

## 量子相互エントロピーによる量子マルコフ過程の解析

東京理科大学 理工学部 情報科学科  
大矢雅則 (Masanori Ohya) 須鎗弘樹 (Hiroki Suyari)

### §1. はじめに

量子確率論におけるリフティングの概念は、量子系の合成状態と、量子マルコフ過程を構成する推移期待値から生まれ、その応用範囲は、量子情報理論が取り扱う多くの分野に及ぶ。本論文では、まず、量子系の合成状態、推移期待値、リフティングについて述べる。その上で、量子マルコフ過程の数理構造に、量子光学における開放系のモデルを適用し、量子相互エントロピーを計算することによって、具体的に非可逆性の議論が有効であることを示す。

### §2. 量子系の合成状態

まず、リフティングが生まれた背景の一つである量子系の合成状態 (compound state) について述べる。

ヒルベルト空間論を用いた量子系の記述では、ヒルベルト空間を固定して、そのヒルベルト空間上の自己共役作用素を観測量として、観測量と観測値を結び付けていた。しかし、ヒルベルト空間を固定して、無限自由度を扱う量子系の記述では、不都合が生じる場合がある。そこで、ヒルベルト空間を固定せず、観測量の性質をもつ元を要素とする、より一般的な集合である  $C^*$ 代数を考える [5, 14].

**定義 2.1**  $A$  が  $C^*$ 代数であるとは、次の条件を満たすことである。

- (1)  $A$  は、複素数体  $\mathbb{C}$  上の線形空間。
- (2)  $A$  において積が定義されていて、 $\forall A, B \in A \Rightarrow AB \in A$
- (3)  $\forall A, B, C \in A$ ;  $(AB)C = A(BC)$ ,  $A(B+C) = AB+AC$ ,  $(A+B)C = AC+BC$
- (4) 任意の  $A, B \in A$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$  に対して、次の条件を満たす  $A$  上の写像  $*$ :  $A \in A \rightarrow A^* \in A$  が定義されている。(この写像  $*$  を  $A$  上の対合という。)
  - (i)  $(A^*)^* = A$ ,
  - (ii)  $(A+B)^* = A^* + B^*$ ,
  - (iii)  $(\lambda A)^* = \bar{\lambda}A^*$ ,
  - (iv)  $(AB)^* = B^*A^*$
- (5) 任意の  $A, B \in A$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$  に対して、次の条件を満たす  $A$  上のノルム  $\|\cdot\| : A \rightarrow \mathbb{R}^+$  が定義されている。
  - (i)  $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$ ,

- (ii)  $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$ ,
- (iii)  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ ,
- (iv)  $\|A + B\| \leq \|A\| \|B\|$ ,
- (v)  $\|A^*\| = \|A\|$ ,
- (vi)  $\|A^*A\| = \|A\|^2$

(6)  $\mathcal{A}$  は、ノルム  $\|\cdot\|$  に関して完備である。

さて、観測量の集合として定義された  $C^*$ 代数に対して、観測量を観測値に対応させる状態は次のように定義される。

**定義 2.2**  $\mathcal{A}$  上の状態とは、次の条件を満たす連続線形汎関数  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  のことをいう。

- (1) 正値性:  $\varphi(A^*A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$
- (2) 規格化:  $\|\varphi\| \equiv \sup \{|\varphi(A)| ; A \in \mathcal{A}, \|A\| \leq 1\} = 1$  ( $\mathcal{A}$  が単位元  $I$  を含むときは、 $\varphi(I) = 1$ )

特に、 $\mathcal{A}$  として、あるヒルベルト空間  $\mathcal{H}$  上の有界線形作用素の全体  $B(\mathcal{H})$  をとると、 $B(\mathcal{H})$  上の状態  $\varphi$  に対して、 $\mathcal{H}$  上の密度作用素  $\rho$  が存在して、

$$\varphi(A) = \text{tr} \rho A, \quad A \in B(\mathcal{H})$$

と表されることが示される。

以上より、ヒルベルト空間を固定せずに、観測量と観測値を結び付ける手段が得られたわけである。一般に、 $C^*$ 代数による物理系の記述では、観測量の集合である  $C^*$ 代数  $\mathcal{A}$ 、 $\mathcal{A}$  上の状態  $\varphi$  の集合  $\mathfrak{G}$ 、観測量の時間発展を表す  $*$ -自己同型写像  $\alpha_t : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  の集合  $\alpha(\mathbb{R})$  の3つ組  $(\mathcal{A}, \mathfrak{G}, \alpha(\mathbb{R}))$  で表される。このような  $C^*$ 代数による物理系の記述が、通常のヒルベルト空間による量子系の記述を含むことは、GNS 構成定理によって保証されている [22]。以下、この3つ組  $(\mathcal{A}, \mathfrak{G}, \alpha(\mathbb{R}))$  を  $C^*$ 力学系と呼ぶ。

さて、このようにして構成された2つの力学系  $(\mathcal{A}_0, \mathfrak{G}_0, \alpha_0(\mathbb{R}))$ ,  $(\mathcal{A}_1, \mathfrak{G}_1, \alpha_1(\mathbb{R}))$  において、状態変換を考える必要がしばしば生じる [14]。この2つの力学系間の状態変換を表すチャネル  $\Lambda^* : \mathfrak{G}_0 \rightarrow \mathfrak{G}_1$  は次のように定義される。

**定義 2.3** [9, 10] 写像  $\Lambda : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_0$  が、任意の自然数  $n$  に対して、

$$\sum_{i,j}^n B_i^* \Lambda(A_i^* A_j) B_j \geq 0, \quad \forall B_i \in \mathcal{A}_0, \forall A_j \in \mathcal{A}_1 \quad (2.1)$$

を満たすとき、 $\Lambda^* : \mathfrak{G}_0 \rightarrow \mathfrak{G}_1$  は完全正チャネルであるという。ただし、 $\Lambda^*$  は、チャネル  $\Lambda$  の共役写像である。(i.e.,  $\varphi(\Lambda(A)) = \Lambda^* \varphi(A)$ ,  $\forall A \in \mathcal{A}_1, \forall \varphi \in \mathfrak{G}_0$ )。

この定義の条件はそれほど強くなく、物理で扱われるほとんどの状態変換が、この完全正チャネルの条件を満たしている。

定義 2.3 における写像  $\Lambda : \mathcal{A}_0 \rightarrow \mathcal{A}_1$  は完全正写像 (completely positive map) と呼ばれるが、その形は、次に示す Stinespring の表現定理や Kraus による補題で与えられている。

**定理 2.4 (Stinespring の表現定理)** [20, 22]  $\mathcal{A}$  を単位元をもつ  $C^*$ 代数とし,  $B(\mathcal{H})$  をヒルベルト空間  $\mathcal{H}$  上の有界線形作用素の全体とする. 任意の完全正写像  $\Lambda : \mathcal{A} \rightarrow B(\mathcal{H})$  に対して,  $\mathcal{A}$  の  $*$ -表現  $\{\mathcal{K}, \pi\}$  と有界線形函数  $V : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$  が存在して,

$$\Lambda(A) = V^* \pi(A) V \quad \forall A \in \mathcal{A} \quad (2.2)$$

と表される.

