数理解析研究所講究録
923巻 1995年 124-138



# 量子ランダムウォークに関する話題

岡山大学環境理工学部環境数理学科
洞 彰人 (Akihito HORA)

## §0. Random walk の概念の幾つかの拡張

素朴な意味で, random walk とは, 同種類のランダムな運動を次々と独立に加えたものである. したがって, 最低限ランダムさを記述する構造と加えあわせるという代数的構造が要る. そこで, $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ を半群または群に値を取る独立同分布の確率変数として,

$$W_n = X_0 + X_1 + \cdots + X_n \quad \text{とか} \quad X_0X_1\cdots X_n \quad \text{とか} \quad X_n\cdots X_1X_0$$

というものの列 $(W_n)_{n=0}^{\infty}$ が random walk である. このとき,

$$W_n \text{の分布} \;=\; X_0 \text{の分布} \star (X_1 \text{の分布})^{\star n} \quad \text{または} \quad (X_1 \text{の分布})^{\star n} \star X_0 \text{の分布} \qquad (0.1)$$

が成り立つ. $\star$ は convolution product である.

Random walk について何を知りたいかにももちろん依存するが, この状況は幾つかの方向に拡張され得る. ここでは, random walk の分布, 特に長時間極限等を念頭に置いて考えてみる. そうすると, (0.1) から直ちにわかるように, 大事なのは状態空間の群構造そのものではなく, 状態空間のいわば上部構造としての function algebra や measure algebra である.

状態空間 $X$ が群 $G$ の等質空間の場合が第一段の拡張であろう. この場合は, stabilizer を $K$ として, $K\backslash G/K$ 上の function algebra (Hecke algebra) や measure algebra の convolution が主役を演じることになる. そうすると, もはやもとの群 $G$ を忘れても話が進むことになり, このような考え方から hypergroup や association scheme 上の random walk が自然に導入される ([10], [9], [12]等を参照). とは言うものの, Hecke algebra やそれに相当するもの (Bose-Mesner algebra 等) の構造がかなりよくわかっていなければ, 具体的で確率論的に意味のある結果を出すことは難しい. そのような計算が可能な場合としては, たとえば, 具体

的な Riemann 対称空間 (球面, 射影空間, Grassmann 多様体等), polynomial hypergroup, P and Q polynomial association scheme 等が挙げられる. すなわち, (ちょっと制限しすぎかもしれないが) 性質のよくわかっている直交多項式を道具として使えるような場合と言えよう.

本稿で述べたいのは, 可測構造の非可換化への方向, いわゆる非可換確率論とか量子確率論とか呼ばれるものである. 可測構造を決めるには要するに可測関数全体を指定すればよい訳であるが, 可換性は要求せずに, 何か 1 つの (非可換な)algebra (特に operator algebra) によって可測構造を記述することにしよう. われわれが扱いたいのは, 単なる quantum stochastic process ではなく quantum random walk であるから, 分布の convolution に相当するものが要るが, それは, 可測構造を記述する algebra にさらに coalgebra の構造を付与することによって得られる. このとき, 分布はその algebra の dual の positive な元と思っている. こうして, algebra と coalgebra の両構造を併せ持つ bialgebra がわれわれの考察の対象になる. 純代数的に定式化できる部分も相当あろうけれども, 最初に述べたように, 長時間挙動, すなわち時刻に関する極限を念頭に置いているので, ここでは analytic な構造も考慮にいれて, 主に Hopf-von Neumann algebra の中で考えていくことにする. さらに Kac algebra の構造があれば, Fourier 解析的な方法が機能して好都合であろう. ただ, $C^*$ にするか $W^*$ にするかあるいは完備化せずに代数的なままで考えるか等は, むしろ直接扱う問題と状況に応じて, 適宜考えればよいのかもしれない. 次節以降, 量子確率論の言葉を復習した後, きちんとした定式化に入っていくが, 一応定義 (スローガン?) として次のことを得たことになる.

**"Definition"** quantum random walk = random walk in Hopf-von Neumann algebra

## §1. 用語の復習

*quantum probability space, quantum random variable* 量子確率論の起こりやいろいろな概念については, [2], [18], [15]等を見られたい. ここで実際に使うのは, ごく入り口の概念である (筆者の知識の都合による!!).

$\mathfrak{B}$ を 1 を含む $*$-algebra , $\rho$を $\mathfrak{B}$ 上の state, すなわち, $\mathfrak{B}$ 上の linear functional で positive $(\rho(a^*a) \geq 0)$ かつ $\rho(1) = 1$ をみたすものとする. なお, 本稿で扱う algebra はすべて $\mathbb{C}$ 上

のものである. $(\mathfrak{B},\rho)$ を quantum probability space と呼ぶ. $\mathfrak{A}$ をもう 1 つの$*$-algebra とするとき, $\xi : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$, $*$-homomorphism, を $\mathfrak{B}$ 上の $\mathfrak{A}$-valued quantum random variable と呼ぶ.

