数理解析研究所講究録
921巻 1995年 137-143

Gabor Transform と乱流の Anomalous Scaling

都立大、理 勝山智男 (Tomoo Katsuyama)
都立大、理 井上雅人 (Masato Ioue)
都立大、理 永田研一 (Ken-Ichi Nagata)

1：はじめに

Anselmet等は、n次構造関数のスケーリング指数ζ_nがnに対して非線形になるという性質（いわゆるanomalous scaling）を実験的に示した[1]。この実験以来、乱流の速度ゆらぎ構造のマルチフラクタル性に注目が集まっている。この現象を説明するマルチフラクタルなカスケードモデルが数多く提唱された（例えば、Benzi *et al.*[2]、Meneveau and Sreenivasan[3]など）。我々は、これまでに、乱流速度のバンドパス信号（Q=4）のモーメントの周波数依存性を実験的に調べ、バンドパス信号が、慣性領域周波数において、構造関数と同様のanomalous scaling lawを示すことを明らかにした[4]。このことは、信号の確率密度分布（PDF）が、フィルターの中心周波数の増加にともないガウス分布からずれてくることを意味する。このPDFの非ガウス性は、粘性領域周波数ではきわめて顕著である。すなわち、バンドパス信号は、慣性領域周波数に比べて粘性領域周波数においてより間欠的である。このようなPDFの周波数依存性は、速度ゆらぎの自己相似的構造の破壊を反映しており、また、間欠性が基本的には粘性領域の現象であることを示している。

非圧縮Navier-Stokes方程式は、非粘性の極限で、スケーリング変換に対して不変である[5]。このスケーリング変換不変性は、スケーリング指数ζ_nがnに対して線形であることを示唆している。そこで、非線形ダイナミックス自身が、anomalous scaling lawをもたらすのかどうかが問題となる。このことを明らかにするために、我々は乱流の速度ゆらぎ信号のガボール（Gabor）変換係数のモーメントのスケーリング的性質を調べた。ガボール変換は、電気的バンドパスフィルターでは得られないような大きなQ値（quality factor）のフィルターを容易に実現することができる、一種の解析的フィルターである。本研究では、電気的バンドパスフィルターのような小さなQ値のフィルターを通過した乱流速度ゆらぎ信号や構造関数（実効的Q値はきわめて小さい）に対して得られるζ_nの非線形性が、主に粘性領域間欠性による汚染によるものであることを明らかにする。さらに、十分にQが大きいときには、ガボール変換係数のPDFは、慣性領域ではほぼガウス型になることを示す。

2：ガボール変換

ガボール変換はガウス型窓関数を持つ局所フーリエ変換で、

$$G[u(t)](\Omega,\sigma,t')=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}u(t)\cos[\Omega(t-t')+\theta]\exp\left[-\frac{(t-t')^2}{2\sigma^2}\right]dt,\quad (1)$$

で表される。ここで、Gはガボール変換オペレーターを表す。また、σは窓関数の広がりを表し、Ωは角周波数、θは位相である。ガボール変換は、基本的にはフーリエ変換と同様に信号$u(t)$から角周波数Ωの成分を取り出す変換であるが、変換が局所的である点でフーリエ変換と異なる。ガボール変換の、時間-周波数領域の窓は、時間幅$\Delta t=\sqrt{2}\,\sigma$、周波数幅$\Delta\Omega=\sqrt{2}/\sigma$で与えられる。$\Delta t$はガボール変換の時間分解能、$\Delta\Omega$は周波数分解能で、両者は不確定性関係$\Delta t\,\Delta\Omega=2$で結ばれている。ガボール変換でのQ値（$Q=\Omega/\Delta\Omega$で定義される）は、$Q=\Omega\sigma/\sqrt{2}$で与えられる。フィルターを用いて信号のスペクトル分布を決めるにはフィルターのQ値を一定に保つ必要がある。このことはガボール変換によるスケーリング解析においても重要である。パラメーターΩとσで表現されている（1）式を、上の関係式を用いてQとσで表すと、

$$G_Q u(\Omega,t')=\int_{-\infty}^{\infty}u(t)\,g_Q(\Omega,t-t')\,dt \quad (2)$$

となる。ここで、Qが一定のガボール変換オペレーターをG_Qで表した。また、右辺のガボール関数は

$$g_Q(\Omega,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\frac{\Omega}{Q}\cos(\Omega t+\theta)\exp\left[-\left(\frac{\Omega}{2Q}t\right)^2\right] \quad (3)$$

