数理解析研究所講究録
919巻 1995年 86-98



# 一般超幾何方程式と Verma 加群

広大理　谷崎俊之　(Toshiyuki TANISAKI)

## 0　動機付け

簡単に，Gelfand [G]，Gelfand-Gelfand [GG] において定義された一般超幾何微分方程式系について説明しよう．まず方程式を定義するために必要なデータを述べる．

(1) グラスマン多様体　$X=G/P$:

$\mathbf{C}^n$ 中の $k$ 次元部分空間全体の集合を $X$ と書く．$\mathbf{C}^n$ の標準基底を $(e_i)_{i=1,\ldots,n}$ とし，$W_0\in X$ を $W_0=\sum_{i=1}^k \mathbf{C}e_k$ により定める．群 $G=SL_n(\mathbf{C})$ が $X$ に推移的に作用し，また $W_0$ の固定部分群は

$$P=\left\{\begin{pmatrix} A & B\\ 0 & D\end{pmatrix}\,\middle|\, A\in GL_k(\mathbf{C}), B\in M_{k,n-k}(\mathbf{C}), D\in GL_{n-k}(\mathbf{C}), \det(A)\det(D)=1\right\}$$

になるので，$X$ は等質空間 $G/P$ と同一視され，代数多様体になる．

(2) $X$ 上の直線束　$L$:

$X$ 上の直積ベクトル束 $X\times\wedge^k\mathbf{C}^n$ の部分直線束であって $W\in X$ におけるファイバーが $\wedge^k W$ となるものを $L$ とする．$L$ には $G$ の作用が自然に定義されて，$G$ 同変直線束となる．

(3) $G$ の閉部分群　$K$:

対角成分 $(a_1,\cdots,a_n)$ をもつ対角行列を $d(a_1,\cdots,a_n)$ で表わす．$G$ の閉部分群 $K$ を

$$K=\{d(a_1,\cdots,a_n)\mid \prod_{i=1}^n a_i=1\}$$

で定める．

（4）$\mathfrak{k} = \mathrm{Lie}(K)$ の指標　$\xi$:

$K$ のリー代数 $\mathfrak{k} = \mathrm{Lie}(K)$ は

$$\mathfrak{k} = \{d(a_1, \cdots, a_n) \mid \sum_{i=1}^{n} a_i = 0\}$$

で与えられる．$\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbf{C}$ であって $\sum_{i=1}^{n} \xi_i = 0$ を満たすものを勝手にひとつ選び，$\mathfrak{k}$ の指標 $\xi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Liealg}}(\mathfrak{k}, \mathbf{C})$ を$\xi(d(a_1, \ldots, a_n)) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i a_i$ により定める．

以上のデータに対して，$L$ の切断を未知関数とする線形微分方程式系 $H_\xi$ が定まり，一般超幾何方程式と呼ばれる．ここでは $H_\xi$ を $X$ のある開部分集合上に制限したものの記述のみを与えておく．

$$N^- = \left\{ \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ C & I_{n-k} \end{pmatrix} \middle| \ C = (y_{ij}) \in M_{n-k,k}(\mathbf{C}) \right\}$$

とおくとき，$N^- \to X \quad (n \mapsto n \cdot W_0)$ は開埋め込みとなるので，$N^-$ は $X$ の開部分集合と同一視できる．$L$ の $W_0 \in X$ におけるファイバーの非零元 $v$ をひとつとるとき，$L|N^-$ のいたるところ非零な大域切断 $s$ が $s(n) = n \cdot v \quad (n \in N^-)$ で定まり，これにより $L|N^-$ は自明な直線束 $N^- \times \mathbf{C}$ と同一視できる．従って $N^-$ 上では直線束によるひねりはなくなって，$H_\xi|N^-$ は $N^-$ 上の関数 $f$ に対する方程式となる．$N^-$ を $M_{n-k,k}(\mathbf{C})$ と同一視し，その座標を $(y_{ij}) \quad (1 \le i \le n-k, 1 \le j \le k)$ とするとき，$H_\xi|N^-$ は以下の方程式を連立させて得られる．

(0.1)　$(\partial_{ir}\partial_{js} - \partial_{is}\partial_{jr})(f) = 0 \qquad (i, j = 1, \ldots, n-k,\ r, s = 1, \ldots, k)$,

(0.2)　$(\sum_{i=1}^{n-k} y_{ir}\partial_{ir})(f) = (\xi_r - (n-k)/n)f \qquad (r = 1, \ldots, k)$,

(0.3)　$(\sum_{r=1}^{k} y_{ir}\partial_{ir})(f) = (-\xi_{k+i} - k/n)f \qquad (i = 1, \ldots, n-k)$.

