数理解析研究所講究録
924巻 1995年 1-45

概均質ベクトル空間 入門

筑波大 数学系　木村達雄(Tatsuo KIMURA)

本稿は，概均質ベクトル空間の理論の基礎的部分（ゼータ関数の話の前まで）をまとめたものである。その殆どが，佐藤幹夫氏によって作られた。

K=体，$\overline{K}$= Kの代数閉包，とする。

$$GL_n(\overline{K}) \overset{def}{=} \{X \in M_n(\overline{K});\ \det X \neq 0\}$$

$$\simeq \{(X,t) \in M_n(\overline{K}) \oplus \overline{K}\ ;\ t \det X - 1 = 0\} \overset{closed}{\subset} \overline{K}^{n^2+1}$$

は affine variety ゆえ，$GL_n(\overline{K})$ の Zariski-closed subset も affine variety になる。

$GL_n(\overline{K}) \supset G$ = 部分群 が *linear algebraic group defined over K*（K上定義された線型代数群）とは

$\exists f_\lambda(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{nn}) \in K[x_{11}, x_{12}, \dots, x_{nn}]$ s.t.

$G = \{\xi = (\xi_{ij}) \in GL_n(\overline{K})\ ;\ f_\lambda(\xi) = 0\ (\lambda \in \Lambda)\}$ (注1参照)

代数群Gについては，連結 $\Leftrightarrow$ 既約（多様体）

$\Leftrightarrow$ $G \supset H$ = algebraic subgroup s.t. $[G:H] < +\infty$ ならば $H = G$，はすべて同値である。

$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G) \overset{\mathrm{def}}{=} \{ \xi = (\xi_{ij}) \in M_n(\overline{K}) \,;\, \sum_{i,j=1}^{n} \xi_{ij} \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_{ij}}(I_n) = 0 \ (\lambda \in \Lambda) \}$
は $[X, Y] = XY - YX$ によって Lie 環になる。

これを <u>G の Lie 環 Lie(G)</u> という.

例) $SL_n(\overline{K}) = \{ X \in GL_n(\overline{K}) \,;\, \det X - 1 = 0 \}$ の Lie 環は $sl_n(\overline{K}) = \{ \xi = (\xi_{ij}) \in M_n(\overline{K}) \,;\, \mathrm{tr}\, \xi = 0 \}$

G = <u>simple algebraic group</u>（単純代数群）とは

(1) 連結

(2) $G \rhd H \Rightarrow H = G$ または $\# H < +\infty$

(3) $\dim G \geq 3$ 　（$\Rightarrow G \not\cong GL_1, \{1\}$）

G = <u>semisimple algebraic group</u>（半単純代数群）とは

$G^0 = G_1 \times \cdots \times G_n / ($center 内の有限群$)$

但し G^0 は G の単位元の連結成分（これは常に G の正規部分群で $[G : G^0] < +\infty$）, $G_1, \cdots, G_n$ = simple alg. group, である.

G = <u>reductive algebraic group</u> とは

$G^0 = G_1 \times \cdots \times G_n / ($center 内の有限群$)$

但し $G_1, \cdots, G_n$ は simple alg. gp 又は GL_1

特に $GL_n(\mathbb{C}) \supset G$ = reductive algebraic group については $G \supset {}^\exists K$ = maximal compact subgroup s.t. $G = \overline{K}$.

そして $\exists A \in GL_n(\mathbb{C})$ s.t. $A^{-1}KA \subset U_n = \{g \in G \,;\, {}^t\bar{g}g = I_n\}$

$\left(\begin{array}{l} \because)\ K \text{ の Haar measure を } dx \text{ として } C = \int_K {}^t\bar{x}x\,dx \text{ を考え} \\ \text{ると, } K \text{ は unimodular ゆえ } {}^t\bar{g}Cg = C \text{ for } \forall g \in K\text{. これより。} \end{array}\right)$

$V = \bar{K}$ 上の有限次ベクトル空間で K-structure V_K をもつもの

即ち $V = V_K \otimes_K \bar{K}$, とする.

$GL_m(\bar{K}) \supset G =$ 連結 線型代数群$/K$, とする.

$\rho : G \to GL(V)$ homom. が <u>K-rational representation</u>

とは, V_K の base をとって $V \simeq \bar{K}^n \supset K^n = V_K$ とするとき

$$\begin{array}{ccc} M_m(\bar{K}) & & M_n(\bar{K}) \\ \cup & & \cup \\ GL_m(\bar{K}) & & GL_n(\bar{K}) \\ \cup & & \| \\ G & \xrightarrow{\quad\rho\quad} & GL(V) \\ \Psi & & \Psi \\ x = (x_{ij}) & \longmapsto & \rho(x) = (\rho(x)_{ij}) \end{array}$$

ここで $\rho(x)_{ij} = f_{ij}(x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{mm}) \in K(x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{mm})$

と表わせること. このとき $(G, \rho, V) =$ <u>defined over K</u> という.

(G, ρ, V) が <u>概均質ベクトル空間</u> (Prehomogeneous Vector space 略して P.V.) とは

$\exists v_0 \in V$ s.t. $\overline{\rho(G)v_0} = V$ ($\overline{}$ は Zariski-closure).

$G_{v_0} = \{g \in G \,;\, \rho(g)v_0 = v_0\}$ とおくと $\rho(G)v_0 \simeq G/G_{v_0}$

ゆえ これは $\dim V = \dim \rho(G)v_0 = \dim G - \dim G_{v_0}$ と同値.

