数理解析研究所講究録
922巻 1995年 147-157

Lie - Poisson系としての渦運動

東京大学大学院理学系研究科物理学専攻
鈴木　勝博　(Katsuhiro Suzuki)
神部　勉　(Tsutomu Kambe)

1.イントロダクション

非圧縮性完全流体の支配方程式の微分幾何的な定式化としてはいくつかのものがあり、代表的な物としてはMarsden らによる渦度方程式のPoisson 方程式としての定式化や(Marsden et al.(1983)), Arnoldらが行ったEuler 方程式の測地線方程式としての定式化などがある(Arnold (1966))。これらの方法は元来剛体運動の記述において導入されたのであるが、流体力学には、流体粒子の運動を微分同相写像として Lie 群のようにみなし適用されたのである。本稿ではこれらの方法を渦系に適用しいくつかの具体的な計算を行う。

2.準備

まずはじめに、微分幾何的な記述をする上で考える空間について簡単にまとめておく。

領域Ωにおける非圧縮かつ非粘性の流体運動を記述する配位空間としては、体積を保存する微分同相写像群、$\mathbf{D}_{vol}$を採用する。Ω上の微分同相写像というのは、ΩからΩへの微分可能な全単射で、その逆も微分可能なものである。 $\mathbf{D}_{vol}$ は流体粒子の写像をあたえるので、イメージとしては、ラベリングをした全ての流体粒子の座標をあたえていると考えて良いだろう。(従って $\mathbf{D}_{vol}$ は無限次元である。) そして、「体積保存」であることが非圧縮性をあらわしている。

次に位相空間としては$\mathbf{D}_{vol}$ の余接バンドル $T^*\mathbf{D}_{vol}$ を考える。余接バンドルというのは、簡単に言ってしまうと $\mathbf{D}_{vol}$ の各点に 1-形式、(すなわち、ベクトルの線形関数)の空間をのせたものである。剛体運動を表す場合には、接空間が速度の空間を、 1-形式の空間が運動量空間をあたえるので、イメージとしては$T^*\mathbf{D}_{vol}$の各点で座標と運動量の組をあたえていることになる。

次にΩ上の発散が0の速度場は $\mathscr{X}_{vol}$ であたえられる。ここで $\mathscr{X}_{vol}$ は Lie 群 $\mathbf{D}_{vol}$ の Lie 代数である。Lie 群はもともと右または左作用をもっており、それは自然に Lie 群の接空間に対しても対応する作用を引き起こす。$\mathscr{X}_{vol}$ は Lie群の接ベ

クトル場に、右作用により自然に決まる同値関係をいれたときの商空間に対応する。

最後に、渦度場であるが、これは $\mathfrak{X}_{\mathrm{vol}}$ に相対な空間 $\mathfrak{X}^*_{\mathrm{vol}}$ を、 exactな 1-形式についての同値関係を入れたときの商空間で与えられる。 $\mathfrak{X}_{\mathrm{vol}}$ の元は右不変なベクトル場であり $\mathfrak{X}^*_{\mathrm{vol}}$ の元はそれらの線形関数の場である。さて exact な1-形式 α というのは、ある関数 f に対して、$\alpha = df$ をみたし、その結果、$d\alpha = 0$ を満たすような 1- 形式である。（ここで d は外微分をあらわす。）このような exact な 1-形式は非圧縮性の速度場を考えるときは重要な寄与をしない。実際、その値は任意の発散0の速度場 v に対し、

$$\int d\alpha(v) \ d\Omega = 0$$

を満たすからである。したがって、$\mathfrak{X}^*_{\mathrm{vol}}$ において、 exact な1-形式についての同値関係 $\beta \sim \beta + \alpha$ をとってやれば、その同値類の代表元は結局 2-形式 であらわせることになるのである。これが実際渦度を表していることを見るには、例えば具体的に $\beta = v_i(\mathbf{x})\, dx^i$ とおいてやり、外微分をとってやれば十分であろう。

3-1.渦度方程式のLie-Poisson方程式としての定式化

まずはじめに、Marsden らによる渦度方程式の Lie-Poisson 方程式としての定式化を簡単にながめてみる。空間としては $\mathfrak{X}^*_{\mathrm{vol}}$ / (exactな1-形式) を用いる。