これらは, 通常の (古典的な) 場合と比較してみると分かりやすい. 今, $(\Omega,\mathcal{F},P)$ を probability space, $(S,\mathcal{E})$ を measurable space とし, $X : \Omega \longrightarrow S$ を $\Omega$上の $S$-valued random variable とする. $\mathfrak{B}$ を$\Omega$上の $\mathbb{C}$-valued $\mathcal{F}$-measurable function 全体, $\mathfrak{A}$ を $S$上の $\mathbb{C}$-valued $\mathcal{E}$-measurable function 全体とし, $\rho = \int_{\Omega} \cdot \, dP$ とおく. §0 の最初に触れたように, たとえば関数 $X$の値そのものよりも, $X$の分布の方に関心があるとすれば, 大事なのは, $f \in \mathfrak{A}$ に対する $\rho(f(X))$ の値であるから, random variable としての本質は

$$\xi \,:\, \mathfrak{A} \ni f \;\longrightarrow\; f(X) \in \mathfrak{B} \tag{1.1}$$

という map であるという考え方ができる. (1.1) は明らかに $\mathfrak{A}$ から $\mathfrak{B}$ への$*$-homomorphism である.

$\mathfrak{A}$ が function algebra である場合ももちろんよく現れる. たとえば, observable $H$ (すなわち Hilbert space $\mathcal{H}$上の self-adjoint operator) は, スペクトル分解, $\mathbb{R}$ 上の projection-valued measure, を通して $\mathbb{R}$ 上の $\mathbb{C}$-valued function $f$に $f(H)$ を対応させる $*$-homomorphism として, quantum random variable とみなされる. また, $\mathfrak{A}$ が可換な algebra のときは, 普通何らかの意味で $\mathfrak{A}$ を何かの集合 $S$の上の function algebra とみなすことができ, 通常の $S$-valued random variable に帰される. §4 の可換な subalgebra への制限のところでもう一度このことに立ち帰ることにしよう.

Quantum random variable $\xi : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ の分布は

$$\mathfrak{A} \ni x \longrightarrow \rho(\xi(x)) \tag{1.2}$$

で与えられる $\mathfrak{A}$ の dual の元である. $\rho(\xi(x^*x)) = \rho(\xi(x)^*\xi(x)) \geq 0$ であるから, この分布は positive な元である.

<u>*Hopf-von Neumann algebra*</u> 次に Hopf-von Neumann algebra に関する用語を復習しておこう．[8]を見られたい．これも使用するのはごくごく入り口の概念である (再び筆者の知識の都合による!!).

$\mathfrak{M}$ を von Neumann algebra とし, $\Gamma : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{M}$ を 1 対 1 の normal homomorphism で (i)$\Gamma(1) = 1 \otimes 1$, (ii)coassociativity (右の図式の可換性) をみたすものとする．ただし, 右図の中の 1 は identity map である．このとき, $(\mathfrak{M}, \Gamma)$ あるいは単に $\mathfrak{M}$ を Hopf-von Neumann algebra と呼ぶ．$\iota : \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{M}$ を $\iota(a \otimes b) = b \otimes a$ によって定める．$\mathfrak{M}$ が commutative ならば commutative Hopf-von Neumann algebra と言い, $\iota \circ \Gamma = \Gamma$ をみたせば cocommutative (または symmetric) Hopf-von Neumann algebra と言う．

$$
\begin{tikzcd}
& \mathfrak{M} \arrow[dl, "\Gamma"'] \arrow[dr, "\Gamma"] & \\
\mathfrak{M} \otimes \mathfrak{M} \arrow[dr, "1 \otimes \Gamma"'] & & \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{M} \arrow[dl, "\Gamma \otimes 1"] \\
& \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{M} &
\end{tikzcd}
$$

*Remark.* 蛇足であるが, 本稿では§2 のただ 1 カ所を除いて, Fock space には言及しないので, coproduct を上のように $\Gamma$ で表しても混乱は生じないであろう．また, 必ずしも von Neumann algebra とは限らなくても, coproduct を同じ $\Gamma$ で表す．

次の 2 例が典型的である．ともに $G$ は compact group とする．

*Examples.* (1) $\mathfrak{M} = L^\infty(G)$ とすると, $\Gamma f(s,t) = f(st)$, $s,t \in G$, $f \in \mathfrak{M}$ によって coproduct $\Gamma$ を定めることができ, $\mathfrak{M}$ は commutative Hopf-von Neumann algebra になる．von Neumann であることは要求せず, $\mathfrak{M} = \mathcal{R}(G)$ : representation algebra $\subset L^\infty(G)$ とすれば, $\Gamma\mathfrak{M}$ は代数的テンソル積 $\mathfrak{M} \otimes \mathfrak{M}$ に含まれて都合がよいこともある．

(2) $\mathfrak{M} = \mathcal{L}(G)$ : $G$ の左正則表現 $L$ で生成される von Neumann algebra $\subset \mathcal{B}(L^2(G))$ とすると, $\Gamma(L_g) = L_g \otimes L_g$ によって coproduct $\Gamma$ を定めることができて, $\mathfrak{M}$ は cocommutative Hopf-von Neumann algebra になる．