で与えられる。ガボール関数はガウス関数のエンヴェロープを持った波束を表す。関数g_Qは、Qが一定であるときΩだけの関数であり、Ωに関して相似形を保つ。この性質は、G_Qが信号$u(t)$の自己相似的構造を取り出す上で必要な条件である。我々はQを固定して乱流速度ゆらぎ信号$u(t)$をガボール変換し、係数$G_Q u$のモーメントのΩに対するスケーリング指数を求め、そのQ依存性を調べた。モーメントは位相θにはよらないので、θは任意にとることができる。ここでは$\theta=0$とした。

比較のためウェーヴレット変換

$$W_g u(a,t')=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}u(t)\,g^*\left(\frac{t-t'}{a}\right)dt \quad (4)$$

に対するスケーリング則も調べた。ここで、$g(t)$はマザーウェーヴレット（mother wavelet）、aはスケールである。用いたマザーウェーヴレットは、(i) メキシカンハット、(ii) ガウス関数の1階微分、(iii) フレンチハット、(iv) δ関数、$g(t)=\delta(t+\Delta t)-\delta(t)$の4つである[6]。(iv) の$\delta$関数ウェーブレット変換の$2n$次モーメントは$2n$次の構造関数を与える。現在までの乱流のスケーリング解析の多くはこの構造関数に対してなされている。

乱流速度ゆらぎ信号のウェーヴレットおよびガボール変換信号の例を図1に示す。(a)