Hamiltonianを使った記述をするに当たって、まず必要になるのは渦度場の関数の空間に Lie-Poisson 構造を導入することである。そのために、まず汎関数微分の拡張を考える。

今、F を $\mathfrak{X}^*_{\mathrm{vol}}$ から $\mathbf{R}$ への関数であると仮定する。また $\omega = d\alpha$ ($\alpha \in \mathfrak{X}^*_{\mathrm{vol}}$)、$\sigma \in \mathfrak{X}^*_{\mathrm{vol}}$ とする。このとき、$\dfrac{\delta F}{\delta \omega} \in \mathfrak{X}_{\mathrm{vol}}$ を次のように定義する。

$$DF(\omega)\cdot\sigma = \int_\Omega \frac{\delta F}{\delta \omega}\cdot\sigma \ dx \tag{1}$$

ここで、 $\dfrac{\delta F}{\delta \omega}\cdot\sigma$ はベクトルと1-形式により自然に決まるスカラー関数を表している。（これはベクトルと1-形式の natutal pairing と呼ばれる。）また、

$$DF(\omega)\cdot\sigma \equiv \frac{d}{d\varepsilon} F(\ \alpha + \varepsilon\sigma\ )\Big|_{\varepsilon = 0} \tag{2}$$

は F の derivative と呼ばれるものである。この $\dfrac{\delta F}{\delta\omega}$ を使ってPoisson 括弧は次のように定義される。

$$\{F,G\}(\omega)=\int_{\Omega}\left\langle\omega,\left[\frac{\delta F}{\delta\omega},\frac{\delta G}{\delta\omega}\right]\right\rangle dx \tag{3}$$

ここで、[,] は Lie 代数 $\mathscr{X}_{\mathrm{vol}}$ のもつLie括弧である。また⟨ , ⟩ は2-形式とベクトルによりつくられるスカラー関数で、定義は

$$\langle\omega,v\rangle=\langle d\alpha,v\rangle\equiv\alpha\cdot v \quad (\alpha\in\mathscr{X}^{*}{}_{vol},\ v\in\mathscr{X}_{vol}) \tag{4}$$

である。 $\mathscr{X}_{\mathrm{vol}}$ が自然にもつ Lie括弧の構造を $\mathscr{X}^{*}_{\mathrm{vol}}$ 上の関数の空間にもちこむために $\dfrac{\delta F}{\delta\omega}$ を $\mathscr{X}_{\mathrm{vol}}$ の元として導入したのである。

さて、以上でPoisson 構造を導入することができたので、Hamiltonian を次のように定義してやる。

$$H(\omega)=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left\langle\left\langle\Delta^{-1}\omega,\omega\right\rangle\right\rangle dx \tag{5}$$

ここで、ΔはLaplace演算子、⟨⟨ , ⟩⟩ は2-形式の間の内積で、成分で書けば $\left\langle\left\langle A_{ij}dx_i dx_j, B_{lm}dx_l dx_m\right\rangle\right\rangle=\sum A_{ij}B_{ij}$ のように定義されるものである。

この定義により、Lie-Poisson方程式、

$$\frac{d}{dt}F(\omega)=\{F,G\}(\omega) \tag{6}$$

が渦度のLie 移動の方程式

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}+L_v\omega=0 \tag{7}$$

に等しいことが簡単な計算により分かる。（ここで、L_v は 2-形式 のLie 微分である。）さらにこの方程式の成分を露に書いてやれば、完全流体の渦度方程式と同値であることが確かめられるのである。

3-2. 渦糸への応用

さて、上記のフォーマリズムを渦糸の運動に適用しよう。記述に当たっては Frenet の座標系を採用する。s を 弧長、R(s)を渦糸の位置ベクトルとすると、Frenetの方程式は

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix}\mathbf{T}\\ \mathbf{N}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \kappa & 0\\ -\kappa & 0 & \tau\\ 0 & -\tau & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{T}\\ \mathbf{N}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix} \qquad (8)$$

のように書ける。ここで、T は渦糸の接ベクトル、N は法線ベクトル、B は陪法線ベクトル、κ は曲率、そしてτ は戻率である。今、渦糸が充分細く、またその曲率が充分小さいものと仮定する。このとき、もしこの両者が同じオーダーの微小量だとすると、渦糸のもつ渦度が自分自身に引き起こす運動は、そのリーディングオーダーで filament equation,