<u>*convolution*</u> $(\mathfrak{M},\Gamma)$ を Hopf-von Neumann algebra とし, $\mathfrak{M}$ の predual を $\mathfrak{M}_*$ で表す. 以後, $M$上の state としては normal なものをとり, $\mathfrak{M}$-valued random variable の分布が $\mathfrak{M}_*$ に入っている場合を扱う. $\phi,\psi\in\mathfrak{M}_*$ に対して

$$\langle\phi\star\psi,x\rangle=\langle\phi\otimes\psi,\Gamma x\rangle \qquad (x\in\mathfrak{M}) \tag{1.3}$$

により定まる $\phi\star\psi\in\mathfrak{M}_*$ を$\phi$と$\psi$との convolution という. 古典的な場合の

$$\int x(s)d\phi\star\psi(s)=\iint x(st)d\phi(s)d\psi(t)$$

の拡張である.

<u>*conditional expectation*</u> $\rho$を $\mathfrak{M}$ 上の normal state とする. $E_\rho:\mathfrak{M}\otimes\mathfrak{M}\longrightarrow\mathfrak{M}$ を

$$\langle\psi,E_\rho x\rangle=\langle\psi\otimes\rho,x\rangle \qquad (\psi\in\mathfrak{M}_*,\,x\in\mathfrak{M}) \tag{1.4}$$

によって定まる conditional expectation とする. 左辺を $\langle\psi\otimes\rho,E_\rho x\otimes 1\rangle$ と思えば, 古典的な場合と比較しやすい.

## §2. Quantum random walk

[2]によって $*$-algebra の間の $*$-homomorphism の族として quantum stochastic process が導入されて以来, それに対する stochastic calculus がいろいろな人々によって研究されている. 筆者は不案内なので, 一応[18]と[15]を挙げておく. 日本語の[16]とその参考文献表も参照されたい.

Quantum Markov process (quantum stochastic flow) $(j_t)_{t\geq 0}$ のポピュラーな形は

$$j_t\ :\ \mathfrak{A}\ \longrightarrow\ \mathfrak{A}\otimes\mathcal{B}(\mathfrak{h}_0\otimes\Gamma_s(\mathcal{V}\otimes L^2(\mathbb{R}_+)))$$

で与えられる. $\mathfrak{h}_0$, $\mathcal{V}$ は Hilbert spaces で, $\Gamma_s$ は Boson Fock space, $\mathcal{B}$は bounded operators を表し, $\mathfrak{A}$ が initial algebra である. これの discrete time version $(j_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が[18]に述べられている. われわれが扱う quantum random walk は, この discrete time quantum stochastic flow の特別な場合, すなわち structure map と呼ばれる $*$-homomorphism が coproduct $\Gamma$から来ているようなものである. したがって, まず $(j_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を導入してから, その中で quantum random walk の位置づけを与えるのが話の順序として適当かも知れないが, ここでは quantum stochastic flow の説明は端折って, 直接 quantum random walk を導入してしまうことにする. それでも, 古典的な場合と比較してみれば, 自然な拡張であることが見て取れると思う.

$\mathfrak{M}$ を Hopf-von Neumann algebra とし, Hilbert space $\mathcal{H}$上の bounded linear operators $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ に含まれているとする. $\rho_0, \rho$ をそれぞれ $\mathfrak{M}$, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 上の normal state とする. $\tilde{\mathfrak{B}} = \mathfrak{M}\otimes\mathcal{B}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}\otimes\cdots)$, $\tilde{\rho} = \rho_0\otimes(\rho\otimes\rho\otimes\cdots)$ とおき, $\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}\otimes\cdots$ において, 第 $m$ 番から第 $n$ 番までのテンソル積を $\mathcal{H}^{\otimes[m,n]}$, 第 $m$ 番以降のものを $\mathcal{H}^{\otimes[m}$ と表す. また, $\mathcal{H}^{\otimes[m,n]}$ 上の identity を $1_{[m,n]}$, $\mathcal{H}^{\otimes[m}$ 上のそれを $1_{[m}$ と表す.

*Remark.* $\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}\otimes\cdots$, $\rho\otimes\rho\otimes\cdots$ とは乱暴な書き方であるが, さし当たっては無限テンソル積の問題は抜きにして, 有限個で考えておいてもよい. というのも, われわれが当面の目的として念頭に置いているのは, quantum random walk の分布とその長時間挙動であったから, $\mathfrak{M}_*$の中で結局話が済むことになる (極限も取れる). もちろん, quantum stochastic process としての構成も含めれば, 無限テンソル積を (reference vectors をとって) きちんと定義する (か若しくは Fock space 上で考える) 必要がある. また, 本研究集会の主旨 (ガウス空間上の$\cdots$) に照らせば, やはり creation, annihilation を考慮して (Boson) Fock space 上の operators の中で定式化すべきなのかもしれないが, ここではそれもご容赦願うことにする (三たび筆者の知識の都合による!!).