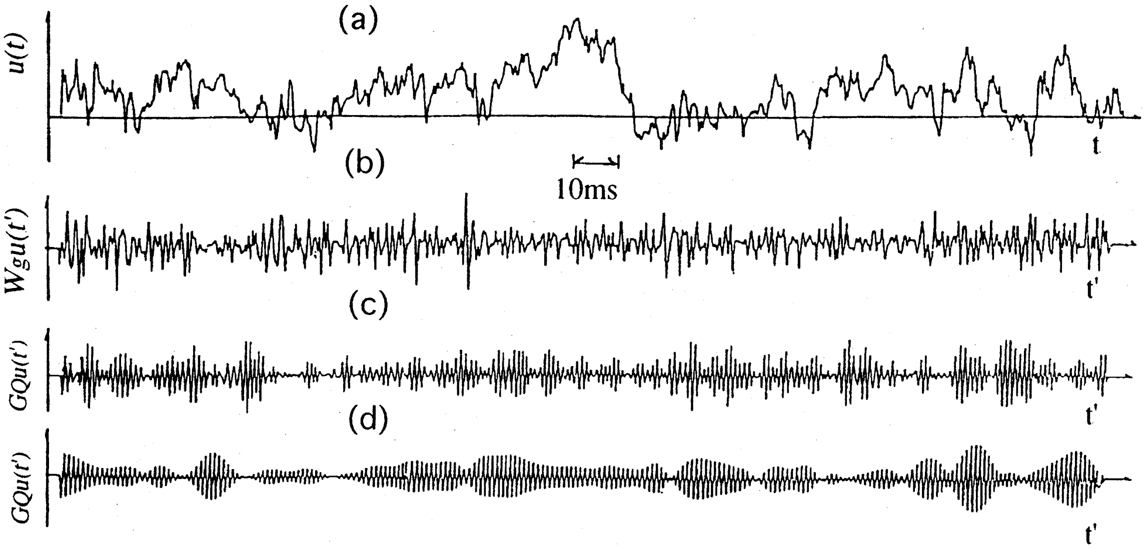

図1

は原信号$u(t)$、(b)はそのウェーヴレット変換係数（メキシカンハット）、(c)と(d)はそれぞれQ=4.4および13のガボール変換係数である($\Omega/2\pi$=1kHz)。(b)の波形は正弦波的でなく、広い周波数範囲を含んでいる。これはウェーヴレット変換が周波数幅の広いバンドパスフィルターに相当することを表している。これに対して(c)と(d)は正弦波の波束の連なりと見ることができる。波束の平均的長さはQの大きい(d)の方が長い。すなわち大きなQ値のガボール変換は狭いバンド幅のフィルターに相当する。(b)-(d)の波形はQ値の異なる信号は統計的性質が異なることを示唆している。

3：ガボール変換係数のQ依存性

ジェット乱流の速度変動（平均流速方向成分）$u(t)$の測定には、X形熱線プローブおよび定温度型熱線流速計を用いた。さらに、流速計出力を12ビット分解能でAD変換し、2, 5, 10, 30, 100, 300, 1000μsの時間間隔でサンプリングして時系列データを得た。Gabor変換係数は、それぞれのサンプリングレートで得られた1.6×10^6個のデータから、パーソナルコンピューターによって計算された。平均流速はU=15m/s、乱流レイノルズ数はR_λ=270であった。図2に$u(t)$の1次元エ

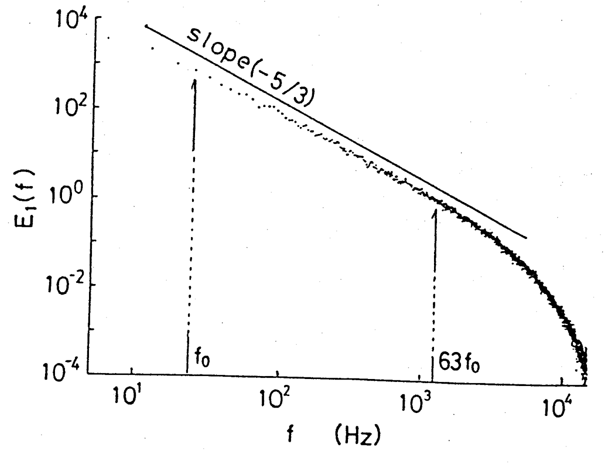

図2

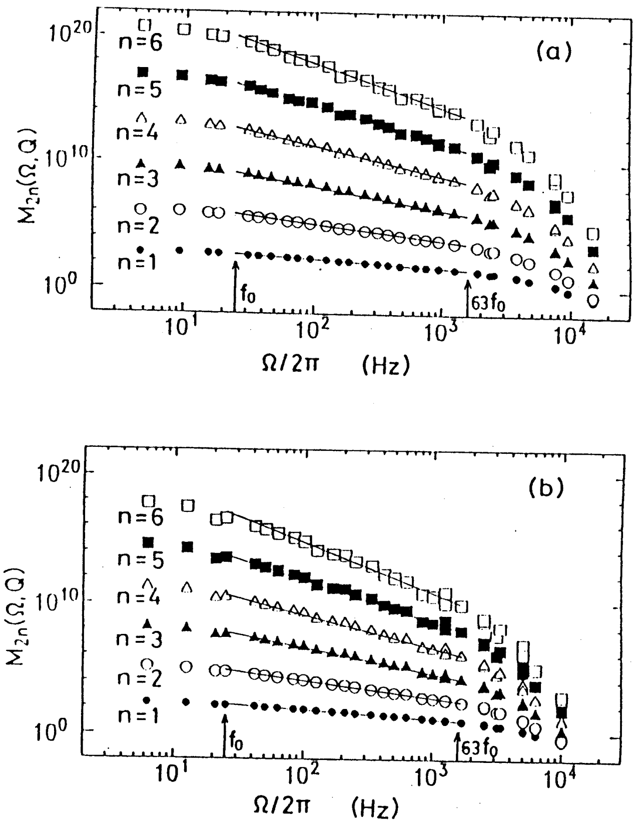

図3

ネルギースペクトル分布$E_1(f)$を示す（fは周波数）。慣性領域は周波数f_0から$63f_0$（f_0は積分スケール）の間である。図3は、Gabor変換係数$G_Q u$の$2n$次モーメント$M_{2n}(\Omega, Q)$対周波数$\Omega/2\pi$の両対数プロットの例である（aはQ=27、bはQ=89）。ここで矢印は慣性領域の両端を示す。慣性領域において、$M_{2n}(\Omega,Q)$は、良い近似でスケーリング則

