数理解析研究所講究録
921 巻 1995 年 182-187

圧縮性乱流のモデリングに関する研究

東大工学部　藤原仁志 (Fujiwara Hitoshi)
東大工学部　荒川忠一 (Arakawa Chuichi)

1. 緒　　言

平均速度が音速と同じオーダーになる高速流では, 乱れ速度もまた音速と同じオーダーとなる可能性がある。このような流れの計算では, 乱流における圧縮性の影響, つまり密度の変動や乱れ速度の発散 ($d' \equiv \nabla \cdot u'$) が 0 でないことによる影響を原則として考慮する必要がある。しかし, 現在では圧縮性流れの計算にも非圧縮性を仮定した乱流モデルをそのまま用いることが多く, それなりの成果をあげている。一方, 超音速燃焼器内に生じる混合層の拡大率の数値計算では, 非圧縮性を仮定した乱流モデルを用いても実験値と一致する結果が得られない。このため, 圧縮性を考慮した乱流モデルを構築し, それを組み込んで計算を行なおうとする試みが多数なされている。そのうち、圧縮性の影響を示す項のひとつである dilatation dissipation ($\epsilon_d \equiv 4/3\,\overline{d'^2}$) のモデル化を提案したのが Sarkar ら [(1)] である。Sarkar らはそのモデルを用いて超音速混合層を計算し、対流マッハ数の増加に伴って拡大率が減少することを示したことで非常に注目された。Sarkar らのモデルは dilatation dissipation(ϵ_d) を 非圧縮性の $k-\epsilon$ モデルで計算した散逸率 (ϵ_s) に乱流マッハ数の 2 乗を掛けたものとする ($\epsilon_d = \epsilon_s M_t^2$) という非常に簡単なものであり、計算上の負荷がほとんど生じない。しかし、Huang & Bradshow ら [(2)] の圧縮性境界層の計算結果では、このモデルを適用した場合、境界層内での流速分布が過大な散逸率のため実験値から大きくずれてしまっている。dilatation dissipation という付加的な散逸率を設定することにより超音速混合層の拡大率を減少させることに成功しているが、境界層ではトータルの散逸が実際の値より大きくなり過ぎて実験値から大きくずれるという問題が起こっている。一方、これとは全く異なる方法である線形安定理論を用いて超音速混合層の拡大率の低下を予測している研究がある (例えば文献 [(3)])。これらの計算は、基本的に非粘性を仮定しており、dilatation dissipation など全く考慮していないが、確かに対流マッハ数の増加に伴って混合層の拡大率が減少しており興味深い。最近の研究では、Papamoschou & Lele[(4)] が混合層の成長率低下の原因は圧力−歪相関項にあることを示した。圧縮性の影響が大きくなると y 方向の乱れ $\overline{v'^2}$ の source 項である $\overline{v\,\partial p/\partial y}$ が小さくなり、流れ方向の速度乱れ $\overline{u'^2}$ から $\overline{v'^2}$ へのエネルギー伝達がうまくいかなくなることが成長率低下の主な原因であるとしている。また、Goebel & Dutton[(5)] の混合層の実験でもマッハ数の増加に伴って $\overline{u'^2}$ に比べて $\overline{v'^2}$ の減少が著しいことが報告されており、上記のメカニズムを支持している。一般に、圧縮性のせん断層では 3 方向の乱れ $\overline{u'^2}, \overline{v'^2}, \overline{w'^2}$ の間のエネルギーのやり取りを決める圧力−歪み相関項 $\overline{p\,\partial u/\partial x}$, $\overline{p\,\partial v/\partial y}$, $\overline{p\,\partial w/\partial z}$ の合計は非圧縮性の場合のように 0 にならず負になることが知られており、この合計 (これを pressure-dilatation 相関項 $\overline{p'd'}$ と言う) の分だけ乱れエネルギーにもれが生じることがわかる。Papamoschou & Lele らの主張が正しいとするならば、混合層における圧縮性の影響はこの $\overline{p'd'}$ に集約されているといえ、これを正確にモデル化することが最も重要であると考えられる。本研究では, この pressure-dilatation 相関項について考察し、この項が乱流マッハ数 M_t だけでなく、乱流レイノルズ数 Re_T、平均流の歪みの強さ S^*(または P_k/ϵ) などの関数であることを示した。これらを用いてモデル化を行なった結果、この項は乱流マッハ数 M_t の 1 乗に比例することがわかった。また、圧縮性一様乱流の direct simulation を行なってモデルを評価した後、これを k-ϵ モデルに組み込んで圧縮性混合層と平板境界層の計算を行ない有効性を確かめた。