即ち $(G, \rho, V) = \mathrm{P.V.}$

$\Leftrightarrow \exists v_0 \in V$ s.t. $\dim G_{v_0} = \dim G - \dim V$

さて $ch(K)=0$ のときは，$\dim \mathrm{Lie}(G_{v_0}) = \dim G_{v_0}$ ゆえ

$\underset{ch(K)=0}{\Longleftrightarrow} \exists v_0 \in V$ s.t. $\dim \mathrm{Lie}(G_{v_0}) = \dim G - \dim V$

例えば $\mathbb{C}$ 上の (G, ρ, V) が P.V. である事を示すのにこれを使う事が多い。$\dim \mathrm{Lie}(G_{v_0})$ は線型代数で計算できるからである。一般に軌道 $\rho(G)v_0$ については

$\rho(G)v_0 = \overline{\rho(G)v_0} - (\overline{\rho(G)v_0} - \rho(G)v_0)$ （$\overline{}$ は Zariski 閉包）が成り立つから，$(G, \rho, V) = \mathrm{P.V.}$

$\Leftrightarrow V \supset \exists S =$ Zariski-closed set s.t. $V - S = \rho(G)v_0$

このとき S を (G, ρ, V) の <u>singular set</u>（特異集合），$V - S \ni \forall y$ を <u>generic point</u> といい，そこにおける isotropy 部分群 $G_y = \{ g \in G \,;\, \rho(g)y = y \}$ for $y \in V - S$ を <u>generic isotropy subgroup</u> という。

$G_{\rho(g)y} = g G_y g^{-1}$ ゆえ，これらはすべて同型である。

（例）$G = GL_n(\overline{K})$，$V = \{ x \in M_n(\overline{K}) \,;\, {}^t x = x \}$

$\rho(g)x = g x {}^t g$，とする。$y = I_n$ における isotropy 部分群は定義から $G_y = O_n$．そして

$$\dim O_n = \frac{n(n-1)}{2} = \underbrace{\dim G}_{\shortparallel \atop n^2} - \underbrace{\dim V}_{\shortparallel \atop \frac{n(n+1)}{2}},$$

従って

$(G, \rho, V) = \mathrm{P.V.}$ となる。//

有理関数 $f(x) \neq 0$ が<u>相対不変式</u>(relative invariant)とは，$f(\rho(g)x) = \chi(g)f(x)$ $(\forall g \in G)$ 但し $\chi : G \to GL_1$ 有理準同型．このとき $f \leftrightarrow \chi$ と記す．特に $f \leftrightarrow 1$ のとき，f を<u>絶対不変式</u>(absolute invariant)という。

> **Proposition 1** $(G, \rho, V) = P.V.$ とする．
> (1) 絶対不変式は定数である．
> (2) $f_1 \leftrightarrow \chi,\ f_2 \leftrightarrow \chi \Rightarrow {}^{\exists}c =$ 定数 s.t. $f_1 = cf_2$

$\because$ (1) 絶対不変式 f は $G v_0 = V - S$ 上定数ゆえ $V = \overline{G \cdot v_0}$ 上でも定数である．
(2) $\dfrac{f_1}{f_2}$ は絶対不変式ゆえ定数である． //

注）これが，概均質ベクトル空間の理論のすべての出発点である．逆にこの Prop 1 が概均質ベクトル空間を特徴づけることも知られている．

> **Corollary** (G, ρ, V) に於て non-constant absolute invariant f が存在すれば，$(G, \rho, V) \neq P.V.$

与えられた (G, ρ, V) が $P.V.$ ではない事を示すときは，この Corollary がよく使われる。例を示そう。

$G = GL_1^4 \times SL_n \ni g = (\alpha, \beta, \gamma, \delta ; A)$

$V = \overline{K}^n \oplus \overline{K}^n \oplus \overline{K}^n \oplus \overline{K}^n \ni \tilde{x} = (x, y, z, w)$

$$\rho(g)\hat{x} = (\alpha Ax,\ \beta Ay,\ \gamma\,{}^tA^{-1}z,\ \delta\,{}^tA^{-1}w)$$

このとき, $\langle x, z\rangle = {}^tx z \longmapsto \alpha\gamma\langle x, z\rangle$

$\langle x, w\rangle \longmapsto \alpha\delta\langle x, w\rangle$

$\langle y, z\rangle \longmapsto \beta\gamma\langle y, z\rangle$

$\langle y, w\rangle \longmapsto \beta\delta\langle y, w\rangle$

$\Rightarrow\ f(\hat{x}) = \dfrac{\langle x, z\rangle\langle y, w\rangle}{\langle x, w\rangle\langle y, z\rangle}$ は絶対不変式.

$x = y = z = w = \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} \Rightarrow f(\hat{x}) = 1$ であるが

$x = w = \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$, $y = z = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} \Rightarrow f(\hat{x}) = 0$. よって

$f \neq$ 定数. よって $(G, \rho, V) \neq$ P.V. //

Proposition 2 $(G, \rho, V) =$ P.V. の singular set S の既約分解を $S = \{f_1 = 0\} \cup \cdots \cup \{f_\ell = 0\} \cup S''$, $\operatorname{codim} S'' \geqq 2$ とすると, $f_1 \leftrightarrow \chi_1, \cdots, f_\ell \leftrightarrow \chi_\ell$ は相対不変式で, 逆に任意の相対不変式 f は $f(x) = c f_1(x)^{m_1} \cdots f_\ell(x)^{m_\ell}$, 但し $c \in \overline{K}^\times$, $(m_1, \cdots, m_\ell) \in \mathbb{Z}^\ell$, と表わされる.