特に, 上の Stinespring の表現定理において,  $\mathcal{A} = B(\mathcal{H})$  のとき, 次の Kraus による補題が知られている.

**定理 2.5** [7]  $\mathcal{H}$  をヒルベルト空間とし, 線形写像  $\Lambda : B(\mathcal{H}) \rightarrow B(\mathcal{H})$  が完全正写像であるのは, 次の形のときに限る.

$$\Lambda(A) = \sum_{i=1}^n V_i^* A V_i \quad A \in B(\mathcal{H}) \quad (2.3)$$

ただし,  $V_i : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  は半等距離作用素で,  $n \leq \dim(\mathcal{H})$ .

さて, 古典論では, チャネルが与えられたとき, 入力状態と出力状態の相関は同時確率分布などが用いられてきた. しかし, 量子系においては, 一般に同時確率分布は存在しないことが知られている [6]. そこで, Ohya は古典論における同時確率分布に対応するものとして, 量子系の合成状態 (compound state) を導入した [11].

**定義 2.6** チャネル  $\Lambda^* : \mathfrak{G}_0 \rightarrow \mathfrak{G}_1$  が与えられているとする.  $\mathcal{A}_0$  上の状態  $\varphi$  と  $\mathcal{A}_1$  上の状態  $\Lambda^* \varphi$  に対して,  $\mathcal{A}_0 \otimes \mathcal{A}_1$  上の合成状態  $\Phi$  とは, 次の条件をみたすものをいう.

- (1)  $\Phi(A \otimes I) = \varphi(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}_0$
- (2)  $\Phi(I \otimes B) = \Lambda^* \varphi(B) \quad \forall B \in \mathcal{A}_1$

このような条件を満たす合成状態  $\Phi$  は, 数多く存在する. たとえば,

$$\Phi_0 = \varphi \otimes \Lambda^* \varphi \quad (2.4)$$

は, 合成状態の条件を明らかに満たしているが,  $\varphi$  と  $\Lambda^* \varphi$  の相関は何等表していない. この合成状態  $\Phi_0$  は, 古典論における直積確率測度に対応しており, 自明な合成状態と呼ばれる.

そこで, Ohya は, 上の条件を満たし, かつ, 相関を表す合成状態として, 次のように定式化した.  $S$  を  $\mathfrak{G}_0$  のある弱\*コンパクト凸部分集合とし,  $exS$  ( $S$  の端点全体の集合) の元へのひとつの分解を

$$\varphi = \int_{(exS)} \omega d\mu \quad (2.5)$$

とする. この測度  $\mu$  は, 状態  $\varphi$  の分解の仕方を表している. このとき, 真の合成状態  $\Phi_\mu$  を

$$\Phi_\mu = \int_{(exS)} \omega \otimes \Lambda^* \omega d\mu \quad (2.6)$$

で与えた。この状態  $\Phi_\mu$  は、明らかに合成状態の条件を満たしている。さらに、この合成状態は、古典系における同時確率分布の拡張にもなっている [11]。

5章で示すように、Ohya は合成状態を用いて、量子系の相互エントロピーを定式化し、これが光通信過程や非可逆過程の解析に有用であることを示している [10, 12, 15, 19]。

### §3. 推移期待値

ここでは、リフティングの概念を支えるもう一方の推移期待値について説明する。

推移期待値 (transition expectation) の概念は、Accardi によって導入され、これを用いて量子マルコフ過程が定式化されている [1]。

まず、Accardi の推移期待値は、古典論における条件付確率の一般化から次のように与えられる。

**定義 3.1** [1]  $B_0, B_1$  を各々単位元をもつ  $C^*$ 代数とし、 $B_0 \otimes B_1$  を  $B_0$  と  $B_1$  のテンソル積空間とする。推移期待値  $\mathcal{E}: B_0 \otimes B_1 \rightarrow B_0$  とは、次の条件を満たす完全正写像である。

$$\mathcal{E}(I \otimes I) = I \quad (3.1)$$

$B = B_0 = B_1$  のとき、 $\mathcal{E}$  を  $B$  上の推移期待値と呼ぶことにする。

この推移期待値を用いて、量子マルコフ過程は次のように定義できる。

**定義 3.2** [1]  $\{\mathcal{E}_n\}_{n>0}$  を  $B$  上の推移期待値の集合とする。このとき、次の条件を満たすような、単位元を保存する完全正写像  $E_0: \otimes_n B \rightarrow B$  が一意に存在する。任意の  $n \in \mathbb{N}$  と任意の  $A_0, A_1, \dots, A_n \in B$  に対して、

$$E_0(A_0 \otimes A_1 \otimes \dots \otimes A_n \otimes 1 \otimes \dots) = \mathcal{E}_0(A_0 \otimes \mathcal{E}_1(A_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{E}_n(A_n \otimes 1) \dots)). \quad (3.2)$$

ここで、 $\varphi_0$  を  $B$  上の状態とすると、 $\otimes_n B$  上の状態  $\varphi$  は次のように定義される。

$$\varphi = \varphi_0 \circ E_0 \quad (3.3)$$

このとき、 $\varphi$  は次式を満たすことがわかる。

$$\varphi(A_0 \otimes A_1 \otimes \dots \otimes A_n \otimes 1 \otimes \dots) = \varphi_0(\mathcal{E}_0(A_0 \otimes \mathcal{E}_1(A_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{E}_n(A_n \otimes 1) \dots))) \quad (3.4)$$

(3.3) によって与えられた状態  $\varphi$  を  $\{\varphi_0, (\mathcal{E}_n)\}$  によって定まる量子マルコフ過程という。特に、任意の  $n$  に対して、 $\mathcal{E} \equiv \mathcal{E}_n = \mathcal{E}_0$  が成り立つとき、状態  $\varphi$  を斉次的 (homogeneous) という。

この量子マルコフ過程は、推移期待値を用いて構成されているが、推移期待値はリフティングを用いて表すことができる。つまり、リフティングを用いて、量子マルコフ過程が構成できるのである。

### §4. リフティング

前章までは、リフティングが生まれる背景となった2つの数学的概念を説明した。これらの2つの数学的概念の融合として、リフティングの定義は、次のように与えられる。

定義 4.1 [2] 2つの状態空間  $\mathfrak{G}_0$  と  $\mathfrak{G}_1$  において, 連続写像:

$$\mathcal{E}^* : \mathfrak{G}_0 \rightarrow \mathfrak{G}_0 \otimes \mathfrak{G}_1 \quad (4.1)$$

をリフティングという.

