{m-1}\beta a_m$ に冪和 $p_m=\sum_{i=1}^{r} {x_i}^m$ を代入することにほかならない。したがって、特異 vector の積分表示をこの対応で翻訳して次のことが期待される。

定理。分割 $\lambda_{r,s}=(r,r,...,r)$ (r が s 個) に対するジャック多項式 $J_{\lambda_{r,s}}(x_1,\cdots,x_n)$ は、積分表示

$$J_{\lambda_{r,s}}(x_1,\cdots,x_n)=N_r(t)\int_\Gamma dz_1\dots dz_r\prod_{1\le i<j\le r}(z_i-z_j)^{2t}\prod_{i=1}^{r}z_i^{(1-r)t-(s+1)}\prod_{i=1}^{r}\prod_{k=1}^{n}(1+x_kz_i),$$

を持つ。ここに Γ は、上に述べた性質のサイクルをとる。

定数の因子 $N_r(t)$ は、以下にのべるジャック多項式の規格化、および [8] Proposition 4.2 で構成されたサイクルに対しては、

$$N_r(t)=(r-1)!\prod_{j=1}^{r-1}\frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma((j-r)t)\Gamma((j+1)t+1)},$$

で与えられる。

ジャック多項式 $J_\lambda(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ の定義としては、直交多項式と、固有関数の二つが知られているが、我々が、論文 [1] で定理の証明に用いたのは、固有関数としての定義である。すなわち

定義。二階の微分作用素

$$D(t)=\frac{t}{2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\sum_{1\le i\neq j\le n}\frac{x_i^2}{x_i-x_j}\frac{\partial}{\partial x_i},$$

の次の展開をもつ固有関数 $J_\lambda(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ をジャック多項式 という。

$$J_\lambda=m_\lambda+\sum_{\mu<\lambda}a_{\lambda\mu}m_\mu.$$

定義の補足。分割 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)$, $\lambda_1\ge\lambda_2\ge...\lambda_n\ge 0$ に対して、λ_i の総和を重みとよび $|\lambda|$ と書く。m_λ は、monomial $x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_n^{\lambda_n}$ の対称化。また、二つの分割 λ,μ に対して、半順序 　　　　、"$|\lambda|=|\mu|$ 且つすべての i について、$\lambda_1+...+\lambda_i\ge\mu_1+...+\mu_i$ なること" と定める。固有値は、

$$\frac{t}{2}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(\lambda_i-1)-\sum_{i=1}^{n}(i-1)\lambda_i+(n-1)|\lambda|,$$

で与えられ、特に、分割 $\lambda_{r,s}$ に対しては、$rs[\frac{t}{2}(s-1)-\frac{1}{2}(r+1)+n]$ となる。

証明の筋書き。問題の積分表示式が、規格化因子を除いて欲しい展開の形をしていることは視察によりわかるので、あとは、固有関数になっていることを示せばよい。この計算は、2,3 のコホモロジーの関係式を用意してくるところで少し経験を要するが、特別に困難はない。詳細は、論文 [1] に与えたのでそちらを参照して下さい。

補足。同様の、積分表示式は、[11] によっても、独立に与えられた。そこでは、サイクルの問題があいまいになっているが、もうひとつ、別の表示も与え、また、それらが、$\lambda_{r,s}$ から少しだけずれた分割にも使えることを見つけた。これらのことを含めて、その後の進展について次に述べる。

3 再生核

ジャック多項式 $J_\lambda(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ のもうひとつの定義、すなわち直交多項式としての定義を思い出そう。以下では、$a = 1/t$ とおき $a \in \mathbf{Z}$ の場合に話を限る。一般の a については、最後にコメントする。

定義。$f(x), g(x) \in \mathbf{C}[x_1, \cdots, x_n]^{S_n}$ の内積を

$$\langle f, g\rangle'_t = c_n(a)^{-1} \int \prod_{i=1}^{n} \frac{dx_i}{x_i} f(x) g(\frac{1}{x}) \prod_{1\le i<j\le n} (1 - \frac{x_j}{x_i})^a,$$

