数理解析研究所講究録
920 巻 1995 年 82-88

9. 近似代数を用いた制御系解析と設計

北本 卓也 (筑波大数学系)

9.1 序論

近年、佐々木により近似代数が提唱され [Sas 88]、佐々木またはその研究グループによりその理論や応用が研究されている。これまでの研究結果からだけでも近似代数が広い応用範囲を持つことが明らかになりつつある。例えば、[ONS 91] では近似 GCD を用いることにより、悪条件の代数方程式が安定に解けることが示されている。また、[Kit 94a] では近似固有値と固有ベクトルが定義され、それは [Kit 94b] で最適制御系の柔軟な設計に用いられている。[Kit 94c] では H_∞ 最適制御系の計算（悪条件になることが知られている）を安定に行なうために近似固有値と固有ベクトルが用いられている。

本稿は、近似代数を用いた新しい制御系解析と設計のための方法について述べる。この設計法ではパラメータをべき級数の形で表すため、設計者の定めた値の近傍でのみで有効であるが、柔軟に解析および設計を行なうことができる。具体的には、従来の設計法では難しかった時間領域での仕様を与えたり、最適制御を用いながらの極の存在範囲の指定などが可能である。また、数式モデルに実際のプラントとの誤差が存在した時に、これらの時間領域での仕様や極の存在範囲の指定が保持されるかどうかの検証も可能である。

また、これらの設計法は数式処理システム GAL 上に制御系 CAD システムとして実現されている。

9.2 制御系解析と設計

制御系設計を行なう場合、通常は以下の手順を踏む。

$Step1$ 制御対象の数式モデルを作り、仕様を定める。

$Step2$ 何らかの方法でコントローラを設計する。

$Step3$ できた制御系（制御対象＋コントローラ）が仕様を満たしているかどうか調べる。もし満たしていれば、制御系設計を終える。満たしていなければ仕様をもう一度定め、$Step2$ へ行く。

ただし、$Step1$ での数式モデルが次の形で表されるとし、（A, B, C, D は行列、x はベクトル）

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{1}$$

$$y = Cx + du \tag{2}$$

$Step2$ を設計ステージ、$Step3$ を解析ステージと呼ぶことにする。設計ステージではじめから全ての仕様を満足できるようにコントローラを設計できれば、次の解析ステージを行なわずにすみ、その結果、設計ステージに戻ってもう一度設計をやり直すことがなくなり、制御系設計が効率的に行なえる。しかしながら、現状ではそのような設計法は存在せず、試行錯誤で設計がなされている。例えば、現在最も注目されている H_∞ 制御においても、周波数領域での仕様を与えることはできるが、時間領域での仕様や極の存在範囲の指定を直接与えることはできない。