∵) 一般に $X, Y =$ irreducible varieties, $\varphi: X \times Y \to Z$ を morphism とすると $\overline{\varphi(X \times Y)} =$ irreducible. これを $X = G$ (連結を仮定している!), $Y = \{f_i = 0\}$, $Z = V$, $\varphi(g, x) = \rho(g)x$, に適用して

$\underset{\substack{\shortparallel \\ \text{既約, codim}=1}}{\{f_i = 0\}} \subset \underset{\substack{\shortparallel \\ \text{既約}}}{\overline{\rho(G)\cdot\{f_i = 0\}}} \subset S \subset V$ となるから

$\rho(G)\cdot\{f_i=0\}=\{f_i=0\}$ よってHilbert零点定理により $f_i(\rho(g)x)$ と $f_i(x)$ は定数倍を除いて一致する：

$f_i(\rho(g)x) \overset{\exists}{=} \chi_i(g) f_i(x) \quad (i=1,\cdots,l)$

後半は，任意の相対不変式 $f(x)$ の既約分解 $f(x)=\prod_i R_i(x)$ を考えると，まず $R_i(x)$ たち自身も相対不変式になる事を示そう。

$\prod_i R_i(\rho(g)x) = \chi(g)\prod_i R_i(x)$ であるが，$R_i(\rho(g)x)$ は既約（$R_i(\rho(g)x)=A(x)B(x) \Rightarrow R_i(x)=A(\rho(g^{-1})x)B(\rho(g^{-1})x)$ 矛盾）ゆえ

$\exists j$ s.t. $R_i(\rho(g)x) = \mathrm{const}.R_j(x)$

今 i を fix して，$G_j=\{g\in G\,;\,R_i(\rho(g)x)=\mathrm{const}.R_j(x)\}$ とおくと，これは $\neq\phi$ なら，$={}^\exists g_j\cdot G_i$ と表わせる。

一方 $G_i\ni e$ ($\Rightarrow G_i\neq\phi$) ゆえ G_i は G の index finite な部分代数群。$G=$連結 を仮定しているから $G=G_i$ 即ち $R_i(\rho(g)x)\overset{\exists}{=}\chi_i'(g)R_i(x)$.

よって $f(x)\overset{\forall}{=}$既約相対不変多項式，としてよい。

$\{f=0\}$ は G 不変な codim1 の既約集合ゆえ

$\{f=0\}\subset S$. 即ち $\{f=0\}$ は S の既約成分ゆえ

$\{f=0\}\overset{\exists}{=}\{f_i=0\}$ 即ち $f=\mathrm{const}.f_i$ //

さて $K[x_1,\cdots,x_n]=$U.F.D.（素元一意分解整域）ゆえ $\chi_1,\cdots,\chi_l$ たちは乗法独立である。

注) これから $\underline{f_1,\cdots,f_l \text{ は代数独立}}$ であることが次のようにしてわかる。代数従属と仮定して $M_1,\cdots,M_s$ を $f_1,\cdots,f_l$ の単項式 $f_1^{a_1}\cdots f_l^{a_l}$ として(従って各 M_i は相対不変式, $M_i(\rho(g)x)=\mu_i(g)M_i(x)$ とする),

$c_1M_1+\cdots+c_sM_s=0$ ($\forall c_i \neq 0$) なる最小の s をとる。

$\chi_1,\cdots,\chi_l$ の乗法独立性より $\mu_1,\cdots,\mu_s$ はすべて異なり,

g を作用させて $c_1\mu_1(g)M_1+c_2\mu_2(g)M_2+\cdots+c_s\mu_s(g)M_s=0$

一方, $\mu_1(g)$ をかけて, $c_1\mu_1(g)M_1+c_2\mu_1(g)M_2+\cdots+c_s\mu_1(g)M_s=0$

差をとって $\underbrace{c_2(\mu_1(g)-\mu_2(g))}_{\neq 0}M_2+\cdots+c_s(\mu_1(g)-\mu_s(g))M_s=0$

これは s の最小性に反する。//

$$X(G) \overset{\text{def}}{=} \{\chi : G \to GL_1 \text{ rational characters}\}$$

$$X_1(G) \overset{\text{def}}{=} \{\chi \in X(G)\ ;\ \chi \leftrightarrow {}^{\exists}f = \text{相対不変式}\}$$

$$\| $$

$\langle \chi_1,\cdots,\chi_l \rangle$; rank l の free abelian group,

がわかった。

(仮定) $(G,\rho,V)=$ P.V. $V-S \ni x$ に対し

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & V \\ \Psi & & \Psi \\ g & \longmapsto & \rho(g)x \end{array}$$

は常に $\underline{\textit{separable}}$ *dominant morphism* であることを仮定する。これは

$\{d\rho(A)x\ ;\ A \in \mathit{Lie}(G)\}=V$ と同値である。

但し $d\rho$ は ρ の微分表現。(12頁参照)

この仮定は $\mathbb{C}$ など標数 0 の時は常に満たされている。正標数のとき P.V. では常にこの条件を仮定することにする。そうすると $G/G_x = V-S$ と思ってよい。

Proposition 3 $(G, \rho, V) = $ P.V. $\quad V-S \ni y$ $\Rightarrow X_1(G) = \{\chi \in X(G)\,;\ \chi\|G_y = 1\}$

∵) $\chi \leftrightarrow f = $ 相対不変式, $g \in G_y$ ならば

$$\begin{array}{l} f(\rho(g)y) = \chi(g)f(y) \\ \quad \parallel \\ f(y)\ (\neq 0, \infty) \end{array} \quad \Rightarrow \chi(g) = 1 \quad \text{i.e. } \chi|G_y = 1.$$