で定義する。ここに、$c_n(a) = (na)!/(a!)^n (2\pi i)^n$。積分は留数積分。この内積の次の展開をもつ直交多項式 $J_\lambda(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ をジャック多項式という。

$$J_\lambda = m_\lambda + \sum_{\mu<\lambda} a_{\lambda\mu} m_\mu.$$

補足。内積の定義には、もうひとつ冪和を使った組み合わせ論的なものがあり、そちらは、$\langle f, g\rangle_t$ と書かれる。係数 $c_n(a)$ は、$\langle 1, 1\rangle'_t = 1$ となるように決めた。(Dyson 予想)

一方、次の完全性の関係が知られている。

$$\prod_{i=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{\infty}(1 - \frac{y_j}{x_i})^{-\frac{1}{t}} = \sum_{\lambda} j_\lambda{}^{-1} J_\lambda(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots) J_\lambda(y_1, y_2, \ldots),$$

ここで、和はすべての分割 λ にわたり、j_λ は、もう一方の内積での二乗ノルムである。([7] Proposition2.1)

直交性、完全性をあわせると、次の関係が得られる。

補題。

$$J_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = c_r{}^{-1} b_r(\lambda)^{-1} \int \prod_{i=1}^{r} \frac{dz_i}{z_i} \prod_{1\le i\ne j\le r} (1 - \frac{z_j}{z_i})^a \prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{n} (1 - \frac{x_j}{z_i})^{-a} J_\lambda(z_1, \ldots, z_r),$$

ここに、 $b_r(\lambda)$ は2つの内積の比で、

$$b_r(\lambda) = \frac{j'_\lambda}{j_\lambda} = \prod_{(i,j)\in\lambda} \frac{r+(i-1)t-(j-1)}{r+it-j},$$

で与えられる。(i,j) は、i 行 j 列にある箱。

補題の主張は、

$$K(x_1,\ldots,x_n|z_1,\ldots,z_r) = \prod_{i=1}^{r}\frac{1}{z_i}\prod_{1\le i\neq j\le r}(1-\frac{z_j}{z_i})^a\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{n}(1-\frac{x_j}{z_i})^{-a},$$

が、ジャック多項式の再生核であるといってもよい。

この補題そのものは、トートロジーであるが、次の事実をあわせると、非自明な結果を与える。

補題。深さ r 以下の分割 $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)$ に対して$\lambda+s=(\lambda_1+s,\ldots,\lambda_r+s)$ $(s=0,1,\ldots)$, とするとき、

$$J_{\lambda+s}(z_1,\ldots,z_r) = (z_1\cdots z_r)^s J_\lambda(z_1,\ldots,z_r).$$

これらの補題をもちいて、変数の数の水増しとタブローの水増しを繰り返せば、任意のジャック多項式の積分表示が得られる。すなわち、

定理。分割 λ を、その双対が$\lambda'=({r_1}^{s_1},\ldots,{r_m}^{s_m})$ なるものとするとき、対応するジャック多項式 $J_\lambda(x_1,\ldots,x_n)$ は次の積分表示をもつ。

$$\int\prod_{a=1}^{m}\prod_{i=1}^{r_a}\frac{dz_{a,i}}{z_{a,i}}\prod_{a=1}^{m}\Big(\prod_{1\le i\neq j\le r_a}(1-\frac{z_{a,j}}{z_{a,i}})^{\frac{1}{t}}\prod_{i=1}^{r_a}\prod_{j=1}^{r_{a+1}}(1-\frac{z_{a+1,j}}{z_{a,i}})^{-\frac{1}{t}}\prod_{i=1}^{r_a}z_{a,i}^{s_a}\Big),$$

ここに、$z_{a,i}$, $(1\le a\le m,\ 1\le i\le r_a)$, は積分変数であり、 $x_i=z_{m+1,i}$, $(1\le i\le r_{m+1}=n)$ とおいた。また、 c および b の積で書かれる規格化因子は省略した。

前節最後に述べた [11] の結果は、長方形またはこれに近いタブローで、種になるジャック多項式 $J_\lambda(z_1,\ldots,z_r)$ が簡単なものの場合として理解される。ここに与えた一般化された積分表示は、最近、同様の方法で [11] のグループによっても得られており、 W 代数の特異 vector との関連が議論されている。