この定義よりわかるように, リフティングという概念は, 量子系の合成状態の数学的拡張であり, また, 推移期待値の共役写像になっている. つまり, 量子系の合成状態  $\Phi_0, \Phi_\mu$  は, リフティングの特殊な場合として,

$$\mathcal{E}_\mu^* \varphi \equiv \Phi_\mu = \int_{(exS)} \omega \otimes \Lambda^* \omega d\mu, \quad \mathcal{E}_0^* \varphi \equiv \Phi_0 = \varphi \otimes \Lambda^* \varphi \quad (4.2)$$

と書ける. 合成状態  $\mathcal{E}_\mu^* \varphi, \mathcal{E}_0^* \varphi$  の重要な点は, 写像としての非線形性と非破壊性を有するリフティングになっていることである.

ここで, 非破壊性とは次のことをいう.

定義 4.2 [2] リフティング  $\mathcal{E}^* : \mathfrak{G}_0 \rightarrow \mathfrak{G}_0 \otimes \mathfrak{G}_1$  が状態  $\varphi$  に対して非破壊であるとは,

$$(\mathcal{E}^* \varphi)(A \otimes I) = \varphi(A) \quad \forall A \in \mathcal{A} \quad (4.3)$$

が成り立つことをいう.

これは, 量子非破壊測定の数学的表現を与えるものであり, その具体的記述は研究中である.

一方, 推移期待値とリフティングの定義より, 量子マルコフ過程を構成する推移期待値  $\mathcal{E} : \mathcal{B}_0 \otimes \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_0$  の共役写像は, 線形なリフティングに他ならない. そこで, 推移期待値ではなく, 線形なリフティングを用いれば, 従来の量子マルコフ過程を構成することができる. また, 量子系の合成状態のような非線形なリフティングを用いることにより, 非線形な量子マルコフ過程を構成することが可能である [2].

以上より, 量子情報理論で用いられてきた合成状態と量子マルコフ過程を構成する推移期待値は, いずれもリフティングを用いて統一的に表すことができる. このことから, 量子情報理論と量子マルコフ過程論の個々の分野で, 各々の概念を用いるのではなく, リフティングという共通の概念を出発点として研究を進めることには, 次のような利点が考えられる.

- (1) 合成状態の非線形性の量子マルコフ過程への応用
- (2) 推移期待値の情報理論への応用
- (3) リフティングによる光通信過程の統一的記述
- (4) エントロピー及び相互エントロピー等の情報量の具体的な計算とその応用

次章では, 量子マルコフ過程を取り上げて, 上の (4) に関して述べる. 以下,  $\mathcal{H}$  をヒルベルト空間として,  $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$  ( $\mathcal{H}$  上の有界線形作用素の全体) とおく. このとき, 状態空間  $\mathfrak{G}$  は,  $\mathcal{H}$  上のトレースクラス作用素の中で, 自己共役, 正かつトレースが1の作用素 (密度作用素) の全体となる. すなわち,

$$\mathfrak{G}(\mathcal{H}) \equiv T(\mathcal{H})_{+,1} = \{\rho \in \mathcal{B}(\mathcal{H}); \rho^* = \rho, \rho \geq 0, \text{tr} \rho = 1\}.$$

### §5. リフティングの量子マルコフ過程への応用

ここでは、3章で構成された量子マルコフ過程に開放系のモデルを適用し、量子系の相互エントロピーを用いて、その非可逆性を議論できることを具体的に示す。

まず、量子系の相互エントロピーは、合成状態を用いて、次のように定式化される。(2.5)に対応して、状態  $\rho \in \mathcal{G}(\mathcal{H})$  のシャッテン分解が

$$\rho = \sum_n \lambda_n E_n \quad (5.1)$$

で与えられているとする。ただし、

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq \dots, E_n \perp E_m \ (n \neq m), \dim E_n = 1 \quad (\forall n \in \mathbb{N}). \quad (5.2)$$

で、(5.1)のシャッテン分解において、固有値が縮退している場合は、そのシャッテン分解は一意的ではない。

このとき、自明な合成状態  $\sigma_0$  と真の合成状態  $\sigma_E$  は、(2.4)および(2.6)より、

$$\sigma_0 = \rho \otimes \Lambda^* \rho, \quad \sigma_E = \sum_n \lambda_n E_n \otimes \Lambda^* E_n \quad (5.3)$$

と書ける。Ohya は、これらの2つの合成状態  $\sigma_0, \sigma_E$  を用いて、状態  $\rho$  とチャネル  $\Lambda^*$  に関する相互エントロピー  $I(\rho; \Lambda^*)$  を次のように定式化した。

**定義 5.1** [10] 状態  $\rho$  とチャネル  $\Lambda^*$  に対して、相互エントロピー  $I(\rho; \Lambda^*)$  は

$$I(\rho; \Lambda^*) \equiv \sup \{ S(\sigma_E, \sigma_0); E = \{E_n\} \} \quad (5.4)$$

で与えられる。ただし、 $S(\sigma_E, \sigma_0)$  は、 $\sigma_E$  と  $\sigma_0$  に関する量子系の相対エントロピーであり、

$$S(\sigma_E, \sigma_0) \equiv \text{tr} \sigma_E (\log \sigma_E - \log \sigma_0). \quad (5.5)$$

で定められている [21, 23].

このとき、次の基本不等式が成り立つことがわかる。

**定理 5.2** [10] 入力状態  $\rho$  とチャネル  $\Lambda^*$  に対して、基本不等式

$$0 \leq I(\rho; \Lambda^*) \leq \min \{ S(\rho), S(\Lambda^* \rho) \} \quad (5.6)$$

が成り立つ。

この量子系の相互エントロピーを用いて、量子光学でよく用いられる次の開放系のモデル [8] の非可逆性を情報論的に調べることができる [3].

まず、開放系について述べる。統計力学でよく見られるように、ある着目している系 (以下、観測系という。) が他の系 (以下、熱浴系という。) と相互作用を繰り返した場合、観測系の状態はどのような平衡状態に推移していくかという問題は、多くの数理物理学者によって研究されてきた。このようなモデルは開放系のモデルといわれる [4]. この開放系のモデルの数学的表現は次のように与えられる。

観測系と、観測系と相互作用する熱浴系のヒルベルト空間を、各々、 $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1$  で表す。また、観測系、熱浴系の初期状態を各々  $\rho \in \mathfrak{G}(\mathcal{H}_0), \omega \in \mathfrak{G}(\mathcal{H}_1)$  とする。このとき、リフティング  $\mathcal{E}^* : \mathfrak{G}(\mathcal{H}_0) \rightarrow \mathfrak{G}(\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_1)$  を用いると、観測系と熱浴系の相互作用の後の状態  $\mathcal{E}^*\rho \in \mathfrak{G}(\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_1)$  は次のように与えられる。

$$\mathcal{E}^*\rho = U_t(\rho \otimes \omega)U_t^* \quad (5.7)$$

ここで、 $U_t = \exp(-itH)$  で、 $H$  は  $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_1$  上のハミルトニアンを表す。簡単のため、 $\hbar\omega_r = 1$  ( $\omega_r$  は角振動数。) とおく。量子光学において、弱い相互作用を起こす2つの系の調和振動子 (two weakly coupled oscillators) のハミルトニアン  $H$  は次のように与えられる [8].