逆に $\chi|G_y = 1$ ならば

$\chi : G/G_y = \rho(G)y = V-S \longrightarrow GL_1$ で

$(\,x = \rho(g)y = \rho(g')y \Rightarrow \chi(g) = \chi(g')$ ゆえ $= f(x)$ とおく$)$ $f(\rho(g_0)x) = \chi(g_0 g) = \chi(g_0)\chi(g) = \chi(g_0)f(x)$

即ち f は V 上の rational function $\longleftrightarrow \chi$ //

注) $G_{\rho(g)y} = gG_y g^{-1}$ ゆえ $[G, G]\cdot G_{\rho(g)y} = [G, G]\cdot G_y$ 即ち $G_1 \overset{def}{=} [G, G]\cdot G_y$ は $y \in V-S$ のとり方によらない。$\chi([a, b]) = \chi(a^{-1}b^{-1}ab) = \chi(a)^{-1}\chi(b)^{-1}\chi(a)\chi(b) = 1$ ゆえ $\chi|[G, G] = 1$, よって

$X_1(G) = \{\chi \in X(G)\,;\ \chi|G_1 = 1\}$ とも表わせる.

さて一般に $(G, \rho, V) = $ P.V. でもその dual (G, ρ^*, V^*) は P.V. とは限らない。但し V^* は V の dual ベクトル空間, ρ^* は ρ の反傾表現. 例えば $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \right\}$, $V = K^2$, $\rho(g)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + b x_2 \\ a x_2 \end{pmatrix}$ なら $S = \{x_2 = 0\}$ で (G, ρ, V) は P.V. しかし
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ b y_1 + a y_2 \end{pmatrix}$ ゆえ y_1 が non-const. absolute invariant となり $(G, \rho^*, V^*) \neq$ P.V.

これでは具合が悪いので "良い条件" を探そう.
$f =$ 相対不変式 $\longleftrightarrow \chi$, とするとき,

$$\varphi_f = \operatorname{grad} \log f : V - S \longrightarrow V^*$$

なる map を考えよう.

$$x \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{f(x)} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{1}{f(x)} \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

Proposition 4 (1) $\varphi_f(\rho(g)x) = \rho^*(g)\varphi_f(x)$

(2) $$\left(\frac{\partial^2 \log f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right) = {}^t\rho(g)\left(\frac{\partial^2 \log f}{\partial x_i \partial x_j}(\rho(g)x) \right)\rho(g)$$

とくに $\operatorname{Hess} \log f(x) = \det\left(\frac{\partial^2 \log f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)$ とおくと

$$\operatorname{Hess} \log f(\rho(g)x) = \det \rho(g)^{-2} \cdot \operatorname{Hess} \log f(x)$$

∵) 簡単のため $G \subset GL_n$ としても一般性を失なわない. $f(gx) = \chi(g) f(x)$ を微分して

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(gx) = \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(gx) \underbrace{\frac{\partial (gx)_k}{\partial x_i}}_{\displaystyle \frac{\partial \sum_j g_{kj} x_j}{\partial x_i} = g_{ki}}$$

$$\| \quad \chi(g) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

両辺を $\chi(g) f(x) = f(gx)$ でわって,

$$\frac{1}{f(x)} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \sum_k g_{ki} \cdot \frac{1}{f(gx)} \frac{\partial f}{\partial x_k}(gx) \quad \cdots\cdots \quad (*)$$

よって $\varphi_f(x) = {}^t g \cdot \varphi_f(gx) \quad \therefore \varphi_f(gx) = {}^t g^{-1} \varphi_f(x)$

一般的に書けば $\varphi_f(\rho(g)x) = \rho^*(g) \varphi_f(x)$ となる.

$(*)$ は $\displaystyle \frac{\partial \log f}{\partial x_i}(x) = \sum_k g_{ki} \frac{\partial \log f}{\partial x_k}(gx)$

と書ける. 両辺を $\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ で微分して

$$\frac{\partial^2 \log f}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \sum_k g_{ki} \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \log f}{\partial x_k}(gx)$$

$$= \sum_k g_{ki} \sum_t \frac{\partial^2 \log f}{\partial x_t \partial x_k}(gx) \underbrace{\frac{\partial (gx)_t}{\partial x_j}}_{\displaystyle \frac{\partial \sum_s g_{ts} x_s}{\partial x_j} = g_{tj}}$$

$$= \sum_{k,t} g_{ki} \cdot \frac{\partial^2 \log f}{\partial x_t \partial x_k}(gx) \cdot g_{tj}$$

即ち $\displaystyle \left(\frac{\partial^2 \log f}{\partial x_j \partial x_i}(x) \right) = {}^t g \left(\frac{\partial^2 \log f}{\partial x_t \partial x_k}(gx) \right) g$

一般には $\displaystyle \left(\frac{\partial^2 \log f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right) = {}^t \rho(g) \left(\frac{\partial^2 \log f}{\partial x_i \partial x_j}(\rho(g)x) \right) \rho(g)$

となる. 両辺の行列式をとれば $\mathrm{Hess} \log f(x)$ の相対不変性が導かれる. //

定義. $(G, \rho, V) = $ P.V. が <u>regular</u>（正則）とは
$\varphi_f : V - S \to V^*$ が dominant $(\Leftrightarrow \overline{\varphi_f(V-S)} = V^*)$
になる相対不変式 f が存在すること．（このとき $f = $ non-degenerate という）
これは $\det(d\varphi_f(x)) = \mathrm{Hess}\log f(x) \not\equiv 0$
（恒等的には 0 でない）と同値である．
Prop 4 により $\varphi_f(V-S)$ は (G, ρ^*, V^*) の dense orbit になるから $(G, \rho^*, V^*) = $ P.V. で，
$\det\rho(g)^2 \leftrightarrow \mathrm{Hess}\log f(x)^{-1}$ 即ち $\det\rho(g)^2 \in X_1(G)$
となる． よって次を得る．