ここで $\partial_{ir} = \partial/\partial y_{ir}$ とおいた．

$L$ の切断に作用する線形微分作用素のなす環の層を $D^L$ とする．$D^L$ は通常の（関数に作用する）線形微分作用素の環の層 $D_X$ と局所的には同型であるが，大域的には $L$ によるひねりを加味したものになる．$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})$ を $G$ のリー代数とすると，リー代数

の準同型 $\mathfrak{g} \to \Gamma(X, D^L)$ $(a \mapsto \partial_a^L)$ が

$$(\partial_a^L(s))(x) = (d/dt)(\exp(ta)\cdot s(\exp(-ta)\cdot x))|_{t=0} \qquad (s \in (L \text{ の切断}), x \in X)$$

により定まる．さて佐藤哲学により，線形微分方程式系とは (左) $D$ 加群のことに他ならないが，いま我々が考えているのは直線束 $L$ の切断に関する方程式なので，$H_\xi$ に対応するのはある $D^L$ 加群 $\mathcal{M}_\xi$ である．これは，次の形をしている．

(0.4) $\mathcal{M}_\xi = D^L/(\mathcal{J} + \sum_{a\in\mathfrak{k}} D^L(\partial_a^L - \xi(a)))$

ここで $\mathcal{J}$ は $D^L$ のある $G$ 不変な左イデアルで，方程式 (0.1) に対応している．また $\sum_{a\in\mathfrak{k}} D^L(\partial_a^L - \xi(a))$ が (0.2)，(0.3) に対応している．

本稿では，$L$ および $\mathcal{J}$ の群論的意味付けを与えると共に，データ（1），(2)，(3)，（4）をもう少し拡張して，$\mathcal{M}_\xi$ のさらなる一般化を与える．

# 1 一般旗多様体上の TDO

**1.1.** 底空間として，グラスマン多様体の拡張である一般旗多様体 $X = G/P$ ($G$：単純代数群，$P$：$G$ の放物型部分群) をとる．まず，代数群およびリー代数について，記号の準備をする．

$\mathfrak{g}$ を $\mathbf{C}$ 上の単純リー代数，$\mathfrak{h}$ をその Cartan 部分代数とし，$\Delta$ を $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ のルート系とする．$\alpha \in \Delta$ に関するルート空間を $\mathfrak{g}_\alpha$ で表わす．単純ルート系 $\Pi = \{\alpha_i \,|\, i \in I\}$ をひとつ選び，対応する単純余ルート系，正ルート系，基本ウェイト系をそれぞれ $\check{\Pi} = \{h_i \,|\, i \in I\}$, $\Delta^+$，$\{\varpi_i \,|\, i \in I\}$ とする．

$I$ の部分集合 $I_0$ をひとつとり，

$$\Pi_0 = \{\alpha_i \,|\, i \in I_0\}, \quad \Delta_0 = \mathbf{R}\Pi_0 \cap \Delta, \quad \Delta_0^+ = \Delta_0 \cap \Delta^+, \quad \Delta_1^+ = \Delta^+ - \Delta_0^+$$

とし，$\mathfrak{g}$ の部分代数 $\mathfrak{l}, \mathfrak{n}^+, \mathfrak{n}^-, \mathfrak{p}$ を

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{h} \oplus (\bigoplus_{\alpha\in\Delta_0} \mathfrak{g}_\alpha), \quad \mathfrak{n}^\pm = \bigoplus_{\alpha\in\Delta_1^+} \mathfrak{g}_{\pm\alpha}, \quad \mathfrak{p} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{n}^+$$

で定める．このとき $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{n}^+ = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{p}$ が成立する．$\mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{p} \to \mathfrak{p}/[\mathfrak{p},\mathfrak{p}]$ の合成は全射で，その核が $\{h_i \,|\, i \in I_0\}$ により張られることから，自然な同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Liealg}}(\mathfrak{p}, \mathbf{C}) \simeq \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \,|\, \lambda(h_i) = 0 \quad (i \in I_0)\} = \bigoplus_{i \in I - I_0} \mathbf{C}\varpi_i$$

が定まる．

$G$ を $\mathfrak{g}$ を Lie 代数とする連結かつ単連結な単純代数群とし，$L, N^{\pm}, P$ をそれぞれ $\mathfrak{l}, \mathfrak{n}^{\pm}, \mathfrak{p}$ に対応する $G$ の部分群とする．