2. 圧縮性一様乱流の direct simulation

一様減衰・せん断乱流の direct simulation を行なった。表 1 に初期条件を示す。$M_t(\equiv q/\overline{a})$ は乱流マッハ数 (乱れ速度 $q \equiv \sqrt{2k}$ と平均音速 $\overline{a}$ の比)、$Re_T(\equiv q^4/(\nu\epsilon))$ は乱流レイノルズ数、$S^*(\equiv \sqrt{S_{i,j}S_{i,j}} \cdot k/\epsilon)$ は流れ場の歪み度を示す。時間進行には 3 次の runge-kutta 陽解法、空間微分にはスペクトル法を用いた。せん断流のシミュレーションでは、流れ方向に長い、流れに乗って動くグリッドで計算し、グリッドが 45 度傾いた時点でグリッドを remesh した (図 1 参照)。

表 1. 初期条件

	M_t	Re_T	S^*	grid
IS1	0.23	100	0	64^3
IS2	0.46	100	0	64^3
SH1	0.26	242	4.3	$192 \times 96 \times 96$
SH2	0.40	242	4.3	$192 \times 96 \times 96$
SH3	0.26	242	8.7	$192 \times 96 \times 96$

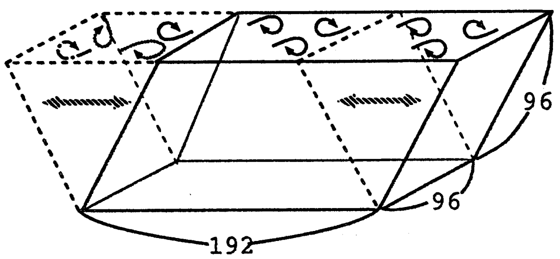

図 1. 一様せん断流の計算格子

図2–3に、等方減衰乱流(IS1)の乱れエネルギーの変化とせん断乱流(SH1)のレイノルズ応力を示す。

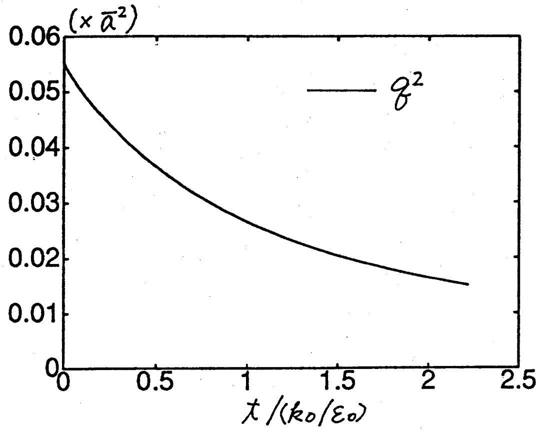

図 2. 等方減衰乱流の乱流エネルギー

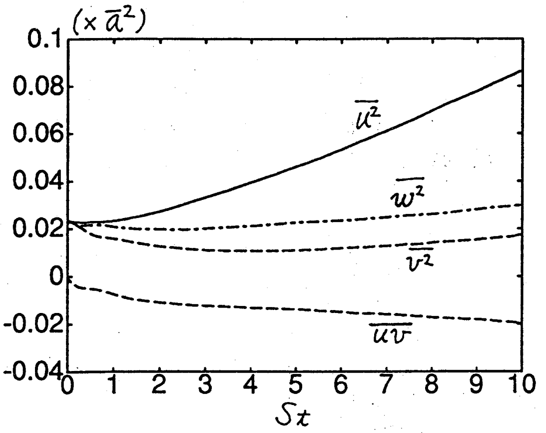

図 3. 一様せん断乱流のレイノルズ応力

3. Pressure–dilataion 相関項

乱流エネルギー $k(\equiv q^2/2 \equiv \overline{u'_j u'_j}/2)$ の輸送方程式(圧縮性)は、

$$
\begin{aligned}
\frac{Dk}{Dt} &= P_k - \epsilon + \overline{p'd'}/\overline{\rho} - (\text{diffusion terms}), && (1)\\
P_k &= -\overline{u'_i u'_j}\,\overline{u}_{i,j}, && (2)\\
\epsilon &= \epsilon_s + \epsilon_d = \nu\overline{\omega'_j\omega'_j} + 4/3\,\nu\overline{d'^2}. && (3)\\
d' &= u'_{j,j}. && (4)
\end{aligned}
$$

$\overline{p'd'}$ が主要な圧縮性影響を示す項であり、これのモデル化について以下のように考える。まず、$\overline{p'd'}$ を

$$\overline{p'd'} = f_{\Pi_d}\sqrt{\overline{p'^2}}\sqrt{\overline{d'^2}}, \quad (5)$$