Proposition 5 $(G, \rho, V) = $ a regular P.V.
$\Rightarrow (G, \rho^*, V^*) = $ P.V. かつ $\det\rho(g)^2 \in X_1(G)$

$\overline{K} = \mathbb{C}$ のとき $\exp tA \in G \Leftrightarrow A \in \mathcal{L}ie(G)$
で $\chi(\exp tA) = \exp t\,\delta\chi(A)$
$\rho(\exp tA) = \exp t\,d\rho(A)$
により χ, ρ の微分 $\delta\chi, d\rho$ を定める．

Lemma 6 $\langle d\rho(A)x, \varphi_f(x)\rangle = \delta\chi(A)$
$(\forall x \in V-S, \ \forall A \in \mathcal{L}ie(G))$

$\because$
$$\begin{array}{ccc} f(\rho(\exp tA)x) & = & \chi(\exp tA)f(x) \\ \| & & \| \\ f(\exp t\,d\rho(A)x) & & \exp t\,\delta\chi(A)f(x) \end{array}$$

両辺を t で微分して $t=0$ とおくと，

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \frac{d(\exp t\, d\rho(A)x)_i}{dt} = \delta\chi(A) f(x)$$

$$\| $$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) (d\rho(A)x)_i = \langle d\rho(A)x, \operatorname{grad} f(x) \rangle$$

$$\therefore \langle d\rho(A)x, \underbrace{\varphi_f(x)}_{= \frac{\operatorname{grad} f(x)}{f(x)}} \rangle = \delta\chi(A) \qquad //$$

注) Lemma 6 は $f(x)$ の相対不変性の infinitesimal な表現である．尚，Lemma 6 は $\mathbb{C}$ に限らず一般の K で成立する．

> Lemma 7 (1) $\varphi_f : V-S \to V^*$ は単射
> (2) $G_x = G_{\varphi_f(x)}$

$\because$) (1) $\varphi_f(x) = \varphi_f(x')$ ならば，

$\langle d\rho(A)x, \varphi_f(x) \rangle = \delta\chi(A) = \langle d\rho(A)x', \varphi_f(x') \rangle$

より $\langle d\rho(A)(x-x'), \varphi_f(x) \rangle = 0$

$$\| $$

$$-\langle x-x', d\rho^*(A)\varphi_f(x) \rangle$$

separable の仮定（8頁）より $\{ d\rho^*(A)\varphi_f(x) ; A \in \mathrm{Lie}(G) \} = V^*$ であるから，$x-x'=0$ 即ち $x=x'$，$\varphi_f =$ 単射．

(2) $G_x \ni g \Leftrightarrow \rho(g)x = x \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} \varphi_f(\rho(g)x) = \varphi_f(x)$

$$g \in G_{\varphi_f(x)} \Longleftrightarrow \rho^*(g)\varphi_f(x) \quad (\text{with } \varphi_f(\rho(g)x) = \rho^*(g)\varphi_f(x))$$

$\therefore G_x = G_{\varphi_f(x)}$ //

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Proposition 8} \quad (G, \rho, V) = \text{a regular P.V.} \\ \Rightarrow (G, \rho^*, V^*) = \text{a regular P.V.} \ \text{かつ} \ X_1(G) = X_1^*(G)\end{array}}$$

$\because$ $X_1(G) \overset{\text{Prop 3}}{=} \{\chi \in X(G) \,;\, \chi|G_x = 1\}$

$$\overset{\text{Lem 7}}{=} \{\chi \in X(G) \,;\, \chi|G_{\varphi_f(x)} = 1\} \overset{\text{Prop 3}}{=} X_1^*(G)$$

そこで $\underset{\text{non-deg.}}{f} \leftrightarrow \chi \in X_1(G) = X_1^*(G) \ni \chi^{-1} \longleftrightarrow {}^\exists f^*$

として $\psi_{f^*} = \operatorname{grad}\log f^* : V^* - S^* \to V$ を考える.

Lemma 6 より $\langle \psi_{f^*}(y), d\rho^*(A)y \rangle = -\delta\chi(A)$

一方 $\delta\chi(A) = \langle d\rho(A)x, \varphi_f(x)\rangle = -\langle x, d\rho^*(A)\varphi_f(x)\rangle$

ゆえ $y = \varphi_f(x)$ として

$\langle \psi_{f^*}(\varphi_f(x)) - x, \ d\rho^*(A)\varphi_f(x) \rangle = 0$

separable の仮定 (8頁) より $\{d\rho^*(A)\varphi_f(x) \,;\, A \in \mathrm{Lie}(G)\}$

$= V^*$ であるから,

$\psi_{f^*}(\varphi_f(x)) = x \in V - S \quad \therefore \psi_{f^*} = \text{dominant}$

で $f^* = \text{non-degenerate}$, 即ち $(G, \rho^*, V^*) = \text{regular}$ //

Proposition 9 (G, ρ, V) = a regular P.V. s.t. $X_1(G) = \langle \chi \rangle$
$f \leftrightarrow \chi$, $\deg f = d$, $\dim V = n$
$\Rightarrow d \mid 2n$, $\det \rho(g)^2 = \chi(g)^{\frac{2n}{d}}$

∵) Prop 5 により $\exists m \in \mathbb{Z}$ s.t. $\det \rho(g)^2 = \chi(g)^m$
今 $\rho(g) = tI_V$ にとると $\det \rho(g) = t^n$ で
$f(\rho(g)x) = f(tx) = t^d f(x)$ ゆえ $\chi(g) = t^d$
$\therefore t^{2n} = t^{dm}$　$\therefore m = \frac{2n}{d}$　//

さて (G, ρ, V) = P.V. の相対不変式 $f \leftrightarrow \chi$
に対し (G, ρ^*, V^*) = P.V. で $f^* \leftrightarrow \chi^{-1}$ かつ
f^* = 多項式，と仮定する.