$$M_{2n}(\Omega,Q) \propto \Omega^{-\zeta_{2n}(Q)} \qquad (5)$$

に従うことがわかる。スケーリング指数$\zeta_{2n}(Q)$は、慣性領域における$M_{2n}(\Omega,Q)$対$\Omega/2\pi$の両対数プロットに最小二乗法を適用することによって得た。

図4は1.6から89までの5つの異なるQ値における$\zeta_{2n}(Q)$のn依存性を示す。直線はKolmogorov scaling $\zeta_{2n}(Q)=2n/3$を示す。すべてのQについて$\zeta_{2n}(Q)$は直線$\zeta_{2n}(Q)=2n/3$からずれており、そのずれは次数nの大きいところでより顕著である。また、Qの増大にともない、$\zeta_{2n}(Q)$は次第に直線$\zeta_{2n}(Q)=2n/3$に

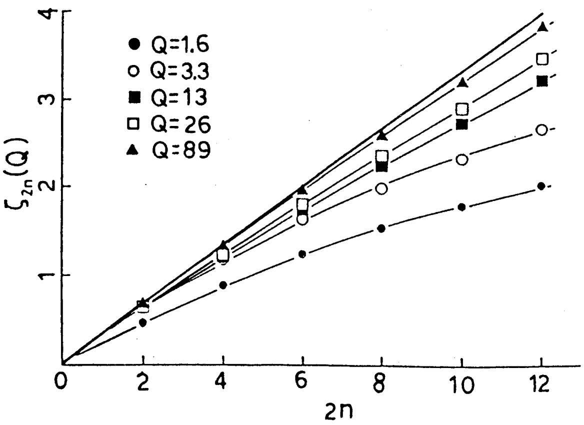

図4

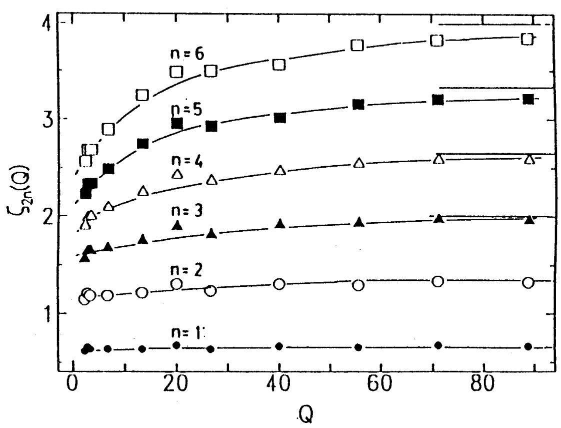

図5

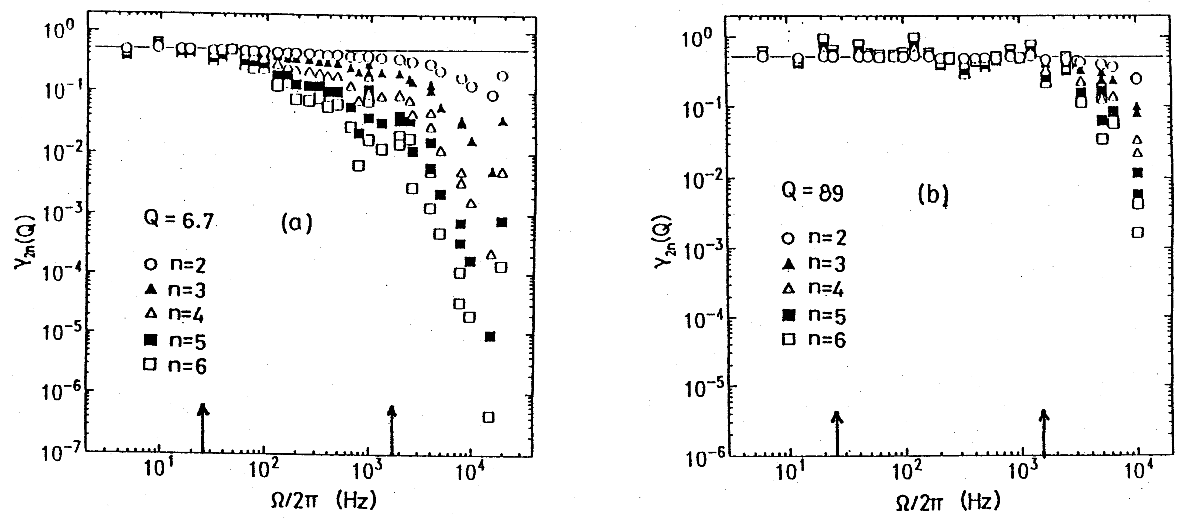

図6

近付く。このふるまいから、バンド幅の十分狭いフィルターを通った乱流速度ゆらぎ信号はコルモゴロフ的スケーリングを示すことが示唆される。一方、anomalous scalingは、Qの小さなフィルターにおいて顕著である。　　　図5にζ_{2n}(Q)のQ依存性を示す。ζ_{2n}(Q)曲線はQ<10の領域で変化が急である。このことは、バンド幅の広い（Qが小さい）フィルターを用いたスケーリング解析によって得られたスケーリング指数が、（少なくともレイノルズ数が300程度の乱流に対しては）間欠性の影響を受けていて、その影響はQが大きくなるに従い減少することを示している。このことは、anomalous scalingが広いバンド幅によって取り込まれた粘性領域間欠性の効果によるものであることを示唆している。