$$H = H_0 + H_1 + H_{01} \\ H_0 = a^*a, \quad H_1 = \sum_j b_j^*b_j, \quad H_{01} = \sum_j (\varepsilon_j b_j a^* + \varepsilon_j^* b_j^* a)$$

ここで、 $H_0, H_1, H_{01}$  は各々、観測系、熱浴系、これらの相互作用のハミルトニアンを表している。また、 $a, a^*$  は  $\mathcal{H}_0$  上の、 $b_j, b_j^*$  は  $\mathcal{H}_1$  上の消滅作用素、生成作用素を表し、 $\varepsilon_j (j \in \mathbb{N})$  は、相互作用の強さを表す定数である。ここでは、簡単のため、熱浴系の自由度が1と仮定して、

$$H_0 = a^*a, \quad H_1 = b^*b, \quad H_{01} = \varepsilon(a^*b + ab^*) \quad (5.8)$$

とおく。このとき、チャネル  $\Lambda^* : \mathfrak{G}(\mathcal{H}_0) \rightarrow \mathfrak{G}(\mathcal{H}_0)$  は次のように表現できる。

$$\Lambda^*\rho = \text{tr}_{\mathcal{H}_1} \mathcal{E}^*\rho = \text{tr}_{\mathcal{H}_1} U_t(\rho \otimes \omega)U_t^*. \quad (5.9)$$

ここで、 $\text{tr}_{\mathcal{H}_1}$  は、 $\mathcal{H}_1$  に関する部分トレースを表す。以下、先の開放系のモデルのチャネルに対して、(2.3) における半等距離作用素  $V_t$  を求める。

全体系  $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_1$  のハミルトニアン  $H$  の形より、

$$[H_0 + H_1, H_{01}] = 0 \quad (5.10)$$

が成り立つ。この関係式より、系の時間発展は、相互作用のハミルトニアン  $H_{01}$  によって、次のように定まる。

$$U_t = \exp(-itH_{01}). \quad (5.11)$$

明らかに、 $H_0 + H_1$  の固有値は自然数であるから、 $\mathcal{K}_n$  を  $H_0 + H_1$  の固有値  $n \in \mathbb{N}$  に対する固有空間とすると、 $\mathcal{K}_n$  は、 $\{|j \otimes n - j\rangle; j = 0, \dots, n\}$  によって、生成される  $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_1$  の部分空間で、 $H_{01}\mathcal{K}_n \subseteq \mathcal{K}_n$ 。故に、 $H_{01}^{(n)}$  を

$$H_{01}^{(n)} \equiv H_{01} \upharpoonright \mathcal{K}_n \quad (5.12)$$

とおく。(ただし、 $H_{01} \upharpoonright \mathcal{K}_n$  は、 $H_{01}$  の  $\mathcal{K}_n$  への制限を表す。) このとき、 $H_{01}^{(n)} : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$  は有限次元自己共役作用素で、 $(n+1)$  個の固有値  $\lambda_0^{(n)}, \dots, \lambda_n^{(n)}$  と  $\lambda_k^{(n)} (k = 0, \dots, n)$  に対応する固有ベクトル  $\psi_k^{(n)}$  が存在する。つまり、

$$H_{01}^{(n)} \psi_j^{(n)} = \varepsilon \lambda_j^{(n)} \psi_j^{(n)} \quad (j = 0, \dots, n) \quad (5.13)$$

$$\psi_j^{(n)} = \sum_{\alpha=0}^n C_{\alpha}^{(n,j)} |\alpha \otimes n - \alpha\rangle \in \mathcal{K}_n \quad (5.14)$$

ただし,  $C_{\alpha}^{(n,j)}$  は,  $\langle \psi_i^m, \psi_j^n \rangle = \delta_{ij} \delta_{mn}$  と  $\{\psi_j^{(n)}\} \subset \mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_1$  によって, 定まる係数である. (5.13) と (5.14) より,

$$H_{01}^{(n)} = \sum_{j=0}^n \varepsilon \lambda_j^{(n)} |\psi_j^{(n)}\rangle \langle \psi_j^{(n)}| \quad (5.15)$$

$$H_{01} = \sum_{n=0}^{\infty} H_{01}^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n \varepsilon \lambda_j^{(n)} |\psi_j^{(n)}\rangle \langle \psi_j^{(n)}| \quad (5.16)$$

これらの表現より,  $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_1$  上のユニタリ作用素  $U_t = \exp(-itH)$  は次のように書ける.

$$\begin{aligned} U_t &= \exp(-itH) = \exp(-it(H_0 + H_1)) \exp(-itH_{01}) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} e^{-itm} |m\rangle \langle m| \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n e^{-it\varepsilon\lambda_j^{(n)}} |\psi_j^{(n)}\rangle \langle \psi_j^{(n)}| \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n e^{-it(n+\varepsilon\lambda_j^{(n)})} |\psi_j^{(n)}\rangle \langle \psi_j^{(n)}| \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n \sum_{\alpha, \beta=0}^n e^{-it(n+\varepsilon\lambda_j^{(n)})} C_{\alpha}^{(n,j)} \overline{C_{\beta}^{(n,j)}} |\alpha\rangle \langle \beta| \otimes |n - \alpha\rangle \langle n - \beta| \end{aligned}$$

故に, チャネル  $\Lambda^* \rho \in \mathfrak{G}_0$  は次のように展開できる.

$$\begin{aligned} \Lambda^* \rho &= \text{tr}_{\mathcal{H}_1} U_t (\rho \otimes \omega) U_t^* \\ &= \sum_{m, n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \sum_{\alpha, \beta=0}^n \sum_{\alpha', \beta'=0}^m e^{-it(n+\varepsilon\lambda_j^{(n)})} e^{it(n+\varepsilon\lambda_i^{(m)})} C_{\alpha}^{(n,j)} \overline{C_{\beta}^{(n,j)}} C_{\alpha'}^{(m,i)} \overline{C_{\beta'}^{(m,i)}} \\ &\quad \times \text{Tr}_2 |\alpha\rangle \langle \beta| \rho |\beta'\rangle \langle \alpha'| \otimes |n - \alpha\rangle \langle n - \beta| \omega |m - \beta'\rangle \langle m - \alpha'| \\ &= \sum_{m, n=0}^{\infty} \sum_{\alpha, \beta=0}^n \sum_{\alpha', \beta'=0}^m \left( \sum_{j=0}^n e^{-it\varepsilon\lambda_j^{(n)}} C_{\alpha}^{(n,j)} \overline{C_{\beta}^{(n,j)}} \right) \left( \sum_{i=0}^m e^{it\varepsilon\lambda_i^{(m)}} \overline{C_{\alpha'}^{(m,i)}} C_{\beta'}^{(m,i)} \right) \\ &\quad \times |\alpha\rangle \langle \beta| \rho |\beta'\rangle \langle \alpha'| \langle n - \beta| \omega |m - \beta'\rangle \delta_{m-\alpha', n-\alpha} \\ &= \sum_{m, n=0}^{\infty} \sum_{\alpha, \beta=0}^n \sum_{\alpha', \beta'=0}^m d_{\alpha, \beta}^{(n)} \overline{d_{\alpha', \beta'}^{(m)}} \langle n - \beta| \omega |m - \beta'\rangle \langle \beta| \rho |\beta'\rangle \delta_{m-\alpha', n-\alpha} |\alpha\rangle \langle \alpha'| \end{aligned}$$