$E_\rho : \mathfrak{M}\otimes\mathcal{B}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathfrak{M}$ を$\rho$による conditional expectation とする. $\tilde{\mathfrak{B}}_{n]} = \{x\otimes 1_{[n+1}; x\in \mathfrak{M}\otimes\mathcal{B}(\mathcal{H}^{\otimes[1,n]})\}$ とおき, $E_{n]} : \tilde{\mathfrak{B}} \longrightarrow \tilde{\mathfrak{B}}_{n]}$ を $E_{n]} = E_{\rho^{\otimes[n+1}}x\otimes 1_{[n+1}$ $(x\in\tilde{\mathfrak{B}})$ によって定める. また, $\mathfrak{M}$ の coproduct $\Gamma$に対して

$$\Gamma_1 = \Gamma\ ,$$

$$\Gamma_n = (\underbrace{1\otimes\cdots\otimes 1}_{n-1}\otimes\Gamma)\Gamma_{n-1} = (\underbrace{1\otimes\cdots\otimes 1}_{n-1}\otimes\Gamma)(\underbrace{1\otimes\cdots\otimes 1}_{n-2}\otimes\Gamma)\cdots(1\otimes\Gamma)\Gamma \tag{2.1}$$

によって $\Gamma_n$ を定める. 尚, coassociativity より, $\Gamma_n$ の定義における$\Gamma$の位置は括弧内のどこに移動しても構わない.

**Definition 2.1.** $j_n : \mathfrak{M} \longrightarrow \tilde{\mathfrak{B}}$ を

$$j_n x \;=\; \Gamma_n x \otimes 1_{[n+1} \qquad (x \in \mathfrak{M}) \tag{2.2}$$

によって定め, $(j_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を$\rho$で生成される $\mathfrak{M}$-valued quantum random walk (または quantum random walk in $\mathfrak{M}$) と呼ぶ. さらに,

$$T \;=\; E_\rho \Gamma \;:\; \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{M} \tag{2.3}$$

を quantum random walk $(j_n)$ の transition operator と呼ぶ.

*Remarks.* 1) この定義は, [18]における discrete quantum stochastic flow で structure map $\theta$が coproduct $\Gamma$で与えられているものに他ならない.

2) (2.3) の $T$を transition operator と呼ぶことについては, 次の命題とその後の注意を参照.

3) $\Gamma$を少し modify した structure map からできるものも quantum random walk と呼んでいいかもしれない.

**Proposition 2.2.** $\rho$で生成される $\mathfrak{M}$-valued quantum random walk $(j_n)_{n\in\mathbb{N}}$ について次が成り立つ.

$$E_{n-1]} j_n x = j_{n-1}(E_\rho \Gamma x) \qquad (x \in \mathfrak{M}) \tag{2.4}$$

$$(E_\rho \Gamma)^* \psi = \psi \star \rho|_{\mathfrak{M}} \quad (\text{したがって } (E_\rho \Gamma)^* : \mathfrak{M}_* \longrightarrow \mathfrak{M}_*) \tag{2.5}$$

$$j_n \text{ の分布} \;=\; \rho_0 \star \underbrace{\rho|_{\mathfrak{M}} \star \cdots \star \rho|_{\mathfrak{M}}}_{n} \in \mathfrak{M}_* \tag{2.6}$$

*Proof.* (2.4): $\Gamma x$ が代数的テンソル積 $\mathfrak{M} \otimes \mathfrak{M}$ に入っているような $x \in \mathfrak{M}$ に対して示せば十分である. Coproduct の習慣的な記法にしたがって $\Gamma x = \sum x_{(1)} \otimes x_{(2)}$ とおくと,

$$\begin{aligned}
\Gamma_n x &= (\Gamma \otimes 1^{\otimes n-1})(\Gamma \otimes 1^{\otimes n-2}) \cdots (\Gamma \otimes 1)\Gamma x \\
&= \sum (\Gamma \otimes 1^{\otimes n-1})(\Gamma \otimes 1^{\otimes n-2}) \cdots (\Gamma \otimes 1)(x_{(1)} \otimes x_{(2)}) \\
&= \sum \{(\Gamma \otimes 1^{\otimes n-2}) \cdots (\Gamma \otimes 1)x_{(1)}\} \otimes x_{(2)} = \sum (\Gamma_{n-1} x_{(1)}) \otimes x_{(2)} , \\
E_{n-1]} j_n x &= \sum E_{n-1]}(\Gamma_{n-1} x_{(1)}) \otimes x_{(2)} \otimes 1_{[n+1} = \sum \rho(x_{(2)}) \Gamma_{n-1} x_{(1)} \otimes 1_{[n} .
\end{aligned}$$

一方

$$j_{n-1}(E_\rho \Gamma x) = \sum \Gamma_{n-1}(E_\rho(x_{(1)} \otimes x_{(2)})) \otimes 1_{[n} = \sum \rho(x_{(2)}) \Gamma_{n-1} x_{(1)} \otimes 1_{[n} .$$