スケーリング指数ζ_{2n}(Q)がnの非線形関数になるということは、信号$G_Q u$の統計が周波数Ωに依存して変化することを意味する。$G_Q u$の統計分布（PDF）はファクター

$$\gamma_{2n}(Q) = (2n-1)!!/2 \cdot [M_2(\Omega,Q)]^n / M_{2n}(\Omega,Q) \qquad (6)$$

で記述することができる。$G_Q u$のPDFがGaussianであるとき、すべての次数$2n$においてγ_{2n}(Q)=1/2となる。乱流の間欠性はPDFのGaussianからのずれをもたらす。この意味で、γ_{2n}(Q)を$2n$次の間欠度と呼ぶことができる[4]。

図6(a)および(b)はそれぞれQ=6.7および89におけるγ_{2n}(Q)対$\Omega/2\pi$の両対数プロットである。2つの矢印は慣性領域の両端（f_0および$63f_0$）を示す。PDFがGaussian、すなわちγ_{2n}(Q) =1/2となる周波数領域は、Qが小さいときにはf_0近くの極めて狭い領域に限られるのに対し(a)、Qが大きくなると高い周波数にまで及び、ほぼ慣性領域全体を覆うようになる(b)。すなわち、Qが大きいとき、$G_Q u$は全慣性領域にわたってほぼGaussianであり、Gaussianからのずれは散逸領域（$\Omega/2\pi>63f_0$）において急激に目立つようになる。乱流の間欠性は本来散逸領域の現象である。図6(b)は十分に狭いバンド幅を持ったフィ