**1.2.** 滑らかな代数多様体 $Y$ に対して，$Y$ 上の正則関数の層および線形微分作用素の層をそれぞれ $\mathcal{O}_Y$，$D_Y$ で表わす．$Y$ 上のある直線束の切断に作用する線形微分作用素の層のように，局所的には $D_Y$ と同型な環の層のことを TDO (twisted differential operators) と呼ぶ（正確な定義は Kashiwara [K] を参照）．一般には直線束から派生しない TDO も存在する．

以下，一般旗多様体 $X = G/P$ の上の TDO の構成法について述べる（Beilinson-Bernstein [BB], Kashiwara [K] を参照）．

$U(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ の包絡代数として，$U^{\circ}(\mathfrak{g}) = \mathcal{O}_X \otimes_{\mathbf{C}} U(\mathfrak{g})$ とおく．これは $X$ 上の層であるが，以下の条件を満たす積が一意的に定まり，環の層になる．

(1.2.1) $\mathcal{O}_X \to U^{\circ}(\mathfrak{g}) \quad (f \mapsto f \otimes 1)$ は環の準同型．

(1.2.2) $U(\mathfrak{g}) \to U^{\circ}(\mathfrak{g}) \quad (u \mapsto 1 \otimes u)$ は環の準同型．

(1.2.3) $(a \otimes 1)(1 \otimes f) = (1 \otimes f)(a \otimes 1) + \partial_a(f) \otimes 1 \quad (a \in \mathfrak{g}, f \in \mathcal{O}_X)$.

ただしここで

$$(\partial_a(f))(x) = (d/dt)f(\exp(-ta) \cdot x)|_{t=0} \quad (a \in \mathfrak{g}, f \in \mathcal{O}_X).$$

以下 (1.2.1),(1.2.2) により，$\mathcal{O}_X, U(\mathfrak{g})$ を $U^{\circ}(\mathfrak{g})$ の部分環とみなす．

$x \in X$ に対して $\mathbf{C} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} U^{\circ}(\mathfrak{g})_x \simeq U(\mathfrak{g})$ なので，これから線形写像 $U^{\circ}(\mathfrak{g})_x \to U(\mathfrak{g})$ が定まる．これを $Q \mapsto Q(x)$ とかく．$U(\mathfrak{g})$ の $\mathrm{ad}(\mathfrak{p})$ 不変部分空間 $J$ に対して，$U^{\circ}(\mathfrak{g})$ の

切断 $Q$ であって，$Q(gP) \in \mathrm{Ad}(g)J$ を満たすもののなす $U^\circ(\mathfrak{g})$ の部分層を $J^\circ$ と記す．次は容易に示される．

**補題 1.2.1** $J$ を $U(\mathfrak{g})$ の $\mathrm{ad}(\mathfrak{p})$ 不変部分空間とする．
(i) $\mathcal{O}_X J^\circ = J^\circ$.
(ii) $[\mathfrak{g}, J^\circ] \subset J^\circ$.
(iii) $(JU(\mathfrak{g}))^\circ = U^\circ(\mathfrak{g})J^\circ$.

以下，$\lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Liealg}}(\mathfrak{p}, \mathbf{C})$ をひとつとり固定し，

(1.2.4) $\mathfrak{p}_\lambda = \{a - \lambda(a) \mid a \in \mathfrak{p}\} \subset U(\mathfrak{g})$,

(1.2.5) $I_\lambda = \mathfrak{p}_\lambda U(\mathfrak{g}) = \sum_{a\in\mathfrak{p}}(a - \lambda(a))U(\mathfrak{g}) \subset U(\mathfrak{g})$

とおく．このとき補題 1.2.1 と $[\mathcal{O}_X, \mathfrak{p}_\lambda^\circ] = 0$ により次がわかる．

**補題 1.2.2** $I_\lambda^\circ$ は $U^\circ(\mathfrak{g})$ の両側イデアル．

そこで，$X$ 上の環の層 $D_\lambda$ を $D_\lambda = U^\circ(\mathfrak{g})/I_\lambda^\circ$ により定める．また $\mathbf{C}$ 代数の準同型 $U(\mathfrak{g}) \to \Gamma(X, D_\lambda)$ $(u \mapsto \partial_u^\lambda)$ を$\partial_u^\lambda = \overline{u \otimes 1}$ で定める．このとき次の成立することがわかる．