そこで近似代数を用い、様々な仕様を設計ステージで考慮でき、解析ステージを行なわずにすむような、制御系設計法を考える。特に次の仕様を考えることにする。

仕様 1 ステップ応答における、与えられた時間 t_0 における状態 x または 出力 y の値が与えられた値以上または以下である。

仕様 2 システムの極が全て、図 1 の斜線部に存在する。（ただし、α, β は設計者が与える値）

仕様 3 伝達関数の与えられた周波数における絶対値が決められた値以下である。

仕様 4 プラントの中にあるパラメータ（数式モデルのモデル誤差を表す）が与えられた区間の中で変化しても、上の仕様が満たされる。

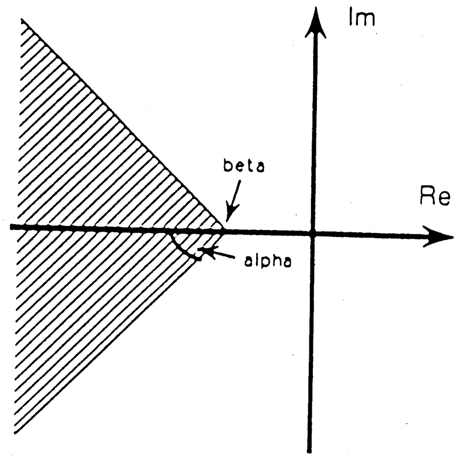

図１：システムの極の存在範囲

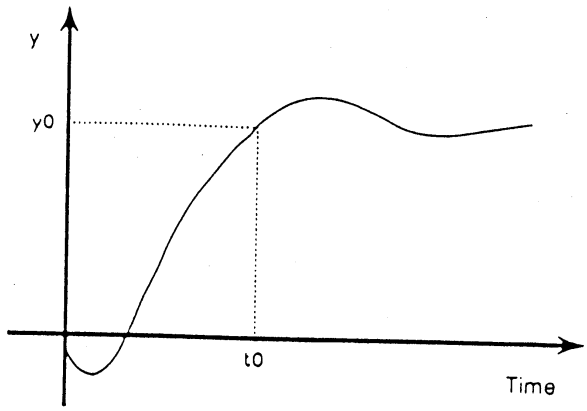

図２：ステップ応答

9.3 近似代数を用いた制御系設計法

基本的なアルゴリズムは以下の通りである。

*Step*1何らかの方法で設計パラメータをべき級数の形で含ませたまま、コントローラを設計する。

*Step*2仕様１〜４が満たされるように、設計パラメータを決める。

以下、それぞれのステップについて説明する。

9.3.1 設計ステップ１

*Step*1 では近似代数の考えを用い、設計パラメータをべき級数の形で含ませたまま、コントローラを設計する。例えば、設計法として H_2 最適制御を用いると次の評価関数 J （ただし、Q, R は正定対称行列）

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u)\, dt \tag{3}$$

を最小化するようにコントローラを設計するが、[Kit 94a] にあるように Q または R の対角要素を設計パラメータとして、べき級数の形で残してまま制御系を設計する。この他、H_∞ 制御においても同様のことが行なえる。また、H_∞ 制御の場合には H_∞ ノルム γ を設計パラメータとして残すことも可能であり、H_∞ ノルムの最小化と他の仕様とのトレードオフをとりながら、設計をすることが可能である。

9.3.2 設計ステップ 2

ここでは設計ステップ 1 において、コントローラが設計パラメータをべき級数の形で含んだまま設計できたと仮定し、そのコントローラでフィードバックをかけたシステムが次の形に書けるとする。(ただし、$\tilde{A}$ は要素が設計パラメータのべき級数である正方行列)

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} \tag{4}$$

まず、このシステムの伝達関数 $f(s)$ を計算する。

$$\begin{aligned} f(s) &= \frac{1}{s}(sI - \tilde{A})^{-1}x_0 && (5) \\ x(0) &= x_0 && (6) \end{aligned}$$

まず、仕様 1 〜 4 を満たすために設計パラメータが満たすべき条件を述べる。

■仕様 1 について

数値的逆ラプラス変換を用いる。すなわち、評価するべき時間 t_0、ステップ応答の伝達関数 $f(s)$ が与えられた時、次式

$$g(t_0) = \frac{e^a}{t}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \mathrm{Im}\left(f\left(\frac{a + i(n-0.5)\pi}{t}\right)\right) \tag{7}$$

(ただし、$g(t_0)$ は伝達関数 $f(s)$ で表されるシステムの時間 t_0 における応答、a は適当な正定数、i は純虚数) を用いて t_0 での $f(s)$ で表されるシステムの応答を近似的に計算する。今、$f(s)$ は設計パラメータをべき級数の形で含んでいるので計算結果も設計パラメータをべき級数の形で表される。これを $g(\rho_1, \ldots, \rho_k)$ とおくと結局、仕様 1 は一般性を失うことなく

$$g(\rho_1, \ldots, \rho_k) \leq 0 \tag{8}$$

で表される。

■仕様 2 について

適当に座標変換した後、ラウス・フルビッツ の安定判別法を用いる。ラウス・フルビッツ の安定判別法は多項式の係数の加減乗除の正負により、その根 λ_i のすべてが左半平面（$\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$）にあるかどうかを判定するので、そのための条件は一般性を失わずに、次のように表される。(ただし、$h(\rho_1,\ldots,\rho_n)$ は設計パラメータ $\rho_1,\ldots,\rho_n$ のべき級数)

$$h_i(\rho_1,\ldots,\rho_n) \leq 0 \tag{9}$$

■仕様 3 について

問題となっている伝達関数（設計パラメータのべき級数を含む）を $g(s)$ とすると、周波数 ω における絶対値 $||g(i\omega)||$ は

$$\begin{aligned} ||g(i\omega)|| &= g(i\omega) \\ &= \sqrt{(\mathrm{Re}(g(i\omega)))^2 + (\mathrm{Im}(g(i\omega)))^2} \end{aligned}$$