$f^*(x) = \sum a_{i_1 \cdots i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$ に対して
$f^*(D_x) \overset{\text{def}}{=} \sum a_{i_1 \cdots i_n} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{i_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{i_n}$ とおく.
即ち $f^*(D_x)$ は $f^*(D_x) e^{\langle x, y \rangle} = f^*(y) e^{\langle x, y \rangle}$
なる定数係数微分作用素である.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ ならば } \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial y_n} \end{pmatrix} = {}^t g^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} \text{ ゆえ}$$

$\varphi(x) = f^*(D_x) f(x)^{s+1}$ とおくと $\varphi(\rho(g)x) = \chi(g)^s \varphi(x)$
勿論 $f(\rho(g)x)^s = \chi(g)^s f(x)$ でもあるから
$\frac{f^*(D_x) f(x)^{s+1}}{f(x)^s} = b(s)$ は $x \in V - S$ に依存しない.

即ち $$f^*(D_x)f(x)^{s+1}=b(s)f(x)^s$$

$\frac{\partial}{\partial x_i}f(x)^{s+1}=(s+1)f(x)^s\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ etc. であるから

$b(s)$ は s の多項式 で $\deg b(s)\leq \deg f^*(x)$ である。

これを f の b-関数 とよぶ、とくに $S=\{f=0\}$

のときは、(G,ρ,V) の b-関数 という。

Proposition 10 $(G,\rho,V)=$ a reductive P.V. over $\mathbb{C}$ (注2参照)

f 多項式 $\leftrightarrow \chi$, $d=\deg f$

$\Rightarrow (G,\rho^*,V^*)$ に於て $^\exists f^*$ d 次多項式 $\leftrightarrow \chi^{-1}$

s.t. (1) $f^*(D_x)f(x)^{s+1}=b(s)f(x)^s$ で

$b(s)=b_0s^d+$ 低次の項 $(b_0\neq 0)$ i.e. $\deg b(s)=d$

(2) $f^*(\varphi_f(x))=\dfrac{b_0}{f(x)}$

$\because$) $G=$ reductive ゆえ $G\supset {}^\exists K=$ maximal compact 部分群 s.t. $G=\overline{K}$. 共役を考えて $K\subset U_n$ として可、

$f^*(y)\overset{def}{=}\overline{f(\overline{y})}$ とおくと、$g\in K\Rightarrow \rho^*(g)y=$

${}^tg^{-1}y=\overline{g}y$ ゆえ $f^*(\rho^*(g)y)=f^*(\overline{g}y)$

$=\overline{f(g\overline{y})}=\overline{\chi(g)}\ \overline{f(\overline{y})}=\overline{\chi(g)}f^*(y)$

$|\chi(K)|$ は $\mathbb{R}_+^\times$ の compact 部分群 ゆえ $=\{1\}$

よって $\overline{\chi(g)}=\chi(g)^{-1}$ for $g\in K$

$\therefore f^*(\rho^*(g)y)=\chi(g)^{-1}f^*(y)$ for $^\forall g\in K$

従って $\forall g\in\overline{K}=G$ に対し この代数関係は成立、

$$f(x)^m = \sum_{i_1+\cdots+i_n=dm} a^{(m)}_{i_1\cdots i_n} x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}$$ とおくと

$$f^*(x)^m = \sum_{i_1+\cdots+i_n=dm} \overline{a^{(m)}_{i_1\cdots i_n}} x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}$$ である.

$f((1,0,\cdots,0))=a\neq 0$ として一般性を失なわない.
($f(v)\neq 0$ なる v をとり, $v=v_1,\cdots,v_n$ を正規直交系にとってこれで座標をとり直せばよい)

$$\Rightarrow \quad |f^*(D_x)^m f(x)^m| = \sum_{\substack{i_1+\cdots+i_n\\=dm}} |a^{(m)}_{i_1\cdots i_n}|^2 (i_1!)\cdots(i_n!)$$

$$\begin{array}{cc} \| & \mathbin{\rotatebox[origin=c]{90}{$\leq$}} \\ |b(m-1)b(m-2)\cdots b(1)b(0)| & |a|^{2m}(dm)! \end{array}$$

今 $\deg b(s)=d'\ (\leq d=\deg f^*)$ とすると

$\exists C>0$ s.t. $|b(m)|\leq C(m+1)^{d'}$ for $\forall m\geq 1$

(例えば $b(s)=b_0s^{d'}+b_1s^{d'-1}+\cdots+b_{d'}$, $\max|b_i|=C$ とおくと $|b(s)|\leq C\sum_{i=0}^{d'}|s|^i \leq C(|s|+1)^{d'}$ とくに $s=m\geq 1$ に対し $|b(m)|\leq C(m+1)^{d'}$ となる)

$$\Rightarrow |b(m-1)b(m-2)\cdots b(1)b(0)| \leq C^{m-1}(m!)^{d'}\cdot b(0)$$

$$\therefore |a|^{2m}(dm)! \leq C^{m-1}(m!)^{d'}\cdot b(0)$$

$\dfrac{C^{m-1}\cdot b(0)}{|a|^{2m}} \leqq m!$ for $\forall m \geq {}^{\exists}m_0$ ゆえ