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt}=-\frac{\Gamma\log a}{4\pi}\kappa\,\mathbf{B}\ 、 \qquad (9)$$

により記述される。ここで、Γは渦糸の強さ、a は渦糸のコアの半径を表す。

さて、微分幾何的定式化では渦度ωは2-形式で表さなければならないが、それは次のように与えてやればよい。

$$\omega=\Gamma\,\delta(n)\,\delta(b)\ \mathbf{i}_{\mathbf{T}}\,dx\wedge dy\wedge dz \qquad (10)$$

ここで n, b は法線及び陪法線方向の座標であり、また、$\mathbf{i}_{\mathbf{T}}\,dx\wedge dy\wedge dz$ は 3-形式 $dx\wedge dy\wedge dz$ と接ベクトル T との内積をとることにより作られる 2-形式を表している。したがって、Poisson 括弧は次のようになる。

$$
\begin{aligned}
&\{F, G\}(\omega)\\
&= \int_\Omega \left\langle \omega, \left[\frac{\delta F}{\delta \omega}, \frac{\delta G}{\delta \omega}\right] \right\rangle dx = \int \alpha \cdot \left[\frac{\delta F}{\delta \omega}, \frac{\delta G}{\delta \omega}\right] d\mathbf{x}\\
&= \int \alpha \cdot L_{\frac{\delta G}{\delta \omega}} \frac{\delta F}{\delta \omega} d\mathbf{x} = -\int L_{\frac{\delta G}{\delta \omega}} \alpha \cdot \frac{\delta F}{\delta \omega} d\mathbf{x}\\
&= -\int \left(\mathbf{i}_{\frac{\delta G}{\delta \omega}} d + d\mathbf{i}_{\frac{\delta G}{\delta \omega}}\right) \alpha \cdot \frac{\delta F}{\delta \omega} d\mathbf{x}\\
&= -\int \mathbf{i}_{\frac{\delta G}{\delta \omega}} \omega \cdot \frac{\delta F}{\delta \omega} d\mathbf{x} + \int \mathbf{i}_{\frac{\delta G}{\delta \omega}} \alpha \left(div \frac{\delta F}{\delta \omega}\right) d\mathbf{x}\\
&= \int \omega \left(\frac{\delta F}{\delta \omega}, \frac{\delta G}{\delta \omega}\right) d\mathbf{x}\\
&= \Gamma \int \left(T \times \frac{\delta F}{\delta \omega}\right) \cdot \frac{\delta G}{\delta \omega} ds
\end{aligned}
\tag{11}
$$

結局、Poisson 括弧は 2-形式 ω に 2 つのベクトル $\delta F / \delta \omega$, $\delta G / \delta \omega$ を代入し、渦糸上で積分したものになる。

また、Hamitonian は以下のように計算できる。

$$
\begin{aligned}
H(\omega) &= \frac{1}{2} \int_\Omega \left\langle\left\langle \Delta^{-1} \omega, \omega \right\rangle\right\rangle dx\\
&= \frac{1}{8\pi} \iint \frac{\omega(\mathbf{x}) \cdot \omega(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x} d\mathbf{x}'\\
&= \frac{\Gamma^2}{8\pi} \iint \frac{\mathbf{T}(s) \cdot \mathbf{T}(s')}{|\mathbf{R}(s) - \mathbf{R}(s')|} ds\, ds'
\end{aligned}
$$

$$
\cong \frac{\Gamma^2}{8\pi} \int ds \int_{|s-s'|>a} \frac{\mathbf{T}(s) \cdot \left[\mathbf{T}(s) + \kappa\, \mathbf{N}(s)(s'-s) + O\left((s'-s)^2\right)\right]}{\left|(s-s') + O(s-s')^2\right|} ds' \tag{12}
$$

$$
\cong \frac{\Gamma^2}{4\pi} \log a \int ds
$$

第４式の評価のところで、ａ と κが同じオーダーの微小量であるという仮定を用いており、また、積分の発散を抑えるためのカットオフを入れている(Saffmann (1992))。最終式は微小量 ａ 及び κ についての展開のリーディングオーダーを取っており、得られるハミルトニアンは弧長の定数倍となる。

ここで導出したハミルトニアンは(12)式の途中を見ても分かるように、通常の渦度を使って記述したハミルトニアンに、filament equation を導出する際の仮定を用いて導かれたものになっている。これに(11)式のPoisson括弧を使って LIe-Poisson 方程式を書いて出てくるのは、あくまで渦糸が存在する場合の渦度方程式であり、filament equation を導き出すにはもう少し工夫が必要である。