(2.5): これも $\Gamma x$ が代数的テンソル積に入っているとして,

$$\begin{aligned}
\langle (E_\rho \Gamma)^* \psi, x \rangle &= \langle \psi, E_\rho \Gamma x \rangle = \sum \langle \psi, \rho(x_{(2)}) x_{(1)} \rangle \\
&= \sum \langle \psi, x_{(1)} \rangle \langle \rho, x_{(2)} \rangle = \langle \psi \otimes \rho, \Gamma x \rangle = \langle \psi \star \rho, x \rangle .
\end{aligned}$$

(2.6) も同様に簡単である. ∎

*Remark.* (2.4) を古典的な場合と比べてみる. $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を状態空間 $S$上の discrete time Markov process とし, その transition operator を $T$とする. $\sigma[M_0, \cdots, M_{n-1}]$ に関する conditional expectation を $E_{n-1]}$ で表すと, $E_{n-1]} f(M_n) = (Tf)(M_{n-1})$ が成り立つ. (1.1) により, $f(M_n)$, $(Tf)(M_{n-1})$ に対応するものが, quantum case ではそれぞれ $j_n f$, $j_{n-1}(Tf)$ である. したがって, これと (2.4) を比較すれば, (2.3) のように $E_\rho \Gamma$ を transition operator と呼ぶことが正当化される. また, 古典的な場合と同じく, $(j_n)$ の correlation を $T$を用いて書き表すことができる.

**Proposition 2.3.** $(j_n)$ の transition operator を $T$とする. $n_0 < n_1 < \cdots < n_k$ に対して次式が成り立つ.

$$E_{n_0]} j_{n_1}(x_1) j_{n_2}(x_2) \cdots j_{n_k}(x_k) = j_{n_0}(T^{n_1-n_0}(x_1 T^{n_2-n_1}(x_2 \cdots (x_{k-1} T^{n_k-n_{k-1}} x_k) \cdots))) . \tag{2.7}$$

*Proof.* Conditional expectation の性質 $E_{i]}E_{j]} = E_{i\wedge j]}$ と $j_{n_i}$ が homomorphism であることと (2.4) を繰り返し使えばよい. ∎

**Definition 2.4.** $(E_\rho \Gamma)^*\psi = \psi$をみたす normal state $\psi \in \mathfrak{M}_*$ を $(j_n)$ の invariant state と言う.

$j_n$ の分布 $\rho_0 \star \rho \star \cdots \star \rho$ が invariant state にいつ, どのように収束するかは興味深い問題である. また, invariant state の特徴づけを与えることも重要である. Invariant state への収束に関しては, §5 でまた触れる.

## §3. Examples

*Example 1.* $G$ を compact group とし, $\mathcal{R}(G)$ をその representation algebra, $\mathcal{C}(G)$ を連続関数全体とする. $\mathcal{R}(G) \subset \mathcal{C}(G) \subset L^\infty(G)$ となっているが, これは代数的, $C^*$, $W^*$ のうちのどこで考えるかにそれぞれ対応している. $\mu$を $\mathfrak{M} = L^\infty(G)$ 上の normal state とする. $\mu$は $G$ の Haar measure に関して絶対連続な probability measure である (すなわち $L^1(G)$ の元と思える). $\mathcal{H}_0 = L^2(G)$, $\mathcal{H} = L^2(G, \mu)$ とおく. $\mathfrak{M}$ はかけ算作用素として自然に $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ に埋め込まれる. また, $\mathfrak{M}$ は同じくかけ算作用素として $\mathcal{H}$にも作用でき, ( 1 対 1 とは限らないが) その map を $k : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ とする. $\rho = |1\rangle\langle 1|$ とおく.

**Proposition 3.1.** $\check{\mu}$を$\mu$の裏返し: $\check{\mu}(B) = \mu(B^{-1})$ $(B \subset G)$ とすると, 次式が成り立つ.

$$E_\rho((1 \otimes k)\Gamma)f = f \star \check{\mu} \qquad (f \in \mathfrak{M}) .$$

*Proof.* $u, v \in \mathcal{H}_0$, $||u|| = ||v|| = 1$ とする.

$$\begin{aligned}
&\langle u, E_\rho((1 \otimes k)\Gamma)f\, v\rangle_{\mathcal{H}} = \mathrm{tr}(1 \otimes k)\Gamma f\, |v\rangle\langle u| \otimes |1\rangle\langle 1| \\
=&\langle u \otimes 1, (1 \otimes k)\Gamma f\, v \otimes 1\rangle = \iint_{G \times G} \overline{u(x)} f(xy) v(x) dx d\mu(y) \\
=& \int_G \overline{u(x)} f \star \check{\mu}(x) v(x) dx = \langle u, (f \star \check{\mu})v\rangle \ .
\end{aligned}$$

∎

*Remark.* $Tf = f \star \check{\mu}$ は, $G$ 上の probability $\mu$によって生成される通常の right random walk の transition operator である.