**命題 1.2.3** $D_\lambda$ は $X$ 上の TDO である．

**注意** 以下のことが知られている．
(i) $\lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Liealg}}(\mathfrak{p}, \mathbf{C})$ に対して $D_\lambda$ を対応させることにより，$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Liealg}}(\mathfrak{p}, \mathbf{C}) \simeq \bigoplus_{i\in I-I_0} \mathbf{C}\varpi_i$ と $\{X$上の TDO の同型類$\}$ の間の 1 対 1 対応が決まる．
(ii) $D_\lambda$ が $X$ 上の直線束から派生するための条件は，$\lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{alggp}}(P, \mathbf{C}^\times) \simeq \bigoplus_{i\in I-I_0} \mathbf{Z}\varpi_i$ となることである．

**1.3.** $\lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Liealg}}(\mathfrak{p}, \mathbf{C})$ に対して，左 $U(\mathfrak{g})$ 加群 $V(\lambda)$ （左 Verma 加群）および右 $U(\mathfrak{g})$ 加群 $V^r(\lambda)$ （右 Verma 加群）を

(1.3.1) $V(\lambda) = U(\mathfrak{g})/\sum_{a\in\mathfrak{p}} U(\mathfrak{g})(a - \lambda(a))$, (1.3.2) $V^r(\lambda) = U(\mathfrak{g})/I_\lambda = U(\mathfrak{g})/\sum_{a\in\mathfrak{p}}(a-\lambda(a))U(\mathfrak{g})$

により定める．$U(\mathfrak{g})$ の反自己同型 $a \mapsto -a \quad (a \in \mathfrak{g})$ をつうじて，$V(-\lambda)$ の左 $U(\mathfrak{g})$ 部分加群と $V^r(\lambda)$ の右 $U(\mathfrak{g})$ 部分加群は 1 対 1 に対応する．また $V^r(\lambda)$ の右 $U(\mathfrak{g})$ 部分加群は，$U(\mathfrak{g})$ の部分空間 $J$ であって

(1.3.3) $JU(\mathfrak{g}) = J, \quad J \supset I_\lambda$

を満たすものと 1 対 1 に対応する．(1.3.3) を満たす $J$ があるとき，$a \in \mathfrak{p}, b \in J$ に対して，

$$[a,b] = (a-\lambda(a))b - b(a-\lambda(a)) \in I_\lambda + J \subset J$$

となるので，$J$ は $\mathrm{ad}(\mathfrak{p})$ 不変であり，従って，補題 1.2.1 により $D_\lambda = U^\circ(\mathfrak{g})/I_\lambda^\circ$ の $G$ 不変な左イデアル $J^\circ/I_\lambda^\circ$ が定まる．以上により，Verma 加群 $V(-\lambda)$ の部分加群に対応して $D_\lambda$ の $G$ 不変な左イデアルが定まった．

# 2　一般超幾何方程式

**2.1.**　$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})$ において $I_0$ を次の Dynkin 図形の黒丸に対応してとるとき，$X$ は §0 で述べたグラスマン多様体になる：

(I)　$$\overbrace{\bullet - \bullet - \bullet \cdots\cdots \bullet}^{k-1} - \circ - \overbrace{\bullet \cdots\cdots \bullet - \bullet - \bullet}^{n-k-1}$$

この場合，白丸の頂点に対応する基本ウェイトを $\varpi$ とするとき，$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Liealg}}(\mathfrak{p}, \mathbf{C}) \simeq \mathbf{C}\varpi$ であるが，$\lambda = \varpi$ のときの $D_\lambda$ が §0 の $D^L$ と一致する．さらに，$\mathcal{J}$ は，§1.3 の対応のもとで，$V(-\varpi)$ の極大真部分加群に対応して定まる $D_\varpi$ の $G$ 不変左イデアルと一致している．

従って，より一般の §1 の設定のもとでも，$\mathcal{J}_\lambda$ を $V(-\lambda)$ の極大真部分加群に対応して定まる $D_\lambda$ の $G$ 不変左イデアルとし，$G$ の閉部分群 $K$ と $\mathfrak{k} = \mathrm{Lie}(K)$ の指標 $\xi$ を適当に選んで

(2.1.1) $\mathcal{M} = D_\lambda / (\mathcal{J}_\lambda + \sum_{a \in \mathfrak{k}} D_\lambda(\partial_a^\lambda - \xi(a)))$

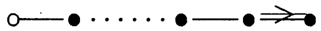
とおくと，一応一般超幾何方程式のさらなる一般化にはなっていることになる．しかし $\lambda$ が generic ならば $\mathcal{J}_\lambda = 0$ となるし，また $K$ の取り方も問題である．そこで，ちゃんと意味のある方程式がでるように，設定を制限することを考える．