よって $||g(i\omega)||$ も設計パラメータのべき級数で表される。ゆえに仕様 3 は、一般性を失わずに

$$l_i(\rho_1,\ldots,\rho_n) \leq 0 \tag{10}$$

（ただし、$l_i(\rho_1,\ldots,\rho_n)$ は ρ_j のべき級数）と書き表せる。

■仕様 4 について

実際の制御系設計では、モデルを作る際のモデル誤差やプラントにおけるパラメータ変動を避けることはできない。よってそういうことが起こっても、制御系の挙動があまり変化しないで安定な状態を保つことが重要である。いま、プラントが不確定なパラメータ k を含み k は $k_0 \leq k \leq k_1$ で変化すると仮定する。この時、伝達関数 $f(s)$ が k を含む $f_k(s)$ となったすると、上の仕様 1 〜 3 を満たすためには、次を満たせば良い。

$$\min_{k_0 \leq k \leq k_1} m_i(k,\rho_1,\ldots,\rho_n) \leq 0 \tag{11}$$

ここで $\rho_1,\ldots,\rho_n$ が与えられれば k は決定されるので実際には上式の左辺は $\rho_1,\ldots,\rho_n$ のみの関数である。よってこれを新たに $q_i(\rho_1,\ldots,\rho_n)$ とおくと、仕様を満たすためには

$$q_i(\rho_1,\ldots,\rho_n) \leq 0 \tag{12}$$

を満たせば良いことになる。ここで $\rho_1,\ldots,\rho_n$ が与えられた時に実際に k を決めるには、k も他の設計パラメータと同様にべき級数展開し、$\frac{\partial}{\partial k} m_i(k,\rho_1,\ldots,\rho_n) = 0$ の k の実数根（これは k に関して

極値をとる点）を計算する。これと k の境界における値を比較し、もっとも小さい値をとる k をとれば良い。

9.3.3 設計パラメータの決定

以上より仕様 1 〜 4 を満たすための設計パラメータの条件は一般性を失わずに次の形に書ける。

$$p_1(\rho_1, \ldots, \rho_n) \leq 0 \tag{13}$$

$$p_2(\rho_1, \ldots, \rho_n) \leq 0 \tag{14}$$

$$\cdots$$

$$p_l(\rho_1, \ldots, \rho_n) \leq 0 \tag{15}$$

後は、この条件の元である評価関数を最大化するように設計パラメータ $\rho_1, \ldots, \rho_n$ を決めれば良い。これには逐次 2 次計画法という数値的最適化手法を用いる。この算法は必ずある解に収束することが保証されているが、ローカルミニマムに入り込む可能性があるので初期値を変えて何度も計算する必要がある。

9.4 数値例

当日、OHP で示す。

9.5 結論

近似代数を用いた、新しい制御系の設計、解析法を提案した。提案した手法を用いると、時間応答、周波数応答、モデル誤差等を一度に考慮した制御系設計が行なえ、試行錯誤する必要が少なくてすむ。問題を解くために数値的最適化手法を用いているので、得られた解が必ずしも最適解とはいえないことや、べき級数を用いることによる数値的誤差の影響などの問題点がある。これらの解決が今後の課題である。

参考文献

[Kit 93]　T.Kitamoto "Approximate eigenvalues, eigenvectors and inverse of a matrix with polynomial entries," submitted to Jpn. J. Indus. App. Math.

[KT 78] H.T.Kung and J.F.Traub "All algebraic functions can be computed fast," J.ACM 25 pp. 245–260, 1978.

[Sas 88] T.Sasaki "Approximate Algebraic Computation (in Japanese)," Suriken-Kokyuroku (Collection of Research Reports, Research Institute of Mathematical Study, Kyoto University) Vol 676, pp.307–319, 1988.

[SK 93] T.Sasaki and F.Kako "Solving Multivariate Algebraic Equation by Hensel Construction, " preprint (Univ. of Tsukuba and Nara Women Univ.), 22 pages, Jan. 1993.

[SN 89] T.Sasaki and M.Noda "Approximate square-free decomposition and root-finding of ill-conditioned algebraic equation," J. Inform. Process., Vol 12, pp.159–pp.168, 1989.

[SS 92] T.Sasaki and M.Suzuki "Three New Algorithms for Multivariate Polynomial GCD," J.Symb. Comput. 13, pp. 395–411, 1992.

[SSKS 91]T.Sasaki, M.Suzuki, M.Kolar, M.Sasaki "Approximate Factorization of Multivariate Polynomials and Absolute Irreducibility Testing," Jpn. J. Indus. Appl. Math. Vol.8, No. 3, pp. 357-375, October 1991.

[ONS 91] M.Ochi, M.Noda and T.Sasaki "Approximate GCD of multivariate polynomials and application to ill-conditioned algebraic equation," J. Inform. Process., Vol 14, 1991.

[Togawa] H.Togawa "Handbook of Numerical Methods," Saiensu Pub. Co., Tokyo, 1992.