系。分割 $\lambda_{s,r}=(s,s,\ldots,s)$ に対するジャック多項式 $J_{\lambda_{s,r}}(x_1,\cdots,x_n)$ は、積分表示

$$J_{\lambda_{s,r}}(x_1,\cdots,x_n) = N'_r(t)\int_{\Gamma'}dz_1\ldots dz_r\prod_{1\le i\neq j\le r}(1-\frac{z_j}{z_i})^{\frac{1}{t}}\prod_{i=1}^{r}z_i^{-(s+1)}\prod_{i=1}^{r}\prod_{k=1}^{n}(1-\frac{x_k}{z_i})^{-\frac{1}{t}},$$

を持つ[3]。

最後に、この式で $a=1/t, s$ が整数でない場合について、コメントしておこう。ここまでは、a, s が整数として、留数のサイクルで議論してきたが、一般の a, s の場合でも、適当なサイクルをとれば右辺が意味を持ち、s が整数の場合には、確かに、ジャック多項式 $J_{\lambda_{s,r}}(x_1,\cdots,x_n)$ を与えることがわかる。前節の積分表示と事情が異なるのは、s が整数でない場合である。実は、サイクルの存在条件、特に全体の $\mathbf{C}^*$ 作用の自明性からは、どちらの積分表示でも rs が整数ということしか出てこない。そこで、rs が整数で s が整数でない場合が問題になる。この場合、2種類の積分表示は異なった応答を示す。すなわち、前節のものは、0 をあたえるのに対して、後者はジャックの固有関数の級数解をあたえるのである。

実は、作用を多項式に限ることなく、積分核 K による変換が、無限個の可換な微分作用素 $H_1, H_2, \cdots$

$$H_1=\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

$$H_2=\frac{t}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\sum_{1\leq i\neq j\leq n}\frac{x_i^2}{x_i-x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}-(n-1)H_1,$$

と交換することが示される。このことは、後者の積分が KZ 方程式のある種の解の積分表示と見なせることからも興味深い。その場合は、例えば $sl(2)$ で $t=k+2$ と対応する。Virasoro 代数の $t\to 1/t$ の duality を Hamitlonian reduction 前の $sl(2)$ で見ると、不思議な話になるのは、先に述べた2種類の積分表示の異なった応答に由来すると考えられる。

最後に、おまけとして、ジャック多項式の色々な基底での公式を示しておきます。色々な実験または教育用にでもご利用ください。

References

[1] K.Mimachi and Y.Yamada, Singulervectors of Virasoro algebra in terms of Jack symmetric polynomials. preprint (November 1994). CMP (to appear)

[2] M.Kato and S.Matsuda, Null Field Construction in Conformal and Superconformal Algebras, Advanced Studies in Pure Math. 16 (1988), pp.205-254.

[3] B.L.Feigin and D.B.Fuchs, Representations of the Virasoro algebra, in "Topology, Proceedings", Leningrad 1982. Faddeev,L.D.,Mal'cev,A.(eds.). Lecture Notes in Math. ,Vol. 1060, Springer 1984.

[4] I.G.Macdonald, Symmetric functions and Hall polynomials, Oxford University Press (1979)

[3] この式は、もう一方の遮蔽作用素からも導かれる。

[5] ——- Commuting differential operators and zonal spherical functions,in "Algebraic Groups, Utrecht 1986"(A.M.Cohen et al.,Eds.), Lecture Notes in Math., Vol.1271, pp.189-200 ,Springer,1987.

[6] ——- A new class of symmetric functions, Publ.IRMA Strasbourg, Seminaire Lotharingien, 1988, 131-171.

[7] R.P.Stanley, Some combinatorial properties of Jack symmetric functions, Adv.in Math., 77(1989),76-115.

[8] A.Tsuchiya and Y.Kanie, Fock space representations of the Virasoro algebra— Intertwining operators, Publ.RIMS. Kyoto Univ., 22(1986). 259-327.

[9] 吉田　正章, 付録　Intersection form for twisted cycles, シンポジウム「現象としての双対性」報告集, 函館 1992, (日比, 若山編) pp.96-108.