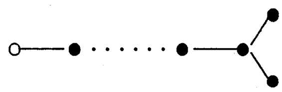
**2.2.** まず $X = G/P$ に関して次の制限をおく：

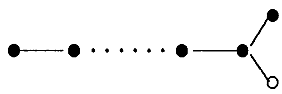
(2.2.1) $\sharp(I - I_0) = 1$ で，$\mathfrak{n}^\pm$ は可換リー代数．

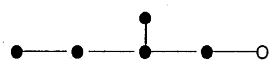
この条件は $X$ がコンパクトなエルミート対称空間になることと同値である．このような $X$ は先に述べた (I) の他以下のものがある．

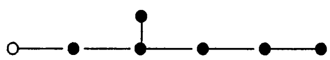
(II) 

(III) 

(IV) 

(V) 

(VI) 

(VII) 

ただし先ほどと同じく，Dynkin 図形の黒丸に対応して $I_0$ をとる．

以下，白丸の頂点に対応する基本ウェイトを $\varpi$ とする．このとき，$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Liealg}}(\mathfrak{p}, \mathbf{C}) \simeq \mathbf{C}\varpi$ である．

**2.3.** 次に，パラメーター $\lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Liealg}}(\mathfrak{p}, \mathbf{C}) \simeq \mathbf{C}\varpi$ の取り方について述べる．

そのために，まず Goncharov [Go] の結果について説明する．開埋め込み

$$(2.3.1) \qquad \mathfrak{n}^- \hookrightarrow X \quad (y \mapsto \exp(y)P)$$

により，$\mathfrak{n}^-$ を $X$ の開部分集合と同一視する．一般に $\mu \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Liealg}}(\mathfrak{p}, \mathbf{C})$ に対して $D_\mu|\mathfrak{n}^- \simeq D_{\mathfrak{n}^-}$ なので，環準同型 $\Gamma(X, D_\mu) \to \Gamma(\mathfrak{n}^-, D_{\mathfrak{n}^-})$ が定まる．Killing 形式により $\mathfrak{n}^-$ は $(\mathfrak{n}^+)^*$ と同一視されるので，Fourier 変換により環同型$\Gamma(\mathfrak{n}^-, D_{\mathfrak{n}^-}) \simeq \Gamma(\mathfrak{n}^+, D_{\mathfrak{n}^+})$ が定まる．そこで $U(\mathfrak{g}) \to \Gamma(X, D_\mu) \to \Gamma(\mathfrak{n}^-, D_{\mathfrak{n}^-}) \simeq \Gamma(\mathfrak{n}^+, D_{\mathfrak{n}^+})$ を合成して得られる環準同型を$\Psi_\mu : U(\mathfrak{g}) \to \Gamma(\mathfrak{n}^+, D_{\mathfrak{n}^+})$ とする．

さて，最高ルートを $\theta \in \Delta_1^+$ とし，$x^0 \in \mathfrak{g}_\theta - \{0\}$ をひとつとり，$Y = \mathrm{Ad}(L)(x^0) \subset \mathfrak{n}^+$ とおく．また $I(\overline{Y}) = \{f \in \mathbf{C}[\mathfrak{n}^+] \mid f(Y) = \{0\}\}$ とおく．(I) 型で白丸が端点の場合には $Y = \mathfrak{n}^+ - \{0\}$ すなわち $I(\overline{Y}) = \{0\}$ となり例外的なので，この場合は除く．すなわち，以下次の仮定をおく．

(2.3.2) (I) 型の場合，白丸は端点ではない．

このとき，$I(\overline{Y})$ は $I(\overline{Y})$ に含まれる 2 次式により生成されることが知られている（例えば Sakane-Takeuchi [ST] の結果から出る）．さらに次が成立する:

**命題 2.3.1([Go])** $\Gamma(\mathfrak{n}^+, D_{\mathfrak{n}^+})$ の部分環 $R$ を

$$\begin{aligned} R &= \{P \in \Gamma(\mathfrak{n}^+, D_{\mathfrak{n}^+}) \mid PI(\overline{Y}) \subset I(\overline{Y})\Gamma(\mathfrak{n}^+, D_{\mathfrak{n}^+})\} \\ &= \{P \in \Gamma(\mathfrak{n}^+, D_{\mathfrak{n}^+}) \mid [P, I(\overline{Y})] \subset I(\overline{Y})\Gamma(\mathfrak{n}^+, D_{\mathfrak{n}^+})\} \end{aligned}$$

により定める．このとき，$\Psi_\mu(U(\mathfrak{g})) \subset R$ となる$\mu \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Liealg}}(\mathfrak{p}, \mathbf{C})$ が唯ひとつ存在する．