$(dm)! \leqq (m!)^{d'+1}$ for $\forall m\geq m_0$. ここでもし

$d' < d$ ならば $d'+1 \leq d$ ゆえ

$(dm)! \neq (m!)^d$ for $m \geq m_0$ 矛盾. $\therefore d' = d$.

$$
\begin{aligned}
f^*(D_x) f(x)^{s+1} &= b(s) f(x)^s = b_0 f(x)^s \cdot s^d + (s\text{の低次の項}) \\
&\quad\ \| \\
f^*\left(\tfrac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \tfrac{\partial f}{\partial x_n}\right) &\cdot f(x)^{s+1-d} \cdot s^d + (s\text{の低次の項}) \\
&\quad\ \| \\
f^*(\varphi_f(x)) &f(x)^{s+1} s^d + (s\text{の低次の項})
\end{aligned}
$$

s^d の係数を比べて $f^*(\varphi_f(x)) = \dfrac{b_0}{f(x)}$ //

Proposition 11 (G, ρ, V) = a reductive P.V. over $\mathbb{C}$ s.t. $S = \{x \in V ; f(x) = 0\}$: (既約と限らぬ)超曲面 $\Rightarrow f$ = non-degenerate, とくに (G, ρ, V) = regular

$\because)$ 簡単のため $G = \rho(G) \subset GL(V)$ としてよい.

$\overline{}$ で Zariski 閉包, $\overline{}^c$ で 複素共役 を表わす。

$G \supset K$ = max. compact 部分群 s.t. $G = \overline{K}$ とする.

base をうまくとって $K \subset U_n$ としてよい.

${}^tg^{-1} = \overline{g}^c$ for $\forall g \in K$ より ${}^tG^{-1} = \overline{G}^c$

$f^*(x) = \overline{f(\overline{x})}$, $S^* = \{f^*(x) = 0\}$ とおくと $f^*(\rho^*(g)x) = \chi^{-1}(g) f^*(x)$ (但し $f \leftrightarrow \chi$) であった. $V - S = G x_0$ なる

$$
\begin{aligned}
&\overline{V-S}^c = \overline{G}^c \cdot \overline{x}_0^c = {}^tG^{-1} \cdot \overline{x}_0^c \\
&\ \ \| \\
&V^* - S^* \quad (f(x) \neq 0 \Leftrightarrow f^*(\overline{x}) = \overline{f(x)} \neq 0 \text{ による})
\end{aligned}
$$

ゆえ (G, ρ^*, V^*) は $S^* = \{f^*(x) = 0\}$ を singular set とする P.V. である.

Prop 10 の (2) により $x \in V - S \Rightarrow f^*(\varphi_f(x)) = \frac{b_0}{f(x)} \neq 0$
$\Rightarrow \varphi_f(x) \in V^* - S^*$ i.e. $\overline{\varphi_f(V-S)} = \overline{V^* - S^*} = V^*$
ゆえ f = non-degenerate //

さて

D. Luna, Sur les orbites fermées des groupes algébriques réductifs, Invent. math 16 (1972), 1–5
に次の結果が書かれている.

> Proposition 12 (D. Luna) reductive 代数群 G が smooth affine variety X に作用しているとする。$X \ni \forall x$ における G の isotropy 部分群を G_x とするとき、各接空間 $T_x X$ 上に G_x-不変 non-degenerate symmetric form が存在する, と仮定する。このとき X 内には G-closed orbits の union からなる Zariski-dense open subset U が存在する. とくに open dense orbit が存在すれば それは X 自身である.

これを使うと,

> Proposition 13 (G, ρ, V) = a reductive regular P.V. over $\mathbb{C}$, f = non-degenerate relative invariant 多項式
> $\Rightarrow S = \{x \in V ;\ \mathrm{Hess}_f(x) = 0\}$: 超曲面
> 但し $\mathrm{Hess}_f(x) = \det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right)$

∵) Prop 4 の (2) と全く同様の計算で

$$\chi(g)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right) = {}^t\rho(g)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\rho(g)x)\right)\rho(g)$$

とくに $g \in G_x \Rightarrow \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right) = {}^t\rho(g)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right)\rho(g)$

そこで $B_x(u, v) = {}^t u\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right)v$ とおくと

$$B_x(\rho(g)u, \rho(g)v) = B_x(u, v) \text{ for } {}^\forall g \in G_x$$

$$0 \neq \det(d\varphi_f)_x = \frac{1}{1-\deg f} \cdot \frac{\mathrm{Hess}_f(x)}{f(x)^n} \quad (= \mathrm{Hess} \log f(x))$$

(例えば M.Sato-T.Kimura, Nagoya Math. J. 65 (1977) の 63 頁参照) ゆえ $B_x(u, v)$ は non-degenerate な G_x-不変 symmetric form on $T_x X$ for $x \in X = \{x \in V ; \mathrm{Hess}_f(x) \neq 0\}$ (これは affine variety).

$\mathrm{Hess}_f(x)$ も相対不変式ゆえ $X \supset V - S$ = open orbit.

よって Luna の定理 (Prop 12) により $X = V - S$.

即ち $S = \{x \in V ; \mathrm{Hess}_f(x) = 0\}$.

(但し $\deg f \geq 2$ としておく. $\deg f = 1$ ならば $(G, \rho, V) \simeq (GL_1, V(1))$ でこのときは $S = \{f = 0\}$ となる.)

//

注）$\mathbb{C}$上では (G, ρ, V) = reductive P.V. について

(1) (G, ρ, V) regular

$\Leftrightarrow$ (2) S = 超曲面

$\Leftrightarrow$ (3) $V - S = G/G_x$ affine variety

$\Longleftrightarrow$ (4) G_x $(x \in V - S)$ reductive.