のように、$\overline{p'^2}$, $\overline{d'^2}$ と相関係数 f_{Π_d} を用いて示し、この3つについて各々考察する。

3・1 $\overline{p'^2}$ のモデル化

まず $\overline{p'^2}$ であるが、これを速度変動と

$$\sqrt{\overline{p'^2}} = C_p\,\overline{\rho}\,q^2, \quad (6)$$

のように関係付ける。ここで、C_p は圧力変動と速度変動を関係付ける係数であるが、一般に slow pressure しか存在しない減衰乱流に比べ、rapid pressure も存在するせん断流のほうが C_p は大きくなることが知られている。このことは、C_p がせん断パラメータ S^* もしくは k の生産率と散逸率の比 P_k/ϵ の増加関数であることを示している。また、壁近傍では、速度変動の急激な増加に際しても圧力変動はそれほど大きく増加しないことが知られており、Shikazono & Kasagi[6] は C_p を

$$
\begin{aligned}
C_p &= \sqrt{A}\left(C_{ps} + C_{pr}\frac{P_k}{\epsilon}\right), && (7)\\
A &= 1 - 9/8(a_{ij}a_{ij} - a_{ij}a_{jk}a_{ki}), && (8)\\
a_{ij} &= \overline{u'_i u'_j}/k - 2/3\delta_{ij} && (9)
\end{aligned}
$$

のようにモデル化している。A は Lumley の flatness parameter で[10]、等方乱流で $A = 1$、2次元乱流で $A = 0$ となるため、壁面近傍での dumping parameter として用いることが出来る。また、C_{ps} と C_{pr} はそれぞれ slow pressure と rapid pressure に対応する定数で、P_k/ϵ については、圧力–歪み相関項の slow 項と rapid 項の最も簡単なモデルがそれぞれ、$\phi^s_{ij} = -c_1\,\epsilon\,(\overline{u'_i u'_j}/k - 2/3\delta_{ij})$ と $\phi^r_{ij} = -c_2\,P_k\,(P_{ij}/P_k - 2/3\delta_{ij})$ のようになり、大きさの比がおおよそ P_k/ϵ になっていることに対応していると言える。以上の C_p に関する性質は非圧縮性乱流の研究から得られたものであるが、圧縮性せん断乱流においても同様に、C_p は P_k/ϵ に応じて増加し、壁面で非等方度が強くなるにつれて小さくなるので、これらの性質を反映した式(7)は圧縮性乱流においても有用である。圧縮性の影響についてはどうかを考えるため、圧力 p' をポアソン方程式から得られる非圧縮性成分 p'_I と圧縮性成分 p'_C に分離する試みもあるが、Blaisdell ら[7] によると p'_I と p'_C には強い相関があり分離して考察することは必ずしも妥当でない。また、Sarkar[9] によると、pressure–dilataion 相関項を $\overline{p'_I d'}$ と $\overline{p'_C d'}$ に分解した場合、非圧縮性成分との相関 $\overline{p'_I d'}$ は重要であるが、圧縮性成分との相関 $\overline{p'_C d'}$ は振動するだけで k への実質的な寄与は少ないことが分かっている。このようなことから、pressure–dilataion 項の近似に用いるための式(5)中の $\overline{p'^2}$ のモデル化においては、係数 C_p に圧縮性の効果を組み込まず、式(7)でよいとして本研究ではこの式を用いることにした。DNS(IS1 と SH1)において式(6)の両辺を比べた結果を図4–5に示す(定数は $C_{ps} = 0.4$, $C_{pr} = 0.3$ とした)。一様減衰、せん断のいずれにおいてもおおよそ両辺の値が一致しており、圧縮性乱流においても式(6,7)がよい近似となっていることがわかる。通常のせん断乱流では圧縮性でも式(6,7)はよい近似であるが、平均流が急激に圧縮(膨張)する乱流では、密度変動の輸送方程式が生産項を持つため式(6,7)が成り立つのかどうかよくわからないので、さらに研究が必要である。

3・2 $\overline{d'^2}$ のモデル化

次に、$\overline{d'^2}$ について以下のように考える。$\overline{d'^2}$ は ϵ_d (式(3))の中に現れるので、ϵ_d を通して考えることにする。まず、速度場を圧縮性成分と非圧縮性成分にヘルムホルツ分解する。

$$\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{u}^I + \boldsymbol{u}^C \; (\nabla\cdot\boldsymbol{u}^I = 0\,,\; \nabla\times\boldsymbol{u}^C = 0). \quad (10)$$