ただし,

$$d_{\alpha, \beta}^{(n)} \equiv \sum_{j=0}^n e^{-it\varepsilon\lambda_j^{(n)}} C_{\alpha}^{(n,j)} \overline{C_{\beta}^{(n,j)}} \quad (5.17)$$

ここで, 熱浴系の状態  $\omega \in \mathfrak{G}_1$  のスペクトル分解が

$$\omega = \sum_{\gamma} p_{\gamma}^{\omega} |\xi_{\gamma}\rangle \langle \xi_{\gamma}| \quad (5.18)$$

で与えられると, 終状態  $\Lambda^* \rho \in \mathfrak{G}_0$  は,

$$\Lambda^* \rho = \sum_{\gamma} p_{\gamma}^{\omega} \sum_{m, n=0}^{\infty} \sum_{\alpha, \beta=0}^n \sum_{\alpha', \beta'=0}^m d_{\alpha, \beta}^{(n)} \overline{d_{\alpha', \beta'}^{(m)}} \langle n - \beta| \xi_{\gamma}\rangle \langle \xi_{\gamma}| m - \beta'\rangle \langle \beta| \rho |\beta'\rangle \delta_{m-\alpha', n-\alpha} |\alpha\rangle \langle \alpha'| \quad (5.19)$$



となる。ここで、新しいチャネル  $\Lambda_{\xi_\gamma}^*$  を次のように定める：

$$\begin{aligned}\Lambda_{\xi_\gamma}^* \rho &\equiv \sum_{m,n=0}^{\infty} \sum_{\beta=0}^n \sum_{\beta'=0}^m \sum_{\nu=0}^{m \wedge n} |n-\nu\rangle \langle m-\nu| d_{n-\nu,\beta}^{(n)} \overline{d_{m-\nu,\beta'}^{(m)}} \langle n-\beta| \xi_\gamma \rangle \langle \xi_\gamma | m-\beta' \rangle \langle \beta | \rho | \beta' \rangle \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{m,n=\nu}^{\infty} \sum_{\beta=0}^n \sum_{\beta'=0}^m |n-\nu\rangle \langle m-\nu| d_{n-\nu,\beta}^{(n)} \overline{d_{m-\nu,\beta'}^{(m)}} \langle n-\beta| \xi_\gamma \rangle \langle \xi_\gamma | m-\beta' \rangle \langle \beta | \rho | \beta' \rangle\end{aligned}$$

これを用いると、終状態  $\Lambda^* \rho$  は、

$$\Lambda^* \rho = \sum_{\gamma} p_{\gamma}^{\omega} \Lambda_{\xi_\gamma}^* \rho \quad (5.20)$$

となる。  $\rho = |\eta\rangle \langle \eta|$  (純粋状態) の場合、  $\Lambda_{\xi_\gamma}^* \rho$  は

$$\begin{aligned}\Lambda_{\xi_\gamma}^* |\eta\rangle \langle \eta| &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{m,n=\nu}^{\infty} \sum_{\beta=0}^n \sum_{\beta'=0}^m |n-\nu\rangle \langle m-\nu| d_{n-\nu,\beta}^{(n)} \overline{d_{m-\nu,\beta'}^{(m)}} \\ &\quad \times \langle n-\beta| \xi_\gamma \rangle \langle \xi_\gamma | m-\beta' \rangle \langle \beta | \eta \rangle \langle \eta | \beta' \rangle \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{m,n=\nu}^{\infty} \left( \sum_{\beta=0}^n d_{n-\nu,\beta}^{(n)} \langle \beta | \eta \rangle \langle n-\beta| \xi_\gamma \rangle |n-\nu\rangle \right) \\ &\quad \times \left( \sum_{\beta'=0}^m d_{m-\nu,\beta'}^{(m)} \langle \beta' | \eta \rangle \langle m-\beta' | \xi_\gamma \rangle |m-\nu\rangle \right)^*.\end{aligned}$$

$\langle \varphi_{n-\nu}^{(n)} |$  を、

$$\langle \varphi_{n-\nu}^{(n)} | \equiv \sum_{\beta=0}^n d_{n-\nu,\beta}^{(n)} \langle \beta | \otimes \langle n-\beta | \in \mathcal{K}_n \quad (5.21)$$

とおくと、次を得る。

$$\begin{aligned}\Lambda_{\xi_\gamma}^* |\eta\rangle \langle \eta| &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{m,n=\nu}^{\infty} \left( \langle \varphi_{n-\nu}^{(n)} | \eta \otimes \xi_\gamma \rangle |n-\nu\rangle \right) \left( \langle m-\nu | \overline{\langle \varphi_{m-\nu}^{(m)} | \eta \otimes \xi_\gamma \rangle} \right) \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} T_{\nu} (|\eta\rangle \langle \eta| \otimes |\xi_\gamma\rangle \langle \xi_\gamma|) T_{\nu}^*\end{aligned}$$

ただし、

$$T_{\nu} \equiv \sum_{n=\nu}^{\infty} |n-\nu\rangle \langle \varphi_{n-\nu}^{(n)} | \quad (5.22)$$

以上より、

$$\Lambda^* \rho = \sum_{\nu=0}^{\infty} T_{\nu} (\rho \otimes \omega) T_{\nu}^* \quad (5.23)$$

を得る。ここで、次の補題により、  $\{|\varphi_{n-\nu}^{(n)}\rangle; n \geq \nu, n, \nu \in \mathbb{N}\}$  が直交系を成していることがわかる。つまり、  $T_{\nu}$  は半等距離作用素である。

**定理 5.3** [10]

$$\langle \varphi_{n-\nu}^{(n)} | \varphi_{n'-\nu'}^{(n')} \rangle = \delta_{n,n'} \delta_{\nu,\nu'} \quad (5.24)$$

証明：

(5.23) の  $\Lambda^* \rho$  は,  $\mathcal{H}_1$  上の状態であるから,  $\text{tr} \Lambda^* \rho = 1$  より,  $\sum_{\nu=0}^{\infty} T_{\nu}^* T_{\nu} = 1$  が成り立つ。  
すなわち,

$$\text{tr} \Lambda^* \rho = 1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} T_{\nu}^* T_{\nu} = \sum_{\nu \geq 0} \sum_{n \geq \nu} |\varphi_{n-\nu}^{(n)}\rangle \langle \varphi_{n-\nu}^{(n)}| \quad (5.25)$$