4-1 Euler 方程式の測地線方程式としての定式化

次に、Arnoldらが行った、Euler方程式の測地線方程式としての定式化について簡単にまとめておく。Marsden らの方法では考える空間として $\mathfrak{X}^*_{\mathrm{vol}}$ を用いていたが、今度は $\mathfrak{X}_{\mathrm{vol}}$ を用いる。今、流体の運動が $\mathbf{D}_{\mathrm{vol}}$ 上で g(t) という曲線によってあらわされるものとすると、$\mathfrak{X}_{\mathrm{vol}}$ の元である速度場は、

$$v(t)=T_eR_g{}^{-1}\ \dot{g}(t)\in\ \mathfrak{X}_{\mathrm{vol}} \tag{13}$$

のように表される。g(t) の接ベクトルを右移動で原点の接空間に引き戻しているである。このとき、測地線方程式は

$$\frac{d}{dt}v(t)=-B(v,v) \tag{14}$$

と表される。ここで、B は、ベクトル間の内積 $\langle u,v\rangle=\int_\Omega u\,v\,dx$ と Lie括弧 $[\ ,\ ]$ を使って

$$\langle [a,b],c\rangle=\langle B(c,a),b\rangle,\quad a,b,c\in\mathfrak{X}_{\mathrm{vol}} \tag{15}$$

のように定義される。特に、考えている領域が2または3次元のときには

$$B(v,v)=rot\,v\times v+grad\,P \tag{16}$$

と書くことができ、結果として、Euler方程式が得られるのである。

さて、一般の測地線の理論から得られる重要な結果として、Jacobi 場の理論がある。Jacobi場というのは、ある与えられた測地線の変分をとったときの、変分ベクトル場のことである。すなわち、変分パラメーターを α とすると、変分を受けた測地線は $g(t,\alpha)$と記述され、Jacobi場は

$$\xi(t)=\left.\frac{d}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} g(t,\alpha) \in T\mathbf{D}_{\mathrm{vol}}, \tag{17}$$

であらわされる。Jacobi場の v に垂直な成分を改めて ξ と書き直してやると、その支配方程式は、

$$\frac{D^2\xi}{Dt^2}=-grad\,U, \tag{18}$$

$$U(\xi)=\frac{1}{2}\langle R(v,\xi)v,\xi\rangle=\frac{1}{2}K\langle\xi,\xi\rangle\langle v,v\rangle \ 、 \tag{19}$$

と表される。ここで、K は2つのベクトル ξ と v で張られる2次元面の断面曲率である。

重要なのは、K が負であれば、ξ の方向に変分を受けた測地線ともとの測地線は指数関数的に離れてゆくが、K が正であれば、いずれそれらは再び交わると言うことである。言いかえると、$\mathbf{D}_{\mathrm{vol}}$ が流体粒子の写像を与えているのでこの K を調べることにより、系の一種の Lagrange 的な安定性を調べることが可能になるのである。

流体の場合には、この断面曲率が具体的に計算された例がいくつかあり、値が負になる場合が多いことが知られている。この方法は非線形項をそのまま取り入れた、かなり広い意味での’安定性’を調べられるという長所がある反面、メトリックとして運動エネルギーを採用しているので、これの差が開いてゆくと対応する2つの測地線間の距離も離れてゆくことになり、かなり trivial な例も’不安定’と判定されてしまう可能性があるので、注意する必要がある。

具体的には、断面曲率は

$$K=\frac{\langle R(\mathbf{X},\mathbf{Y})\mathbf{X},\mathbf{Y}\rangle}{\langle\mathbf{X},\mathbf{X}\rangle\langle\mathbf{Y},\mathbf{Y}\rangle-\langle\mathbf{X},\mathbf{Y}\rangle^2} \tag{20}$$

という形で表される。ここで

$$R(X,Y)Z=-\nabla_X\nabla_Y Z+\nabla_Y\nabla_X Z+\nabla_{[X,Y]}Z \tag{21}$$

は曲率テンソルで、

$$\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}=\frac{1}{2}\left(-[\mathbf{X},\mathbf{Y}]+B(\mathbf{X},\mathbf{Y})+B(\mathbf{Y},\mathbf{X})\right) \tag{22}$$