*Example 2.* $G$ を compact group, $\mathfrak{M} = \mathcal{L}(G)$ を $G$ の左正則表現で生成される group von Neumann algebra $\subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\mathcal{H} = L^2(G)$ とする. $\Gamma(L_g) = L_g \otimes L_g$ によって定まる coproduct $\Gamma$が $\mathcal{L}(G)$ 上の quantum random walk を引き起こす. この例は, quantum random walk の制限の問題に絡めて§4 で言及する.

*Example 3.* ($\mathcal{H}$上の Weyl system) [5]を参照されたい. $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ とし, $U_t$, $V_t \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ を $U_t f(x) = e^{itx} f(x)$, $V_t f(x) = f(x-t)$ で定め, $W_{s+it} = e^{ist/2} V_s U_t$ とおく. $\{W_z ; z \in \mathbb{C}\}$ は $\mathbb{C}$ で添字づけられた $\mathcal{H}$上の Weyl system と呼ばれ,

$$W_z W_{z'} = e^{i \mathrm{Im} z \overline{z'}/2} W_{z+z'} \tag{3.1}$$

をみたす. したがって, $\tilde{\Gamma}(W_z) = W_z \otimes W_z$ とおいても$\tilde{\Gamma}$ は homomorphism にならない. $\Gamma(W_z) = W_{z/\sqrt{2}} \otimes W_{z/\sqrt{2}}$ とおくと, (3.1) より $\Gamma : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H})$ は homomorphism になるが, 今度は coassociativity が崩れる. しかし, $\mathcal{B}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \otimes \cdots)$ のかわりに対称テンソル積・を考えて $\mathcal{B}(\mathcal{H} \cdot \mathcal{H} \cdot \cdots)$ に制限すれば, $(\Gamma \otimes 1)\Gamma|_{\mathcal{H} \cdot \mathcal{H} \cdot \mathcal{H}} = (1 \otimes \Gamma)\Gamma|_{\mathcal{H} \cdot \mathcal{H} \cdot \mathcal{H}}$ 等が成り立つので, quantum random walk の定式化にのせることができる. [5]では, $W_{z/\sqrt{n}} \otimes \cdot \otimes W_{z/\sqrt{n}}$ ($n$ 個の積) を考えることによって convolution の analogue を定義し, "characteristic function" を用いてこの convolution の収束について論じている.

*Example 4.* (Anyonic line 上の中心極限定理) [14]を参照されたい. 2 項分布が Gauss 分布に収束するという de Moivre-Laplace の中心極限定理の 1 つの quantum version と言えよう. Anyonic line algebra $\mathfrak{B}$ と braided tensor product algebra $\mathfrak{B} \underline{\otimes} \mathfrak{B}$ を考え, linear coproduct $\underline{\Delta} \xi = \xi \otimes 1 + 1 \otimes \xi$ によって $\mathfrak{B}$ に bialgebra の構造を入れる. そして, 2 項分布の density の convolution の直接計算により, その極限を求め, anyonic Gauss 分布とでも言うべきものの density を explicit に示している. さらに, それがみたす方程式 (heat equation) を導い

ている. [19]にもこの類の例と密接に関係することが書いてありそうなのであるが, まだハッキリと読み取れない (四たび筆者の知識の都合による!!).

## §4. Quantum random walk の制限

$(j_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を Hopf-von Neumann algebra $\mathfrak{M}$ の中に値を取る quantum random walk とする. $\mathfrak{A}$ を $\mathfrak{M}$ の subalgebra とする. (2.7) に鑑みて,

$$E_\rho \Gamma(\mathfrak{A}) \subset \mathfrak{A} \tag{4.1}$$

が成り立つとき, $(j_n)$ は $\mathfrak{A}$ に制限できると考えられる. 一般に, (4.1) がみたされるための条件をさがすのは意味のある問題であろう. 次のことは直ちにわかる.

**Proposition 4.1.** Subalgebra $\mathfrak{A}$ が $\mathfrak{M}$ の right coideal ならば, (4.1) が成り立つ.

*Proof.* $\Gamma\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{M}$ が right coideal の定義である ([1]参照). ∎

さて, 古典的な場合との関連で言えば, $\mathfrak{A}$ が commutative subalgebra のときが注目に値する. このとき, $\mathfrak{A}$ は underlying space $S$の上の function algebra とみなすことができよう. $\mathfrak{M}$ の中の quantum random walk は underlying space がないので, ウォークと言うよりも宙を飛んでいるような感じである. それが, commutative subalgebra の中に来ると, 地面が見えてそこに足跡 (または影) がつくという訳である.