(5.21) の  $\varphi_{n-\nu}^{(n)}$  より,  $\langle \varphi_{n-\nu}^{(n)} | \varphi_{n'-\nu'}^{(n')} \rangle = \delta_{n,n'}$  は明らかに成り立つ。

次に,  $\langle \varphi_{n-\nu}^{(n)} | \varphi_{n-\nu'}^{(n)} \rangle = \delta_{\nu,\nu'}$  を示す。

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{n-\nu}^{(n)} | \varphi_{n-\nu'}^{(n)} \rangle &= \sum_{\beta, \beta' \leq n} d_{n-\nu, \beta}^{(n)} \overline{d_{n-\nu', \beta'}^{(n)}} \langle \beta | \beta' \rangle \langle n - \beta | n - \beta' \rangle \\ &= \sum_{\beta \leq n} d_{n-\nu, \beta}^{(n)} \overline{d_{n-\nu', \beta}^{(n)}} \\ &= \sum_{\beta \leq n} \left( \sum_{j_1=0}^n e^{-i\epsilon t \lambda_{j_1}^{(n)}} C_{n-\nu}^{(n, j_1)} \overline{C_{\beta}^{(n, j_1)}} \right) \left( \sum_{j_2=0}^n e^{i\epsilon t \lambda_{j_2}^{(n)}} \overline{C_{n-\nu'}^{(n, j_2)}} C_{\beta}^{(n, j_2)} \right) \\ &= \sum_{j_1, j_2=0}^n e^{-i\epsilon t (\lambda_{j_1}^{(n)} - \lambda_{j_2}^{(n)})} C_{n-\nu}^{(n, j_1)} \overline{C_{n-\nu'}^{(n, j_2)}} \sum_{\beta=0}^n \overline{C_{\beta}^{(n, j_1)}} C_{\beta}^{(n, j_2)} \\ &= \sum_{j=0}^n C_{n-\nu}^{(n, j)} \overline{C_{n-\nu'}^{(n, j)}} \end{aligned}$$

ただし, 上の最後の変形は,

$$\psi_{j_1}^{(n)} \perp \psi_{j_2}^{(n)} \quad (j_1 \neq j_2) \Rightarrow \langle \psi_{j_1}^{(n)} | \psi_{j_2}^{(n)} \rangle = \sum_{\alpha=0}^n \overline{C_{\alpha}^{(n, j_1)}} C_{\alpha}^{(n, j_2)} = \delta_{j_1, j_2} \quad (5.26)$$

を用いた。行列

$$(u_{j, \alpha}) = (C_{\alpha}^{(n, j)})$$

は, 2つの ONS  $\{\psi_j^{(n)}\}$  と  $\{|\alpha\rangle \otimes |n - \alpha\rangle\}$  の変換である推移確率行列であるからユニタリ行列である。故に, 次を得る。

$$\sum_{j=0}^n u_{j, \alpha} \overline{u_{j, \beta}} = \delta_{\alpha, \beta} \Rightarrow \sum_{j=0}^n C_{n-\nu}^{(n, j)} \overline{C_{n-\nu'}^{(n, j)}} = \delta_{n-\nu, n-\nu'} = \delta_{\nu, \nu'} \quad (5.27)$$

よって, (5.26) と (5.27) より,

$$\langle \varphi_{n-\nu}^{(n)} | \varphi_{n-\nu'}^{(n)} \rangle = \delta_{\nu, \nu'}$$

となる。

以上より,

$$\langle \varphi_{n-\nu}^{(n)} | \varphi_{n'-\nu'}^{(n')} \rangle = \delta_{n, n'} \delta_{\nu, \nu'}. \quad \blacksquare$$

故に, (5.22) と (5.23) は, チャネル  $\Lambda^*$  の具体的な Stinespring の表現を与えている. この表現は, エントロピーや相互エントロピー等の複雑量を厳密に計算する上において, 非常に有効である. 次に, この Stinespring の表現を用いて, 相互エントロピーを厳密に導出する.

(5.22) と (5.23) より,

$$\Lambda^* \rho = \sum_{\nu} \sum_{m, n \geq \nu} \langle \varphi_{n-\nu}^{(n)} | \rho \otimes \omega | \varphi_{m-\nu}^{(m)} \rangle |n-\nu\rangle \langle m-\nu| \quad (5.28)$$

ここで, 以下の計算によって,  $\rho$  と  $\omega$  に関して, 次のようにシャッテン分解が与えられていると仮定する.

$$\rho = \sum_l \lambda_l^\rho |l\rangle \langle l|, \quad \omega = \sum_\gamma \mu_\gamma^\omega |\gamma\rangle \langle \gamma|. \quad (5.29)$$

これより, (5.28) は,

$$\begin{aligned} \Lambda^* \rho &= \sum_{\nu} \sum_{m, n \geq \nu} \langle \varphi_{n-\nu}^{(n)} | \sum_{l, \gamma} \lambda_l^\rho \mu_\gamma^\omega |l\rangle \langle l| \otimes |\gamma\rangle \langle \gamma| | \varphi_{m-\nu}^{(m)} \rangle |n-\nu\rangle \langle m-\nu| \\ &= \sum_{l, \gamma} \lambda_l^\rho \mu_\gamma^\omega \sum_{\nu} \sum_{m, n \geq \nu} \langle \varphi_{n-\nu}^{(n)} | l \otimes \gamma \rangle \langle l \otimes \gamma | \varphi_{m-\nu}^{(m)} \rangle |n-\nu\rangle \langle m-\nu| \\ &= \sum_{l, \gamma} \lambda_l^\rho \mu_\gamma^\omega \sum_{\nu} \left( \sum_{n \geq \nu} \langle \varphi_{n-\nu}^{(n)} | l \otimes \gamma \rangle |n-\nu\rangle \right) \left( \sum_{m \geq \nu} \overline{\langle \varphi_{m-\nu}^{(m)} | l \otimes \gamma \rangle} \langle m-\nu| \right) \end{aligned}$$

$|\Phi_{l, \gamma}^\nu\rangle$  を次のようにおくと,

$$|\Phi_{l, \gamma}^\nu\rangle \equiv \sum_{n \geq \nu} \langle \varphi_{n-\nu}^{(n)} | l \otimes \gamma \rangle |n-\nu\rangle \quad (5.30)$$

$\Lambda^* \rho$  は,

$$\Lambda^* \rho = \sum_{l, \gamma} \lambda_l^\rho \mu_\gamma^\omega \sum_{\nu} |\Phi_{l, \gamma}^\nu\rangle \langle \Phi_{l, \gamma}^\nu| \quad (5.31)$$