一般に $\nu \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Liealg}}(\mathfrak{p}, \mathbf{C})$ に対して，$U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{n}^-) \oplus \sum_{a \in \mathfrak{p}} U(\mathfrak{g})(a - \nu(a))$ なので，$U(\mathfrak{n}^-) \simeq V(\nu)$ である．また，仮定 (2.2.1) により，$U(\mathfrak{n}^-)$ は $\mathfrak{n}^-$ の対称代数 $S(\mathfrak{n}^-)$ と自然に同型である．さらに Killing 形式により $\mathfrak{n}^+ \simeq (\mathfrak{n}^-)^*$ なので，$S(\mathfrak{n}^-)$ は $\mathbf{C}[\mathfrak{n}^+]$ と同一視できる．以上により，ベクトル空間の同型写像 $F_\nu : \mathbf{C}[\mathfrak{n}^+] \to V(\nu)$ が定まった．

$R$ の定義から $\mathbf{C}[\overline{Y}] = \mathbf{C}[\mathfrak{n}^+]/I(\overline{Y})$ は $R$ 加群になるので，命題 2.3.1 により $\mathbf{C}[\overline{Y}]$ は $U(\mathfrak{g})$ 加群になる．また $\rho_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Liealg}}(\mathfrak{p}, \mathbf{C})$ を $\rho_1(a) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(a)|\mathfrak{n}^+)/2 \quad (a \in \mathfrak{p})$ により定めるとき，$U(\mathfrak{g})$ 加群の全射 $V(\mu - 2\rho_1) \to \mathbf{C}[\overline{Y}]$ が $\bar{1} \to 1$ により与えられ，さらにその核は $V(\mu - 2\rho_1)$ の最大真部分加群で，$F_{\mu-2\rho_1}(I(\overline{Y}))$ と一致する．

そこで，超幾何方程式の一般化 (2.1.1) を定義するためのパラメータ $\lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Liealg}}(\mathfrak{p}, \mathbf{C})$ を次のようにとる．

(2.3.3)　命題 2.3.1 の $\mu$ に対して $\lambda = -(\mu - 2\rho_1)$ とする．

(I) 型の場合には，$D_\lambda$ および $\mathcal{J}_\lambda$ が，§0 の $D^L$ および $\mathcal{J}$ と一致している．

なお Goncharov の結果は存在定理であって，$\mu$ あるいは $\lambda$ を具体的に与えるものではないが，より詳しく解析すると，その値も次のように決定できる．

**命題 2.3.2**　$\lambda = k\varpi$ とする．(I) 型のとき $k = 1$．(II) 型のとき $k = 1/2$．(III) 型のとき $k = (2n-3)/2$．(IV) 型のとき $k = n-2$．(V) 型のとき $k = 2$．(VI) 型のとき $k = 3$．(VII) 型のとき $k = 4$．ただし $n$ は Dynkin 図形の頂点の数をあらわす．

**2.4.**　以上により，$K$ と $\xi$ の取り方を除いて超幾何方程式の一般化 (2.2.1) が決まったので，その局所表示の具体的形を与えておく．埋め込み (2.3.1) により $\mathfrak{n}^-$ を $X$ の開集合とみなし (2.2.1) で定まる $D_\lambda$ 加群 $\mathcal{M}$ の $\mathfrak{n}^-$ への制限を考える．$D_\lambda|\mathfrak{n}^- \simeq D_{\mathfrak{n}^-}$ なので，$\mathcal{M}|\mathfrak{n}^-$ は $D_{\mathfrak{n}^-}$ 加群である．

$U(\mathfrak{n}^-)(\simeq S(\mathfrak{n}^-) \simeq \mathbf{C}[\mathfrak{n}^+])$ から $\Gamma(\mathfrak{n}^-, D_{\mathfrak{n}^-})$ への環準同型 $a \mapsto d_a$ を

$$(d_a(f))(x) = (d/dt)(f(x+ta))|_{t=0} \quad (a \in \mathfrak{n}^-, f \in \mathcal{O}_{\mathfrak{n}^-}, x \in \mathfrak{n}^-)$$

により定める．このとき $a \in \mathfrak{g}$ と $x \in \mathfrak{n}^-$ に対して

$$\partial_a^\lambda(x) = \begin{cases} -d_a & (a \in \mathfrak{n}^-) \\ -d_{[a,x]} + \lambda(a) & (a \in \mathfrak{l}) \\ -d_{[[a,x],x]}/2 + \lambda([a,x]) & (a \in \mathfrak{n}^+) \end{cases} \tag{2.4.1}$$