はベクトル $\mathbf{X}$ の $\mathbf{Y}$ に関する共変微分である。

4-2. 渦輪への応用

本節では渦輪の場合に具体的な断面曲率の計算を行ってみる。実際の計算は当たっては Fourier 変換して行う方が便利である。今、速度場を

$$\begin{gathered}u(t,\mathbf{x})=\sum_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{k}}(t)e_{\mathbf{k}}\ ,\ \left(e_{\mathbf{k}}\equiv\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})\right),\\ \left(\mathbf{k}\cdot u_{\mathbf{k}}=0,\quad u_{-\mathbf{k}}=u_{\mathbf{k}}^{*}\right)\end{gathered} \tag{23}$$

のように展開すると、曲率テンソルは

$$\begin{aligned}R_{\mathbf{klmn}}&\equiv\left\langle R\left(u_{\mathbf{k}}\,e_{\mathbf{k}},v_{\mathbf{l}}\,e_{\mathbf{l}}\right)w_{\mathbf{m}}\,e_{\mathbf{m}},z_{\mathbf{n}}\,e_{\mathbf{n}}\right\rangle\\ &=(2\pi)^3\left[\ \frac{(u_{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{m})(w_{\mathbf{m}}\cdot\mathbf{k})}{|\mathbf{k}+\mathbf{m}|}\frac{(v_{\mathbf{l}}\cdot\mathbf{n})(z_{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{l})}{|\mathbf{l}+\mathbf{n}|}-\frac{(v_{\mathbf{l}}\cdot\mathbf{m})(w_{\mathbf{m}}\cdot\mathbf{l})}{|\mathbf{l}+\mathbf{m}|}\frac{(u_{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{n})(z_{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{k})}{|\mathbf{n}+\mathbf{k}|}\right]\end{aligned}$$

$$\left(\ R_{\mathbf{klmn}}\neq 0\ \text{ only for }\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m}+\mathbf{n}=0\ \right) \tag{24}$$

と成分表示される。

さて、渦糸によって誘導される速度場は

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{-1}{4\pi}\int \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\times\omega(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}d\mathbf{x}' \\ = \frac{-\Gamma}{4\pi}\int \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{R}(s))\times\mathbf{T}(s)}{|\mathbf{x}-\mathbf{R}(s)|^3}ds \tag{25}$$

のようにかけるので、これを Fourier 変換してやると

$$\mathbf{v}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathbf{v}(\mathbf{x})e^{i\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}d\mathbf{x} \\ = \frac{1}{(2\pi)^3}\left(\frac{-\Gamma}{4\pi}\right)\int ds\int d\mathbf{x}\ \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{R}(s))\times\mathbf{T}(s)}{|\mathbf{x}-\mathbf{R}(s)|^3}e^{i\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\ = \frac{-\Gamma}{4\pi(2\pi)^3}\int ds\, e^{i\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}(s)}\ \int\frac{\mathbf{X}\times\mathbf{T}(s)}{|\mathbf{X}|^3}e^{i\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{X}}d\mathbf{X} \\ = iC_0\int\ \frac{-\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}\times\mathbf{T}(s)\,e^{i\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}(s)}\ ds, \tag{26}$$

を得る。ここで

$$C_0 = \frac{\Gamma}{(2\pi)^3}\{\ -\frac{1}{k^2}\frac{e^{-ka}}{a}+\frac{2}{k}\log a+\frac{2}{k}(\log k+\gamma)+O(a)\ \}. \tag{27}$$

$$(\ k=|\mathbf{k}|\ )$$

は定数で、a は渦糸のコアの半径を表す。この定数はやはり本質的に singular で、有限値を得るために Hamiltonian の計算の場合と同じくカットオフを入れている。右辺の第一項が渦糸の周りを回転する速度場の 特異性 、そして第二項が Filament equation の場合と同じく、log 型の特異性をあらわしている。

さて、簡単な例として真円状の渦輪の場合を考えよう。渦輪の位置ベクトルを

$$\mathbf{R} = (r\cos\theta,\quad r\sin\theta,\quad 0),\ (r=\mathrm{const.})$$

と与えてやると、弧長 s 及び接ベクトル $\mathbf{T}$ はそれぞれ

$$s = r\theta \quad 、\mathbf{T} = (-\sin\theta, \cos\theta, 0) \quad 、 \tag{28}$$