この分解を用いて $q^2(\equiv 2k)$ を圧縮性成分 q_C^2 と非圧縮性成分 q_I^2 に次のように分割する。

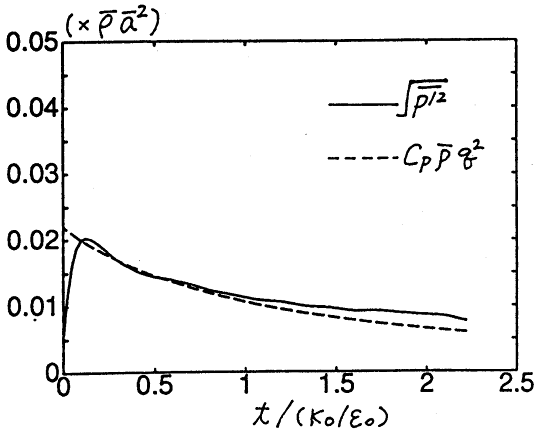

図 4. $\sqrt{\overline{p'^2}}$ と $C_p\bar{\rho}q^2$ の変化 (IS1)

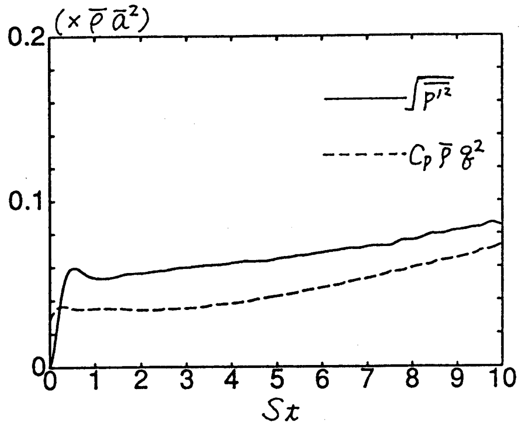

図 5. $\sqrt{\overline{p'^2}}$ と $C_p\bar{\rho}q^2$ の変化 (SH1)

$$q^2 = \overline{u'_j u'_j} = \underbrace{\overline{u^I_j u^I_j}}_{q_I^2} + \underbrace{\overline{u^C_j u^C_j}}_{q_C^2} \tag{11}$$

一様な乱流ならば (等方的でなくても) $\overline{u^I_a u^C_a} = 0$ は厳密に成り立つので上記のような分解が出来ることに注意する。ここで ϵ_s, ϵ_d (式 (3)) と上記の分解の関係であるが、ϵ_s は solenoidal な速度場 $\boldsymbol{u}^I$ のみから決まり、逆に ϵ_d は dilatational な速度場 $\boldsymbol{u}^C$ のみで決まる。これらから q_I^2/ϵ_s と q_C^2/ϵ_s はそれぞれ速度場の非圧縮性成分と圧縮性成分のタイムスケールと考えることができる。両者のタイムスケール比は $(q_I^2/\epsilon_s)/(q_C^2/\epsilon_s)$ は、温度場と速度場のタイムスケール比のようにプラントル数によっては大きく異なるというような場合とは違って、通常は O(1) である [8]。これは q_I^2 と q_C^2 のエネルギースペクトルの分布がそんなに大きく違わないことを意味しており、物理的に見て妥当と言える。これを式に示すと

$$\frac{q_I^2}{\epsilon_s} = C_{ed}\frac{q_C^2}{\epsilon_d}, \quad (C_{ed} = O(1)) \tag{12}$$

となる。これを少し変形すれば、ϵ_d と ϵ の関係式

$$\epsilon_d \simeq C_{\epsilon_d}\frac{q_C^2/\bar{a}^2}{M_t^2}\epsilon. \tag{13}$$

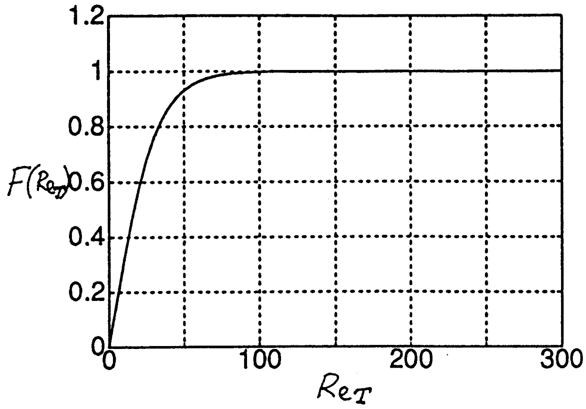

図 6. $F(Re_T)$

が得られる。式中の $q_C^2/\bar{a}^2$ については、acoustic equilibrium theory[1] により圧力変動と

$$\frac{q_C^2}{\bar{a}^2} = C_F\frac{\overline{p'^2}}{(\gamma\bar{p})^2}, \quad (C_F = O(1)), \tag{14}$$