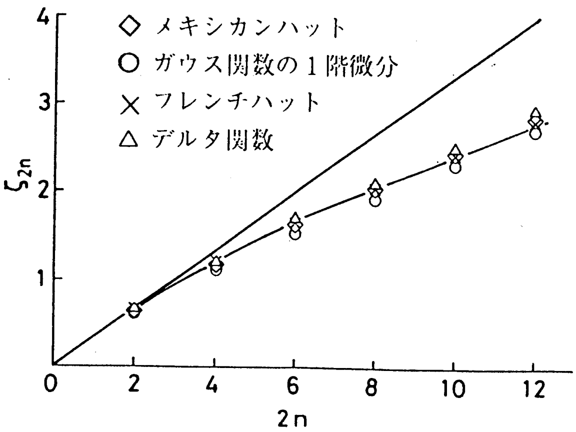

図7

ルターを用いれば、間欠性は慣性領域においては、極めて弱い（または観測されない）ことを示している。一方、図6(a)は、フィルターのQ値が小さい場合には、間欠性の効果の及ぶ周波数範囲が粘性領域から広く慣性領域内に滲み出して、慣性領域でのスケーリング解析が汚染される可能性を示している。

ガウス分布からのずれをもたらす間欠的要因は$u(t)$の時系列上に現れる「スパイク」で表現しても良いだろう。スパイクはランダムに出現し、その正負もランダムであるとする。このようなランダムスパイク列に対してガボール変換を施したとき、次の２つの場合が考えられる。Qが小さい場合、ガボール関数の広がりは狭いので、ガボール変換は各スパイクを個々に識別できるが、Qが大きくなるとガボール関数の広がりの中に多くのスパイクが入って互いに相殺する効果を持つ。Qの大きいガボール変換信号が間欠性の影響を受けず、従って、anomalous scaling を示さないのは、乱流信号の間欠的要因が、ここで仮定したように、本質的にランダムで、高い周波数成分を持っているためと考えることが出来る。

ウェーヴレット変換係数に対しても、ガボール変換係数と同様の手続きで、スケーリング指数を求めることができる[7]。図７にウェーヴレット変換係数に対するスケーリング指数ζ_{2n}の$2n$依存性を示す。測定した$2n$の範囲内ではζ_{2n}の曲線はウェーヴレット(i)-(iv)によらず、いずれもガボール変換のQ=3.3に対するζ_{2n}曲線にほぼ一致する。このことは、構造関数(iv)に対するスケーリング解析が粘性領域間欠性の影響を強く受けてしまうことを示唆している。

４：結論

実験室で得られるような中間レイノルズ数乱流(R_λ～300)において、構造関数に代表されるQの小さなフィルターによるスケーリング解析は、粘性領域間欠性の影響を強く受け、純粋な慣性領域のスケーリング的性質を与えない。また、十分に広い慣性領域を持つ乱流においては、粘性領域間欠性による汚染は無視できるであろうから、anomalous scaling は現れないものと思われる。実際の乱流の慣性領域はもちろん有限であり、その高周波数側では、粘性の無視できない領域が存在するものと考えて良いだろう。実際、Anselmet等のデータを見ると、高次の構造関数の、距離に対する両対数プロッ

トは明らかに上に凸である。我々のデータ（図3）も同様である。これらのデータは、間欠性の効果が粘性領域から慣性領域の内部にまで及び、慣性領域におけるスケーリング変換不変性を破壊していることを示唆している[7,8]。これまで報告された実験室乱流における anomalous scaling は、こうした粘性による自己相似性の破れに起因する可能性がある。

References

[1] F.Anselmet, Y.Gagne, E.J.Hopfinger, and R.A.Antonia; J.Fluid Mech. 140, 63(1984).

[2] R.Benzi, G.Paladin, G.Parisi, and A.Vulpiani; J.Phys. A17, 3521(1984).

[3] C.Meneveau and K.R.Sreenivasan; Phys.Rev.Lett. 59, 1421(1987).

[4] T.Katsuyama, Y.Horiuchi, and K.Nagata; Phys.Rev E49,4052(1994).

[5] U.Frisch; in Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics, Varenna Summer School LXXXVIII, ed. M.Ghill, R.Benzi, and G.Parisi (North-Holland, Amsterdam, 1985).

[6] R.K.Young; Wavelet theory and its application, (Kluwer Academic Pub., 1993).

[7] T.Katsuyama, M.Inoue, and K.Nagata; Proceedings of ICDC-1994 Tokyo, to be published.

[8] T.Katsuyama, M.Inoue, and K.Nagata; Phys.Rev.E50 (1995), to be published.