となる.  $\varphi_{n-\nu}^{(n)} \in \mathcal{K}_n$  より, (5.30) は,

$$|\Phi_{l, \gamma}^\nu\rangle \equiv \sum_{n \geq \nu} \langle \varphi_{n-\nu}^{(n)} | l \otimes \gamma \rangle |n-\nu\rangle = \langle \varphi_{l+\gamma-\nu}^{(l+\gamma)} | l \otimes \gamma \rangle |l+\gamma-\nu\rangle \quad (5.32)$$

となる. 故に, (5.31) は, 次のように展開できる.

$$\begin{aligned} \Lambda^* \rho &= \sum_{l, \gamma} \lambda_l^\rho \mu_\gamma^\omega \sum_{\nu} \left| \langle \varphi_{l+\gamma-\nu}^{(l+\gamma)} | l \otimes \gamma \rangle \right|^2 |l+\gamma-\nu\rangle \langle l+\gamma-\nu| \\ &= \sum_{l, \gamma} \lambda_l^\rho \mu_\gamma^\omega \sum_{\nu} \left| d_{l+\gamma-\nu, l}^{(l+\gamma)} \right|^2 |l+\gamma-\nu\rangle \langle l+\gamma-\nu| \\ &= \sum_{l, \gamma, \nu} \lambda_l^\rho \mu_\gamma^\omega \left| d_{l+\gamma-\nu, l}^{(l+\gamma)} \right|^2 |l+\gamma-\nu\rangle \langle l+\gamma-\nu| \\ &= \sum_i \left( \sum_{\substack{l, \nu \\ (\nu-l)+i \geq 0}} \lambda_l^\rho \mu_{(\nu-l)+i}^\omega \left| d_{i, l}^{(\nu+i)} \right|^2 \right) |i\rangle \langle i| \\ &= \sum_i q_i |i\rangle \langle i| \end{aligned}$$

ただし,

$$q_i = \sum_{\substack{l,\nu \\ (\nu-l)+i \geq 0}} \lambda_l^\rho \mu_{(\nu-l)+i}^\omega |d_{i,l}^{(\nu+i)}|^2 \quad (5.33)$$

明らかに, この  $\Lambda^* \rho$  は, シャッテン分解である.

以下,  $\rho$  のシャッテン分解: (5.29) が一意であると仮定すると, 相互エントロピー  $I(\rho; \Lambda^*)$  は次のように, 得られる.

$$I(\rho; \Lambda^*) = \sum_{k,t} \lambda_k^\rho \sum_{\substack{\nu \\ (\nu-k)+t \geq 0}} \mu_{(\nu-k)+t}^\omega |d_{t,k}^{(\nu+t)}|^2 \log \frac{\sum_{\substack{\nu_1 \\ (\nu_1-k)+t \geq 0}} \mu_{(\nu_1-k)+t}^\omega |d_{t,k}^{(\nu_1+t)}|^2}{\sum_{\substack{l,\nu \\ (\nu-l)+t \geq 0}} \lambda_l^\rho \mu_{(\nu-l)+t}^\omega |d_{t,l}^{(\nu+t)}|^2} \quad (5.34)$$

以下, 相互エントロピーを数値計算する上において, 次の2つの典型的な場合について考える.

(i) 熱浴系の状態  $\omega \in \mathfrak{G}_1$  が真空状態のとき:  $\omega = |0\rangle\langle 0|$ .

$$I(\rho; \Lambda^*) = \sum_{k,t} \lambda_k^\rho |d_{t,k}^{(k)}|^2 \log \frac{|d_{t,k}^{(k)}|^2}{\sum_l \lambda_l^\rho |d_{t,l}^{(l)}|^2} \quad (5.35)$$

(ii) 熱浴系の状態  $\omega \in \mathfrak{G}_1$  がギブス状態のとき:

$$\omega_\beta = \frac{e^{-\beta H_1}}{\text{tr} e^{-\beta H_1}} = \sum_n \frac{e^{-\beta n}}{\text{tr} e^{-\beta H_1}} |n\rangle\langle n| = (1 - e^{-\beta}) \sum_n e^{-\beta n} |n\rangle\langle n| \quad (5.36)$$

このとき,

$$I(\rho; \Lambda^*) = (1 - e^{-\beta}) \sum_{k,t} \lambda_k^\rho D_{k,t}^\beta \log \frac{D_{k,t}^\beta}{\sum_l \lambda_l^\rho D_{l,t}^\beta}. \quad (5.37)$$

ただし,

$$D_{k,t}^\beta = \sum_{\substack{\nu \\ (\nu-k)+t \geq 0}} e^{-\beta((\nu-k)+t)} |d_{t,k}^{(\nu+t)}|^2. \quad (5.38)$$

さて, これらを実際に数値実験した結果が図 5.1 である.

まず, 図 5.1 の上図は, 熱浴系の状態がギブス状態のとき, ギブス状態の温度に対する相互エントロピーの変化を表している. この図からわかるように, 熱浴系の温度に対して, いずれの場合も単調減少していることがわかる. このことから, 熱浴系の温度が高いほど, 観測系と熱浴系の相互作用の効果が大きくなるという自然な結果がわかる. また, 相互作用の大きさを表す  $\varepsilon$  に対しても,  $\varepsilon$  が大きくなるにつれて, 相互エントロピーが小さくなるという予想通りの結果が得られている.

次に, 下の2つの図は, いずれも観測系と熱浴系の相互作用の回数に対する相互エントロピーの変化を表している. 左の図は, 熱浴系の状態が真空状態の場合で, 右の図は, 熱浴系の状態がギブス状態の場合である. これらの図からわかるように, いずれも相互作用

用の回数に対しても、 $\varepsilon$  に対しても、単調減少である。また、左右の図を比べた場合、熱浴系の状態がギブス状態の場合の方が真空状態の場合に比べて、相互作用の効果が大いことがわかる。

さらに、この開放系のハミルトニアン  $H$  は、(5.8) から分かるように、2つのモード  $a$  と  $b$  に対して対称であるにも関わらず、相互エントロピーはいずれの場合も単調減少している。つまり、全体の系のエネルギーを保存するようなハミルトニアン  $H$  を与えているにも関わらず、相互エントロピーの変化は、散逸的な変化を表している。これは、(5.9) の部分トレースによって、対称性が失われているためと思われる。