の関係がある。この式は、圧力の変動が存在すれば、それに応じて速度場の dilatation がどの程度生じるかを示している。これらの式 (3,6,13,14) より、$\overline{d'^2}$ は

$$\overline{d'^2} \propto C_p^2 M_t^2 \frac{\epsilon}{\nu}. \tag{15}$$

とモデル化できる。

3・3 相関係数 f_{Π_d} のモデル化

前の 2 つの節により、$\overline{p'^2}$ と $\overline{d'^2}$ がモデル化された。これを $\overline{p'd'}$ の式 (5) に代入して整理すると

$$\overline{p'd'} = f_{\Pi_d}\sqrt{\overline{p'^2}}\sqrt{\overline{d'^2}} = f_{\Pi_d}C_p^2 M_t\sqrt{Re_T}\,\bar{\rho}\epsilon, \tag{16}$$

となる。この式を見ると、通常の圧縮性せん断乱流では M_t は O(0.1 ∼ 1)、C_p は O(1) であるので、相関係数 f_{Π_d} が O(1) であるとすると $\overline{p'd'}$ は ϵ の $\sqrt{Re_T}$ 倍のオーダーになり高レイノルズ数の乱流では現実的でない。しかし、高レイノルズ数の乱流では、速度乱れと同程度のスペクトルをもつ圧力変動 p' と、速度乱れを空間微分して得られる d' は、スペクトルの帯域が異なるため相関係数は一般に低くなる。このように、スペクトルの帯域が異なる 2 変数の相関係数は両者のタイムスケール比に従って減少する [11]。このタイムスケール比はこの場合おおよそ taylor scale と integral scale の比である $1/\sqrt{Re_T}$ となることから、相関係数の絶対値について

$$|f_{\Pi_d}| = \begin{cases} 1 & (Re_T \to 0) \\ \frac{1}{\sqrt{Re_T}} & (Re_T \to \infty) \end{cases}, \tag{17}$$

であると仮定する。これを満たす関数として $\tanh(C_{re}/\sqrt{Re_T})$ を選んだ。その結果、$\overline{p'd'}$ の式 (16) のうち Re_T の関数となっている部分は

$$F(Re_T) = \sqrt{Re_T}\tanh\left(\frac{C_{re}}{\sqrt{Re_T}}\right), \tag{18}$$

となるが、この関数の概形を図 6 に示す。図 6 より、Re_T が大きくなっても $F(Re_T)$ が 1 を越えないことがわかる。次

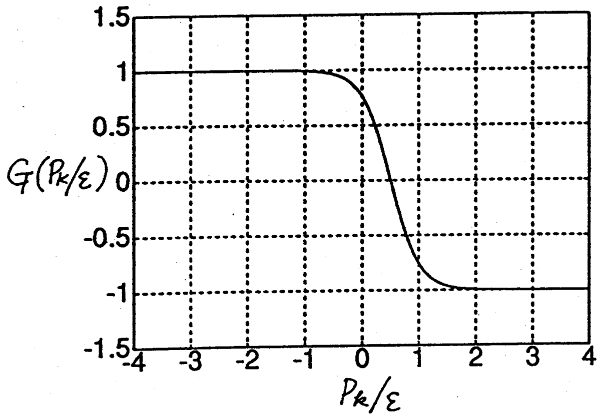

図 7. $G(P_k/\epsilon)$

に、相関係数 f_{Π_d} の平均流の歪み度への依存性について考える。平均流の歪み度を示すパラメータには S^* や P_k/ϵ などが考えられるが、ここでは P_k/ϵ を用いることにする。2つの変動 p' と d' は減衰乱流 $(P_k/\epsilon = 0)$ や膨張する乱流 $(P_k/\epsilon < 0)$ では正の相関をもち、せん断乱流 $(P_k/\epsilon > 0)$ や圧縮される乱流 $(P_k/\epsilon > 0)$ では負の相関をもつ。f_{Π_d} が P_k/ϵ の変化に応じてどうなるかは、上のようなこと位しか分かっていないので厳密にはさらに研究が必要であるが、以下では f_{Π_d} の符号について上の条件を満たすように

$$\frac{f_{\Pi_d}}{|f_{\Pi_d}|} = \begin{cases} 1 & (P_k/\epsilon \to -\infty) \\ -1 & (P_k/\epsilon \to \infty) \end{cases} , \tag{19}$$