と与えられる。このとき波数 $\mathbf{k} = (k_1,\ k_2,\ k_3)$ に対する Fourier 成分は

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(\mathbf{k}) &= iC_0 \oint \frac{-\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \times \mathbf{T}(s)\, e^{i\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}(s)}\, ds \\ &= iC_0 \int_0^{2\pi} \frac{1}{|\mathbf{k}|} \begin{pmatrix} k_3 \cos\theta \\ k_3 \sin\theta \\ k_2 \sin\theta - k_1 \cos\theta \end{pmatrix} e^{i(k_1 r\cos\theta + k_2 r \sin\theta)} r d\theta \\ &= \frac{\pi C_0 r^2}{|\mathbf{k}|} \begin{pmatrix} -k_3 k_1 \\ -k_2 k_3 \\ k_1^2 + k_2^2 \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{29}$$

となる。変分ベクトルを、例えば、波数ベクトルが x_3 方向のシングルモード、

$$\begin{aligned}\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{k}) e_{\mathbf{k}} + \mathbf{u}(-\mathbf{k}) e_{-\mathbf{k}}, \quad \mathbf{k} = (0, 0, k_3), \\ (\mathbf{u}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k}) = 0, \quad \mathbf{u}(-\mathbf{k}) = \mathbf{u}(\mathbf{k})^*\end{aligned} \tag{30}$$

のようにとってやれば、結局断面曲率は

$$\begin{aligned}&\langle R(\mathbf{v}(\mathbf{x}), \mathbf{U}(\mathbf{x}))\, \mathbf{v}(\mathbf{x}), \mathbf{U}(\mathbf{x}) \rangle \\ &= -\frac{4}{(2\pi)^3} (\pi C_0 r^2)^2 |\mathbf{k}|^2 \\ &\times \sum_{\mathbf{l}} \frac{(l_1^2 + l_2^2)^2}{|\,\mathbf{l}\,|\, |\mathbf{l} + \mathbf{k}|^2} \left\{ \frac{(\mathbf{u}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{l})^2 + (\mathbf{u}^*(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{l})^2}{|\mathbf{l} + 2\mathbf{k}|} - 2 \frac{(\mathbf{u}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{l})(\mathbf{u}^*(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{l})}{|\,\mathbf{l}\,|} \right\}\end{aligned} \tag{31}$$

となる。この値は負になることが数値的に確かめられた。

この例では計算をできるだけ解析的に行ってしまうために変分ベクトルの与え方を単純にしたが、現実的にはより複雑な与え方を考えてゆく必要がある。また、この計算で得られるのは、あくまで渦輪によって誘導される速度場の安定性であり、渦輪自身のそれを見るには、filament equaiton 自身を測地線方程式として定式化する必要がある。

これの一つの簡単な例としては、渦糸が運動していくときに描く軌跡（則ち、ある瞬間に渦糸上にあった全ての流体粒子の流跡線の集まり）を多様体として考えてやると、３次元の簡単な幾何学から、渦糸の形状がこの多様体の測地線になっていること、およびに各流体粒子の軌跡もまた、この多様体の測地線になっていることが分かる。ただし、この方法では変分を与えたとき、考えている多様体自身が変化してしまうので、Jacobi場の理論をそのまま適用して渦糸の安定性を出すことができない。これらの点について、さらに改良してゆく余地がある。

References

Abraham, R. & Marsden, E. 1978 *Foundation of Mechanics,* (Benjamin).

Arnold, V. I. 1966. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* **16**, 1, 319-361.

Arnold, V. I. 1978. *Mathematical Methods of Classical Mechanics,* Appendix 2 (New York, Springer).

Hattori, Y. & Kambe, T. 1994. Motion of fluid particles and stretching of line elements of an ideal fluid, *Fluid Dyn. Res.* **13**, 97-117.

Marsden, J. & Weinstein, A. 1983. Coadjoint orbits, vortices, and Clebsch variables for incompressible fluids, *Physica D,* **7**, 305-323.

Nakamura, F., Hattori, Y & Kambe, T. 1992. Geodesics and curvature of a group of diffeomorphisms and motion of an ideal fluid, *J. Phys. A: Math. Gen.* **25**, L45-L50.

Saffman, P. G. 1992. *Vortex Dynamics,* (Cambridge University Press).