がわかる．従って，

$$\mathcal{J}_\lambda|\mathfrak{n}^- = \textstyle\sum_{z \in I(\overline{Y})} D_{\mathfrak{n}^-} d_z, \tag{2.4.2}$$

また例えば $K \subset L$ ならば

(2.4.3) $\quad \sum_{a\in\mathfrak{k}} D_\lambda(\partial_a^\lambda - \xi(a))|\mathfrak{n}^- = \sum_{a\in\mathfrak{k}} D_{\mathfrak{n}^-}(Q_a - \lambda(a) + \xi(a))$

となる．ただし $Q_a$ は $\mathfrak{n}^-$ 上のベクトル場で，$x \in \mathfrak{n}^-$ に対して $Q_a(x) = d_{[a,x]}$ となるものとする．よって次がわかった．

**補題 2.4.1** $K \subset L$ のとき $\mathcal{M}$ の $\mathfrak{n}^-$ への制限は

$$\mathcal{M}|\mathfrak{n}^- = D_{\mathfrak{n}^-}/(\sum_{z\in I(\overline{Y})} D_{\mathfrak{n}^-} d_z + \sum_{a\in\mathfrak{k}} D_{\mathfrak{n}^-}(Q_a - \lambda(a) + \xi(a)))$$

により与えられる．

**2.5.** 最後に $K$ の決め方が残った．考える方程式がよい方程式であるためには，解空間が有限次元（$D$ 加群がホロノミー系）でなければならない．そこで $\mathcal{M}$ の特性多様体 $\mathrm{Ch}(\mathcal{M})$ について考察する．

$X$ の余接束 $T^*X$ の $gP \in X$ におけるファイバーは $(\mathfrak{g}/\mathrm{Ad}(g)\mathfrak{p})^*$ であるが，これは Killing 形式により，$\mathrm{Ad}(g)(\mathfrak{n}^+)$ と同型なので，$T^*X$ は $\{(gP, a) \in X \times \mathfrak{g} \mid a \in \mathrm{Ad}(g)(\mathfrak{n}^+)\}$ と同一視される．Killing 形式 $\langle\, ,\, \rangle$ に関して，$\mathfrak{k}^\perp = \{a \in \mathfrak{g} \mid \langle a, \mathfrak{k}\rangle = 0\}$ とおく．$x^0$ を含む $\mathrm{Ad}(G)$ 軌道を $O$ とし（極小巾零軌道），$\Lambda \subset T^*X$ を $\Lambda = \{(gP, a) \in T^*X \mid a \in O \cap \mathfrak{k}^\perp\}$ により定める．

**命題 2.5.1** $\mathcal{M}$ の特性多様体 $\mathrm{Ch}(\mathcal{M})$ は (零切断) $\cup\, \Lambda$ に含まれる．

$\mathcal{M}$ がホロノミー系になるための条件は $\dim \mathrm{Ch}(\mathcal{M}) = \dim X$ であるが，そのためには $\dim \Lambda \leq \dim X$ となればよい．

**命題 2.5.2** $\dim \Lambda \leq \dim X$ となるための必要十分条件は，$\dim(O \cap \mathfrak{k}^\perp) \leq \dim O/2$ となることである．

そこで $K$ の取り方について考えよう．(I) 型のアナロジーを追えば，$K$ として $G$ の極大トーラス $H$ （$\mathrm{Lie}(H) = \mathfrak{h}$ となる部分群）をとるのが最も自然であろう．まずこの場合について考えてみよう．

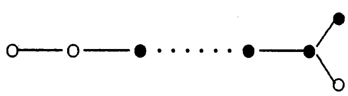
**命題 2.5.3** $\dim(O \cap \mathfrak{h}^{\perp}) \leq \dim O/2$ となるための必要十分条件は，$\dim H \geq \dim Y$ となることである．

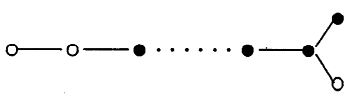
ところが $\dim H \geq \dim Y$ となるのは (I) 型と (II) 型の場合だけで，他の場合には $\dim H < \dim Y$ となっており，この場合別の $K$ の選び方を考えなければならない．講演では $K = H$ の場合いつもホロノミー系になるのではないかと述べたが，これは間違っていた．

**注意** Gelfand たちは，いわゆる A-hypergeometric equation の特別な場合として，$\mathfrak{n}^-$ 上の微分方程式系を考察している（Gelfand-Zelevinsky-Kapranov [GZK]）．この方程式系は，$K = H$ ととった場合の我々の方程式系 $\mathcal{M}$ を $\mathfrak{n}^-$ に制限したもの $\mathcal{M}|\mathfrak{n}^-$ の商 $D_{\mathfrak{n}^-}$-加群になっており，(I) 型と (II) 型についてのみ両者は一致している．[GZK] に即して言えば，我々の構成は，(II) 型の場合の A-hypergeometric equation のコンパクト化を与えたことになる．