を仮定する。これを満たし、さらに $P_k/\epsilon = 0$ では f_{Π_d} が正、$P_k/\epsilon \simeq 1$ では f_{Π_d} が負になるような関数として

$$G(P_k/\epsilon) = -\tanh(2.0\,(P_k/\epsilon - 0.5)) \tag{20}$$

を選んだ。図7に $G(P_k/\epsilon)$ の概形を示す。減衰乱流 $(P_k/\epsilon = 0)$ で正、通常のせん断乱流 $(P_k/\epsilon \simeq 1)$ で負になっていることがわかる。以上の考察により、$\overline{p'd'}$ モデルの最終形は次のようになる。

$$\begin{aligned} \overline{p'd'} &= -A C_{\Pi_d}\sqrt{Re_T}\tanh\left(\frac{C_{re}}{\sqrt{Re_T}}\right)\left(C_{p1} + C_{p2}\frac{P_k}{\epsilon}\right)^2 \\ &\quad \times \tanh(2.0\,(P_k/\epsilon - 0.5))M_t\,\overline{\rho}\,\epsilon, && (21) \\ Re_T &= q^4/(\nu\epsilon), && (22) \\ M_t &= q/\overline{a}, && (23) \\ P_k &= -\overline{u_i'u_j'}\,\overline{u}_{i,j}, && (24) \end{aligned}$$

定数は

$$C_{\Pi_d} = 0.04,\ C_{re} = 30,\ C_{p1} = 0.4,\ C_{p2} = 0.3, \tag{25}$$

とした。従来、圧縮性の効果は M_t の2乗に比例すると言われていたが、本モデルでは $\overline{p'd'}$ は M_t の1乗に比例しており $\overline{p'd'}$ が重要である事を示唆している。

4. モデルの評価

4・1 direct simulation との比較

上記の減衰乱流 (IS1, IS2) およびせん断乱流 (SH1, SH2, SH3) の direct simulation において、$\overline{p'd'}$ をモデル化した式 (24) の両辺を比較した (図 8–12)。モデルが $\overline{p'd'}$ の変化をよく捉えていると言える。

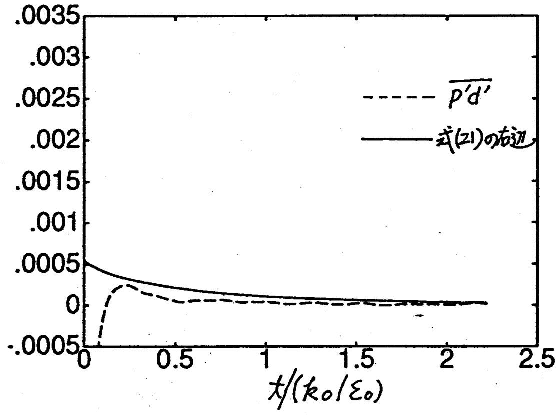

図 8. $\overline{p'd'}$ と式 (21) の右辺の比較 (IS1)

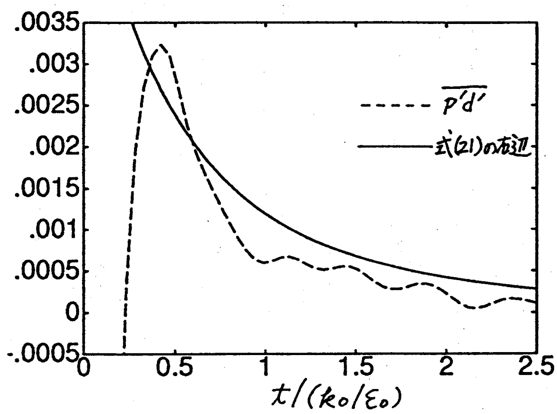

図 9. $\overline{p'd'}$ と式 (21) の右辺の比較 (IS2)

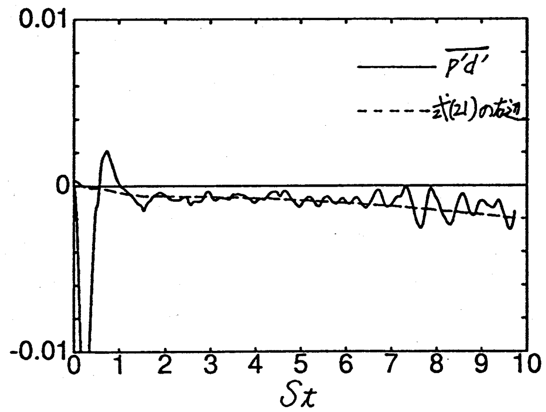

図 10. $\overline{p'd'}$ と式 (21) の右辺の比較 (SH1)