Commutative subalgebra への制限について, §3 の例 2 に挙げた compact group の group von Neumann algebra の中の quantum random walk でもって具体的に見ておこう. この例に関しては, [3], [17], [20], [4]等結構いろんなところで調べられている. $G$, $\mathfrak{M} = \mathcal{L}(G)$, $\Gamma$, $\mathcal{H}$ は例 2 のとおりとする. $\mathfrak{M}$ の commutative subalgebra としてまず思い浮かぶのは, トーラス $T$の $\mathcal{L}(T)$ と中心 $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(G)$ であろう. $\mathcal{L}(T)$ への制限については[4]を参照されたい. $\mathcal{Z}$ への制限についても, 既に[11]にも書いたので, 簡単に述べるにとどめる. Peter-Weyl によって, $\mathcal{H} = \oplus_{\tau\in\hat{G}}\mathcal{H}_\tau$, $\mathcal{H}_\tau \simeq V_\tau^{\oplus d_\tau}$ ($V_\tau$ は既約表現) と分解し, $\pi_\tau : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}_\tau$ を projection とすると, $\pi_\tau \in \mathcal{Z}$ である. $\{\pi_\tau; \tau \in \hat{G}\}$ は self-adjoint idempotents であるから, $\mathcal{Z}$の元を$\hat{G}$上の関数とみなしたとき, $\hat{G}$上のデルタ関数$\delta_\tau$の役割を果たすのが$\pi_\tau$である. この同一視のも

とで, density operator $\rho = \sum_{\mu\in\hat{G}}(p(\mu)/d_\mu^2)\pi_\mu$ $(p(\mu)\geq 0, \sum p(\mu)=1)$ によって生成される $\mathfrak{M}$-valued quantum random walk の $\mathcal{Z}$への制限は

$$(E_\rho \Gamma)\delta_\nu(\lambda) = \sum_{\mu\in\hat{G}} p(\mu)N_{\lambda\mu\nu}\frac{d_\nu}{d_\lambda d_\mu} \tag{4.2}$$

をみたすことが示される. ただし, $N_{\lambda\mu\nu}$ は

$$\chi_\lambda\chi_\mu = \sum_\nu N_{\lambda\mu\nu}\chi_\nu \qquad (\chi_\lambda \text{ は } V_\lambda \text{ の character}) \tag{4.3}$$

をみたす非負整数である. (4.2) の左辺は$\lambda$から$\nu$にうつる確率 $p(\lambda,\nu)$ を表す. また, (4.3) を

$$\frac{\chi_\lambda}{d_\lambda}\Big(\sum_\mu p(\mu)\frac{\chi_\mu}{d_\mu}\Big) = \sum_\nu\Big(\sum_\mu p(\mu)N_{\lambda\mu\nu}\frac{d_\nu}{d_\lambda d_\mu}\Big)\frac{\chi_\nu}{d_\nu}$$

と書き換えてみると, (4.2) の右辺は, 既約表現のテンソル積の既約分解の法則 (あるいは Littlewood-Richardson rule) から生じる random walk の transition probability に他ならない. こうして, $\mathfrak{M}=\mathcal{L}(G)$ の中の quantum random walk を $\mathfrak{A}=\mathcal{Z}$ に制限することによって, 既約表現の上の (言い換えれば, weight lattice と Weyl chamber との共通部分の上の) random walk が得られる.

## §5. Quantum random walk in Kac algebras

Kac algebra の説明を行う任には到底耐え得ない (五たび筆者の知識の都合による!!) ので, [8]を参照してもらうことにする. ここでは, compact type の Kac algebra $\mathfrak{M}$ のみを考え, $\mathfrak{M}$ というのは, faithful Haar state $\phi$ をもっているような Hopf-von Neumann algebra だと思っておくことにしよう. ただし, ここでは, Haar state $\phi$とは

$$(\phi\otimes 1)\Gamma x = \phi(x)1 \qquad \Big(c.f. \int x(st)d\phi(s) = \int x(s)d\phi(s)\Big)$$

をみたすもののことであると思っておく. 次のことは直ちにわかる.

**Proposition 5.1.** Haar state $\phi$は任意の $\mathfrak{M}$-valued quantum random walk の invariant state である.

*Proof.* $\rho$を $\mathfrak{M}$ 上の normal state とすると,

$$\langle (E_\rho \Gamma)^* \phi, x\rangle = \langle \phi, E_\rho \Gamma x\rangle = \langle \phi \otimes \rho, \Gamma x\rangle$$
$$= (1 \otimes \rho)(\phi \otimes 1)(\Gamma x) = \langle \phi, x\rangle ,$$

ゆえに $(E_\rho \Gamma)^* \phi = \phi$ . ∎

古典的な場合と比較すれば, $\phi$はもちろん uniform probability に当たる. Compact group 上の probability の convolution power がいつ uniform probability に収束するかについては, Kawada-Ito による先駆的な仕事が既に 1940 年にある ([13]).

さらに, convolution power が invariant measure に収束するか否かだけでなく, その収束の仕方を詳しく解析するのも, 確率論的に非常に興味深い問題である. この方面では, 有限群あるいはその (Gel'fand pair に付随する) 等質空間上の random walk に関して, Diaconis を中心とした人々による著しい結果がある. [6]を参照. $\rho \star \cdots \star \rho$ と invariant measure $\phi$との variation distance をはかると, 特定の時点 (臨界時刻) を境にしてそこで distance が急に小さくなるというふうな現象がしばしば見られ, Diaconis はそれを cut-off phenomenon と呼んだ. [12]では, association scheme 上の random walk に対して, このような cut-off phenomena が起こるのはどのような場合かを論じ, 幾つかの具体的なモデルにおいて, cut-off の検証と臨界時刻の計算を行った. これらの結果を出すには, random walk を生じさせる代数的構造についてのかなり詳細な情報が必要であり, 一般論のみでは如何ともしがたい. Quantum random walk の invariant state への収束の仕方を調べるのはたいへん興味深い問題であるのだが, この方面では未だ目立った結果はないようである. しかし, compact type あるいは有限次元の Kac algebra がそのような場を提供してくれる可能性は結構あるのではないかと思う.