以上より、相互エントロピーの厳密な導出とともに、具体的な数値計算によって、対象とする系の非可逆性を具体的に論じることができることがわかる。

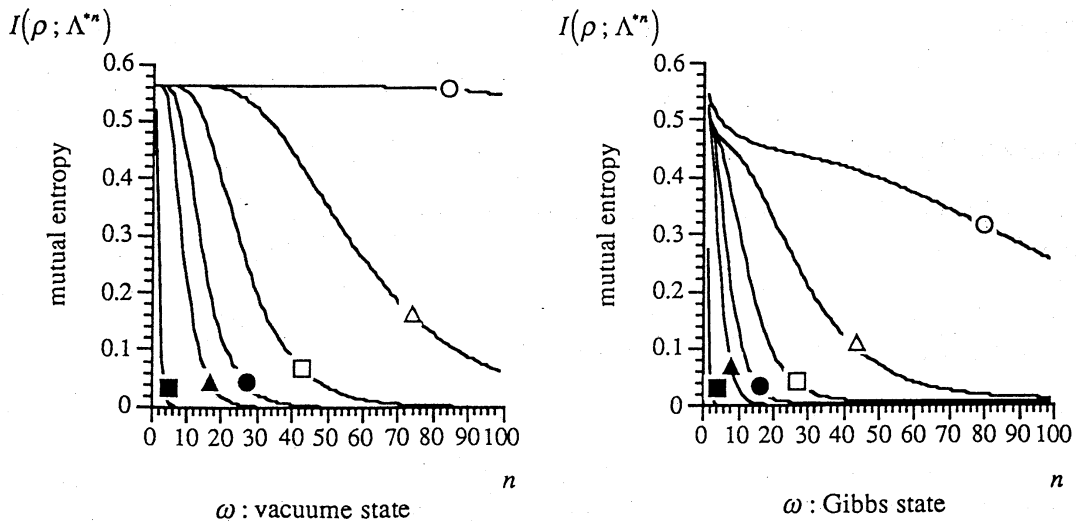
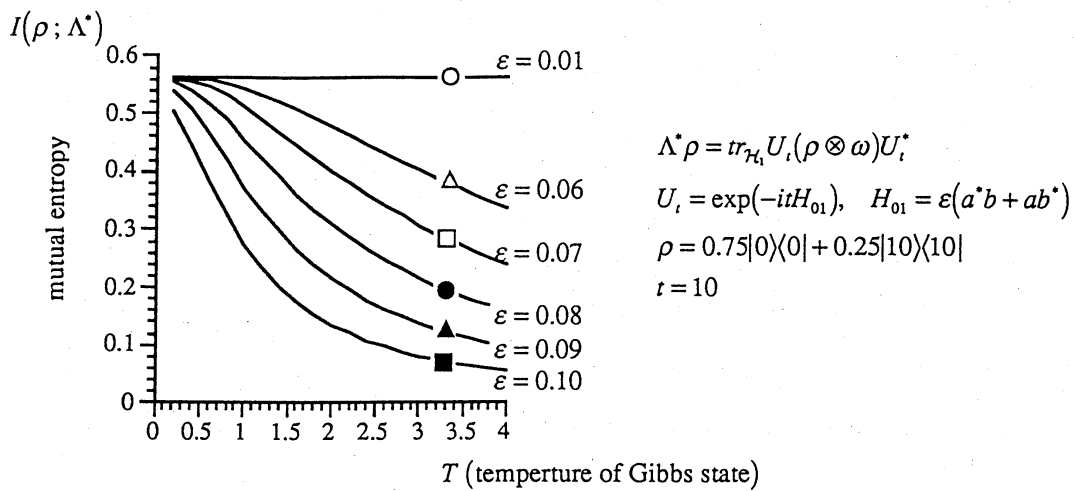


図 5.1 開放系における相互エントロピーの変化

## §6. おわりに

本論文では、リフティングという概念の背景から始め、リフティングの量子マルコフ過程への応用までを述べてきた。

これらは、いずれも Ohya によって提唱された「情報力学」によって、統一的な展開が可能であり [13, 14], その状態変化を司るチャンネルの特殊な場合であるリフティングによって、量子光学で現れる減衰過程 [16, 17] や増幅過程 [18] などを初めとして、多くの物理過程を具体的に扱うことができると思われる。

## 参考文献

- [1] Accardi, L. (1974): “Noncommutative Markov chains” In : international School of Mathematical Physics, Camerino, pp. 268–295.
- [2] Accardi, L. and Ohya, M. : “Compound channels, transition expectations and liftings”, to appear in J. Multivariate Analysis.
- [3] Accardi, L., Ohya, M. and Suyari, H. (1994): “Computation of mutual entropy in quantum Markov chains”, Open Systems and Information Dynamics, **2**, pp. 337–354.
- [4] Davies, E.B. (1976): “Quantum theory of open systems”, Academic Press.
- [5] Haag, R. and Kastler, D. (1964): “An algebraic approach to quantum field theory”, J. Math. Phys., **5**, pp. 848–861.
- [6] Ingarden, R.S. and Urbanik, K. (1962): “Quantum information thermodynamics”, Acta Phys. Polon. **21**, pp. 281–304.
- [7] Kraus, K. (1983): “States, effects and operations”, Springer LNP N.190.
- [8] Louisell, W. (1973): “Quantum Statistical Properties of Radiation”, Wiley.
- [9] Ohya, M. (1981): “Quantum ergodic channels in operator algebras”, J. Math. Anal. Appl. **84**, pp. 318–327.
- [10] Ohya, M. (1983): “On compound state and mutual information in quantum information theory”, IEEE Trans. Information Theory, **29**, pp. 770–777.
- [11] Ohya, M. (1983): “Note on quantum probability”, L. Nuovo Cimento, **38**, pp. 402–406.
- [12] Ohya, M. (1989): “Some aspects of quantum information theory and their applications to irreversible processes”, Rep. Math. Phys. **27**, pp. 19–47.
- [13] Ohya, M. (1991): “Information dynamics and its applications to optical communication processes”, Springer Lec. Notes in Physics., **378**, pp.81–92.
- [14] 大矢雅則 (1995): “第 1 章 情報力学から量子情報理論へ”, 量子情報と進化の力学 (出版予定), 牧野書店.

- [15] Ohya, M. and Petz, D. (1993): "Quantum Entropy and its Use", Springer-Verlag.
- [16] Ohya, M. and Suyari, H. (1991): "Rigorous derivation of error probability in coherent optical communication", Springer Lec. Notes in Physics., **378**, pp.203-212.
- [17] Ohya, M. and Suyari, H. (1994): "The Effect of Squeezing in the Attenuation Processes", 京都大学数理解析研講究録, **859**, pp.91-112.
- [18] Ohya, M. and Suyari, H. : "An application of lifting theory to optical communication processes", to appear in Rep. on Math. Phys.
- [19] Ohya, M. and Watanabe, N. : "Note on Irreversible Dynamics and Quantum Information", to appear in the Alberto Frigerio conference proceedings.
- [20] Stinespring, W.F. (1965): "Positive functions on  $C^*$ -algebras", Proc. Amer. Math. Soc. **6**, pp.211-216.
- [21] 梅垣壽春, 大矢雅則 (1984): "量子論的エントロピー", 共立出版.
- [22] 梅垣壽春, 大矢雅則, 日合文雄 (1985): "作用素代数入門", 共立出版.
- [23] Umegaki, H. (1962): Conditional expectation in an operator algebra, IV, (entropy and information), Kodai Math. Sem. Rep., **14**, pp. 59-85.