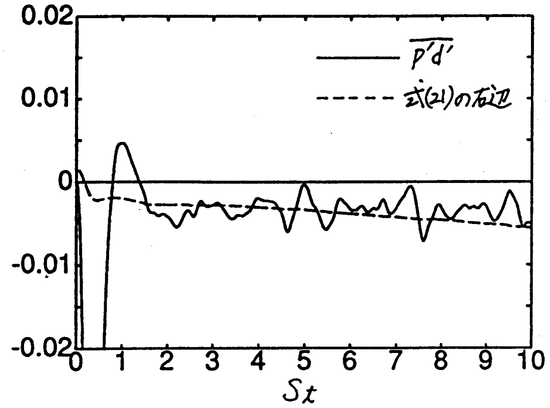

図 11. $\overline{p'd'}$ と式(21)の右辺の比較(SH2)

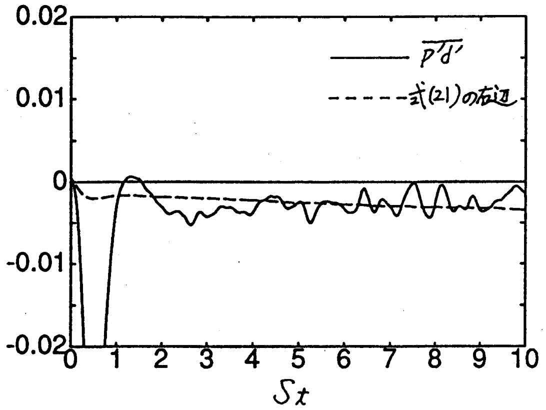

図 12. $\overline{p'd'}$ と式(21)の右辺の比較(SH3)

4・2 超音速境界層への適用

上記の$\overline{p'd'}$のモデルをk–ϵ 2方程式モデルに組み込んで、超音速境界層の計算(主流マッハ数5.0)を行なった。元になる非圧縮性のモデルには Launder–Sharma モデル[14] を用いた。用いた方程式系を次に示す(定数やダンピング関数等は文献[14]参照)。

$$(\dot{\overline{\rho}k}) + (\overline{\rho}\,\overline{u}_j k)_{,j} = \overline{\rho}P_k - \overline{\rho}\epsilon + (\frac{\mu_t}{\sigma_k}k_{,j})_{,j} + \overline{p'd'}, \quad (26)$$

$$(\dot{\overline{\rho}\epsilon}) + (\overline{\rho}\,\overline{u}_j\epsilon)_{,j} = C_{\epsilon1}f_1\frac{\overline{\rho}\epsilon}{k}P_k - C_{\epsilon2}f_2\frac{\overline{\rho}\epsilon^2}{k} + (\frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon}\epsilon_{,j})_{,j}, \quad (27)$$

$$\nu_t = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\epsilon}, \quad (28)$$

$$P_k = -\overline{u_i'u_j'}\,\overline{u}_{i,j}, \quad (29)$$

$$-\overline{u_i'u_j'} = \nu_t\Big(\overline{u}_{i,j} + \overline{u}_{j,i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\overline{u}_{k,k}\Big) - \frac{2}{3}\overline{\rho}k\delta_{ij}. \quad (30)$$

ここで、式(26)の$\overline{p'd'}$を0にした非圧縮性モデル(INC)と、$\overline{p'd'}$に式(24)のモデルを用いたもの(PRE)、$\overline{p'd'}$のところを$-M_t^2\epsilon$とした dilatation dissipation モデル(DIL)の3つを用いた結果を比較した。図13は境界層内の速度分布を比較したものであるが、非圧縮性モデルと$\overline{p'd'}$のモデルでは実験値に近い分布になっているが、dilatation dissipation のモデルでは過大な散逸率のため実験値(実線)から大きくずれている。