最後に, Diaconis の一連の仕事において, 重要な役割を果たす upper bound lemma (たぶん, [7]が最初) に相当するものを compact type の Kac algebra の文脈で書き下しておこう. Haar state $\phi$によって内積 $(x,y) = \phi(x^*y)$ を定め, この内積から導かれるノルムによる $\mathfrak{M}$ の完備化を $\mathcal{H}$とする. $\omega \in \mathfrak{M}$ に対して $\|\omega\|_\phi = \sup_{x\in\mathfrak{M},(x,x)\le 1} |\omega(x)|$ とおく. $\mathfrak{M}_*$の Fourier representation を $\lambda : \mathfrak{M}_* \longrightarrow \hat{\mathfrak{M}} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ で表す. [8]の Chap.6 により, $\lambda$は $\mathcal{H} = \oplus_{i \in I} p_i \mathcal{H}$ ($d_i = \mathrm{rank} p_i$) と既約表現の直和に分解され, 次の不等式を得る. ただし, $0 (\in I)$ は自明な 1 次元表現を表す.

**Proposition 5.2.**

$$\|\rho \star \cdots \star \rho - \phi\|^2_{\mathfrak{M}_*} \leq \sum_{i \neq 0} d_i Tr(\lambda(\rho)^{*n} \lambda(\rho)^n p_i)$$

**References**


1. 阿部 英一; "ホップ代数", 岩波, 東京, 1977.
2. L.Accardi, A.Frigerio, J.T.Lewis; Quantum stochastic processes, Publ. RIMS Kyoto Univ. **18** (1982), 97–133.
3. P.Biane; Marches de Bernoulli quantiques, in "Séminaire de probabilités XXIV", 329–344, Lect. Notes in Math. **1426**, Springer, Berlin New York, 1990.
4. P.Biane; Quantum random walk on the dual of SU(n), Probab. Th. Rel. Fields **89** (1991), 117–129.
5. I.Cuculescu, A.G.Oprea; "Noncommutative probability", Kluwer Academic, Dordrecht, 1994.
6. P.Diaconis; "Group representations in probability and statistics", IMS, Hayward, California, 1988.
7. P.Diaconis, M.Shahshahani; Generating a random permutation with random transpositions, Z. Wahr. verw. Geb. **57** (1981), 159–179.
8. M.Enock, J.-M.Schwartz; "Kac algebras and duality of locally compact groups", Springer, Berlin Heidelberg New York, 1992.
9. L.Gallardo, O.Gebuhrer; Marches aléatoires et hypergroups, Expo. Math. **5** (1987) 41–73.

10. H.Heyer; Probability theory on hypergroups: a survey, in "Probability measures on groups VII (Oberwolfach 1983)", 481–550, Lect. Notes in Math. **1064**, Springer, Berlin New York, 1984.

11. 洞 彰人; リー環の表現のテンソル積の分解から生じるランダムウォークについて, in "無限次元空間上の測度論, 無限次元群の表現, および関連した話題", 169–179, 数理解析研究所講究録 **887**, 京都大学数理解析研究所, 1994.

12. A.Hora; Random walks on association schemes and their critical times to reach equilibrium, preprint, p.p.50.

13. Y.Kawada, K.Ito; On the probability distribution on a compact group I, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan **22** (1940), 977–998.

14. S.Majid, M.J.Rodríguez-Plaza; Random walk and the heat equation on superspace and anyspace, J. Math. Phys. **35** (7), (1994), 3753–3760.

15. P.-A.Meyer; "Quantum probability for probabilists", Lect. Notes in Math. **1538**, Springer, Berlin Heidelberg New York, 1993.

16. 尾畑 伸明 ; Fock 空間上の量子確率過程 — ホワイトノイズの観点から, in "無限次元空間上の測度論, 無限次元群の表現, および関連した話題", 72–96, 数理解析研究所講究録 **887**, 京都大学数理解析研究所, 1994.

17. K.R.Parthasarathy; A generalized Biane process, in "Séminaire de probabilités XXIV", 345–348, Lect. Notes in Math. **1426**, Springer, Berlin New York, 1990.

18. K.R.Parthasarathy; "An introduction to quantum stochastic calculus", Birkhäuser, Basel, 1992.

19. M.Schürmann; "White noise on bialgebras", Lect. Notes in Math. **1544**, Springer, Berlin Heidelberg New York, 1993.

20. W.von Waldenfels; The Markov process of total spins, in "Séminaire de probabilités XXIV", 357–361, Lect. Notes in Math. **1426**, Springer, Berlin New York, 1990.