(I) 型 (II) 型以外で $K$ をどのようにとるのがよいのか，まだよくわからないが，(III), (IV), (V) 型では，以下の Dynkin 図形の黒丸の頂点に対応する放物型部分群の極大簡約部分群を $K$ とすれば，$\mathcal{M}$ はホロノミー系になることがわかる．

(III) 

(IV) 

(V) 

**2.6.** 話がしりきれとんぼになってしまったが，まだ研究中の問題ということでお許し頂きたい．

今後考えるべき問題について，述べておこう．

（1）とりあえず問題なのは，$K$ の系統的な取り方を与えることである．(I) 型の場合でも，$K=H$ だけでなく，もっと一般に $\mathfrak{g}$ の正則元 $x$ の中心化群 $Z_G(x)=\{g\in G \mid (\mathrm{Ad}(g))(x)=x\}$ を $K$ とすることにより，合流型を含む超幾何方程式の拡張が得られることが知られており ([GRS], [KHT])，$K$ の取り方はいろいろな可能性があるものと思われる．

（2）パラメータ $\lambda$ として，本稿では (2.3.3) で与えられるものをとった．これは，ある意味で Verma 加群の最大真部分加群が最も大きくなる場合，すなわち $\mathcal{J}_\lambda$ が一番大きな場合であるが，もっと別の可能性もあるのかもしれない．仮定 (2.2.1), (2.3.2) のもとで，Verma 加群 $V(-\lambda)$ が可約になるための条件はよく知られており，b 関数の零点と関連していることがわかっている．(I) 型について言えば，方程式 (0.1) は 2 次の小行列式に対応しているが，より一般に高次の小行列式に対応する方程式を取ることも考えてもよいのかもしれないということになる．この場合 $K$ を，すなわち方程式 (0.2), (0.3) をどのように取り替えればよいのかは考えてないが，もっと別の意味のある方程式がでてくる可能性もあるかもしれない（このことに関しては，行者明彦氏から示唆を受けた）．

（3）本稿では方程式を定義するところまでしか考察していないが，方程式の解空間の性質等を詳しく調べることが重要な課題である．

（4）我々の本来の目的のひとつは，一般超幾何方程式の群論的意味を明らかにすることであった．これについては，ある程度明確になったので，その量子群版を考えるための指針は得られたと思う．量子群との関係については，Horikawa [H]，Noumi [N]，Horiuchi [H'] に (I) 型の場合の研究がある．

# 文献


[BB] A. Beilinson, J. Bernstein, Localisation de $\mathfrak{g}$-modules, C. R. Acad. Sci. Paris, **292** (1981), 15-18.

[Ge] I. M. Gelfand, General theory of hypergeometric functions, Soviet Math. Dokl., **33** (1986), 573-577.

[GG] I. M. Gelfand, S. I. Gelfand, Generalized hypergeometric equations, Soviet Math. Dokl., **33** (1986), 643-646.

[GRS] I. M. Gelfand, V. S. Retakh, V. V. Serganova, Generalized Airy functions, Schubert cells, and Jordan groups, Soviet Math. Dokl., **37** (1988), 8-12.

[GZK] I. M. Gelfand, A.V. Zelevinsky, M. M. Kapranov, Hypergeometric functions and toric varieties, Functional Anal. Appl., **23** (1989), 94-106.

[Go] A. B. Goncharov, Construction of the Weil representations of certain simple Lie algebras, Functional Anal. Appl., **16** (1982), 70-71.

[H] E. Horikawa, Contiguity relations for $q$-hypergeometric function and related quantum groups, Proc. Japan Acad., **68** (1992), 157-160.

[H'] E. Horiuchi, this volume.

[K] M. Kashiwara, Representation theory and $D$-modules on flag varieties, Astérisque., **173-174** (1989), 55-109.

[KHT] H. Kimura, Y. Haraoka, K. Takano, The Generalized confluent hypergeometric functions, Proc. Japan Acad., **68** (1992), 290-295.

[N] M. Noumi, Quantum Grassmannians and $q$-hypergeometric series, CWI Quarterly, **5** (1992), 293-307.

[ST] Y. Sakane, M. Takeuchi, On defining equations of symmetric submanifolds in complex projective spaces, J. Math. Soc. Japan, **33** (1981), 267-279.