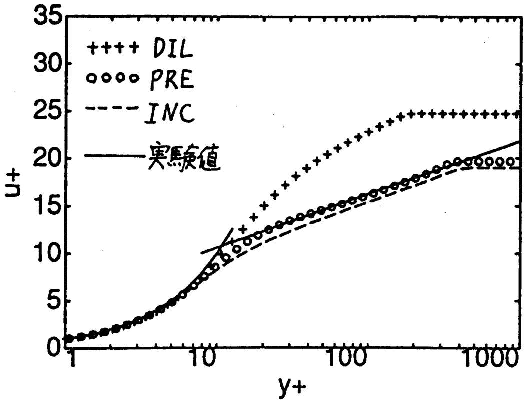

図 13. 超音速境界層内の速度分布

4・3 超音速混合層への適用

前節の境界層の計算で用いたのと同じ3つのモデルで、超音速混合層の拡大率を計算した(図14)。諸言で書いた通り、超音速混合層の拡大率は対流マッハ数M_cの増加にともなって著しく減少することが実験事実として知られている。図15には計算結果から算出した拡大率を実験結果[12, 13]とともに示す。縦軸の拡大率は$M_c = 0$の時の拡大率で無次元化したものとなっている。従来から指摘されている通り、非圧縮性のモデルでは拡大率の減少は予測できていないが、圧縮性の効果を導入したモデルでは拡大率が減少している。実験値にもかなりのばらつきがあるので定量的にはよくわからないが、$\overline{p'd'}$のモデルは dilatation dissipation のモデルに比べ拡大率の減少の程度が幾分少なく、検討の余地があると言える。

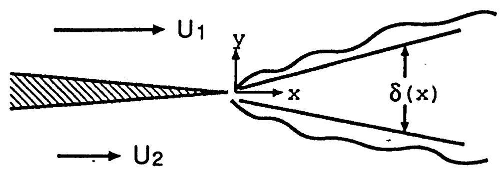

図 14. 超音速混合層

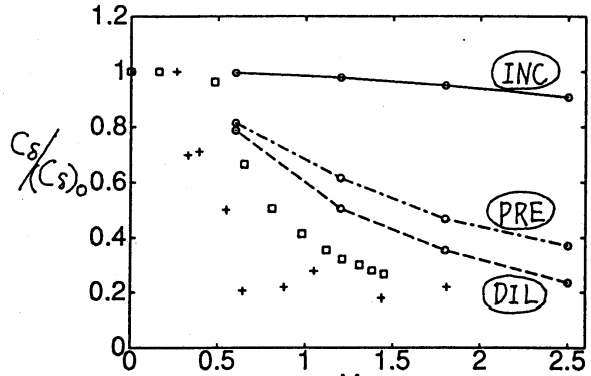

図 15. 混合層の拡大率(+ Papamoshou & Roshko, □ Langley experimental curve)

5. 結　　言

乱流中の圧縮性の効果を表す pressure–dilatation 相関項のモデル化を行ない、それを一様圧縮性乱流の direct simulation の結果を用いて検証した。また、モデルを超音速境界層・混合層に適用して有用であることを確かめた。

本研究は文部省科学研究費重点領域研究・乱流の数理モデル(圧縮性乱流のモデル) (No.05240206)、および特別研究員奨励費 (No.05002832) の援助を受けた。また、奥坂潤氏、中野健氏(東大工学部大学院)にはそれぞれ境界層、混合層の計算を行なって頂き、モデリングのための貴重な意見を聞かせて頂きました。記して謝意を表します。

文　　献

(1) Sarkar, S., G.Erlebacher, M.Y.Hussaini & H.O.Kreiss, J. Fluid Mech., vol.227, 1991, pp.473–493.

(2) Huang, P.G., P.Bradshow & T.J.Coakley, AIAA J., vol.32, No.4, 1994, pp.735–740.

(3) Sandham, N.D. & W.C.Reynolds, NASA TF-45, 1989.

(4) Papamoschou, D. & S.K.Lele, Phys. Fluids A, Vol.5, No.6, 1993, pp.1412–1418.

(5) Goebel, S.G. & J.C.Dutton, AIAA J., Vol.29, No.4, 1993, pp.538–545.

(6) Shikazono, N. & Kasagi, N., Proc. 9th Symp. Turbulent Shear Flows, Vol.2, 18–3, 1993.

(7) Blaisdell, G.A., N.N.Mansour & W.C.Reynolds, NASA TF-50, 1991.

(8) Fujiwara, H., & C. Arakawa, Proc. 9th Symp. Turbulent Shear Flows, Vol.2, 22.2, 1993.

(9) Sarkar, S., Phys. Fluids A, Vol.4, No.12, 1992, pp.2674–2682.

(10) Lumley, J.L., Adv. Appl. Mech., 18, 1978, pp.123–176.

(11) Tennekes, H. & J.L.Lumley, *"A First Course in Turbulence"*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts. 1972.

(12) Papamoschou, D. & A.Roshko, J. Fluid. Mech., Vol.197, No.197, 1988, pp.453–477.

(13) Kline, S.J., Cantwell,B.J. & Lilley, G.M., *"AFOSR–HTTM Stanford conference"*, Vol.1, 1982, pp.368.

(14) Launder, B.E., & B.J.Sharma, Letter in Heat and Mass Transfer 1, 1974, pp.131–138.