[10] M.Wakimoto and H.Yamada, The Fock representations of the Virasoro algebra and the Hirota equations of the modified KP hierarchy, Hiroshima Math.J.,16 (1986), 427-441.

[11] H.Awata, Y.Matsuo, S.Odake and J.Shiraishi, "Collective Field Theory, Calogero-Sutherland Model and Generalized Matrix Models" (hep-th/9411053).

Jack Polynomials

m : monomial basis, e : elementary symmetric functions, p : power functions.

$$J_1 = m_1 = e_1 = p_1,$$

$$J_2 = m_2 + \frac{2}{t+1}m_{11} = e_{11} - \frac{2t}{t+1}e_2 = \frac{1}{t+1}\big[p_{11} + tp_2\big],$$

$$J_{11} = m_{11} = e_2 = \frac{1}{2}\big[p_{11} - p_2\big],$$

$$J_3 = m_3 + \frac{3}{2t+1}m_{21} + \frac{6}{(t+1)(2t+1)}m_{111} = e_{111} - \frac{6t}{2t+1}e_{21} + \frac{6t^2}{(t+1)(2t+1)}e_3$$
$$= \frac{1}{(t+1)(2t+1)}\big[p_{111} + 3tp_{21} + 2t^2p_3\big],$$

$$J_{21} = m_{21} + \frac{6}{t+2}m_{111} = e_{21} - \frac{3t}{t+2}e_3 = \frac{1}{t+2}\big[p_{111} + (t-1)p_{21} - 2p_3\big],$$

$$J_{111} = m_{111} = e_3 = \frac{1}{6}\big[p_{111} - 3p_{21} + 2p_3\big],$$

$$J_4 = m_4 + \frac{4}{3t+1}m_{31} + \frac{6(t+1)}{(2t+1)(3t+1)}m_{22}$$
$$+ \frac{12}{(2t+1)(3t+1)}m_{211} + \frac{24}{(t+1)(2t+1)(3t+1)}m_{1111}$$
$$= e_{1111} - \frac{12t}{3t+1}e_{211} + \frac{12t^2}{(2t+1)(3t+1)}e_{22}$$
$$+ \frac{24t^2}{(2t+1)(3t+1)}e_{31} - \frac{24t^3}{(t+1)(2t+1)(3t+1)}e_4$$
$$= \frac{1}{(t+1)(2t+1)(3t+1)}\big[p_{1111} + 6tp_{211} + 3t^2p_{22} + 8t^2p_{31} + 6t^3p_4\big],$$

$$J_{31} = m_{31} + \frac{2}{t+1}m_{22} + \frac{3t+5}{(t+1)^2}m_{211} + \frac{12}{(t+1)^2}m_{1111}$$
$$= e_{211} - \frac{2t}{t+1}e_{22} - \frac{t(t+3)}{(t+1)^2}e_{31} + \frac{4t^2}{(t+1)^2}e_4$$
$$= \frac{1}{2(t+1)^2}\big[p_{1111} + (3t-1)p_{211} - tp_{22} + 2t(t-1)p_{31} - 2t^2p_4\big],$$

$$J_{22} = m_{22} + \frac{2}{t+1}m_{211} + \frac{12}{(t+1)(t+2)}m_{1111} = e_{22} - \frac{2t}{t+1}e_{31} + \frac{2t(t-1)}{(t+1)(t+2)}e_4$$
$$= \frac{1}{2(t+1)(t+2)}\big[p_{1111} + 2(t-1)p_{211} + (1+t+t^2)p_{22} - 4tp_{31} - t(t-1)p_4\big],$$

$$J_{211} = m_{211} + \frac{12}{t+3}m_{1111} = e_{31} - \frac{4t}{t+3}e_4$$
$$= \frac{1}{2(t+3)}\big[p_{1111} + (t-3)p_{211} - tp_{22} - 2(t-1)p_{31} + 2tp_4\big],$$

$$J_{1111} = m_{1111} = e_4 = \frac{1}{24}\big[p_{1111} - 6p_{211} + 3p_{22} + 8p_{31} - 6p_4\big],$$