松島の定理

実際に与えられた (G, ρ, V) = reductive P.V. over $\mathbb{C}$ が regular かどうかを判定するのは，generic isotropy 部分群が reductive か否かをみればよい。

例） $G = GL_n(\mathbb{C})$, $V = Sym_n = \{x \in M_n(\mathbb{C}) ; {}^t x = x\}$,
$\rho(g)x = g x {}^t g$, $V \ni x_0 = I_n$

$\Rightarrow G_{x_0} = O_n$; reductive $\therefore (G, \rho, V)$ = regular.

$f(x) = \det x \longleftrightarrow (\det g)^2$ であり

$X(G) = \langle \det g \rangle \supset X_1(G) = \{(\det g)^m ; (\det g)^m|_{O_n} = 1\}$
$= \langle (\det g)^2 \rangle$. よって相対不変式は $c f(x)^m$
$(c \in \mathbb{C}^\times, m \in \mathbb{Z})$ の形. $S = \{x \in V ; f(x) = 0\}$
となる。

以上で代数閉体上の一般論を一応終わる。

さて $\boxed{\text{distribution（超関数）の復習}}$ をしよう。

$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \cdots\}$，$p = (p_1, \cdots, p_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ に対し

$|p| \overset{\text{def}}{=} p_1 + \cdots + p_n$ とおく。更に

$x^p \overset{\text{def}}{=} x_1^{p_1} \cdots x_n^{p_n}$，$D^p \overset{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{p_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{p_n}$ とおく。

$C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \overset{\text{def}}{=} \{\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, compact support をもつ C^∞-関数$\}$

に属す φ_m $(m = 1, 2, \cdots)$ について，

$\varphi_m \Rightarrow 0$ とは ある compact set $E (\subset \mathbb{R}^n)$ で

(1) $\operatorname{supp} \varphi_m \subset E$ $(m = 1, 2, \cdots)$

(2) $\forall p$ に対し 一様に $D^p \varphi_m \to 0$

さて $\mathbb{C}$-linear map $T : C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ が

$\forall \varphi_m \Rightarrow 0$ に対し $T(\varphi_m) \to 0$ を満たすとき，

T を（$\mathbb{R}^n$ 上の）<u>distribution</u> という。

C^∞-関数 $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ が <u>急減少関数</u>（rapidly decreasing function）とは $\forall p, q$ に対し

$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^p D^q \varphi(x)| < +\infty$，となること。

その全体を $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ と記す。$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \supset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ であるが，distribution T が <u>tempered</u> であるとは $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ まで拡張できること。即ち tempered distribution とは $\mathbb{C}$-linear map $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$

s.t. $T(\varphi_m) \to 0$ for $\forall \varphi_m \Rightarrow 0$.

例） $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$（例えば 多項式 など）

dx = Lebesgue measure，に対して

$$T_f : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\begin{array}{ccc} \Phi & \longmapsto & \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x) f(x)\, dx \end{array}$$

は tempered distribution を与える．（$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ を超関数とみる，ということは T_f を考える，ということ）

部分積分により $\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} f\right) \Phi\, dx = -\int_{\mathbb{R}^n} f \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Phi\right) dx$

$\Rightarrow T_{\frac{\partial}{\partial x_i} f}(\Phi) = -T_f\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Phi\right)$，一般に

$T_{D^p f}(\Phi) = (-1)^{|p|} T_f(D^p \Phi)$ ここで右辺は

f が微分できない場合でも意味をもつから

T の微分 $D^p T$ を $D^p T(\Phi) \overset{\mathrm{def}}{=} (-1)^{|p|} T(D^p \Phi)$

で定める。（即ち $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ が微分できなくても超関数としては微分できる，という事がありうる）

$\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対し，その <u>Fourier 変換</u> を

$$\hat{\Phi}(y) \overset{\mathrm{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x) e^{2\pi i \langle x, y \rangle} dx \quad \text{で定める．}$$

さて $M, N \geq 0$，$M, N \in \mathbb{Z}$，$\forall \Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$\nu(M, N)(\Phi) \overset{\mathrm{def}}{=} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2)^M \cdot \sum_{\substack{p \\ |p| \leq N}} |D^p \Phi(x)|$$

とおく。但し $\|x\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$.

$\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ について明らかに

$\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \nu(M,M)(\Phi) < +\infty$ for $^\forall M \geq 0$

> **Proposition 14** $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ とする. $^\forall M$ に対し $^\exists M_0$ s.t. $\nu(M,M)(\hat{\Phi}) \leq \mathrm{const.}\,\nu(M_0,M_0)(\Phi)$
> とくに $\hat{\Phi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$\because)$ $x^p D_x^q \hat{\Phi}(x) = x^p \int \Phi(y) D_x^q e^{2\pi i\langle x,y\rangle} dy$

$= (2\pi i)^{|q|} x^p \int y^q \Phi(y) e^{2\pi i\langle x,y\rangle} dy$

$\left(D_y^p e^{2\pi i\langle x,y\rangle} = (2\pi i)^{|p|} x^p e^{2\pi i\langle x,y\rangle} \text{ ゆえ } \right)$

$= (2\pi i)^{|q|-|p|} \int (y^q \Phi(y)) \cdot D_y^p e^{2\pi i\langle x,y\rangle} dy$

$\underset{\text{部分積分}}{=} (-1)^{|p|} \cdot (2\pi i)^{|q|-|p|} \cdot \int D_y^p (y^q \Phi(y)) \cdot e^{2\pi i\langle x,y\rangle} dy$

ここで $D_y^p (y^q \Phi(y)) = \sum_{p',q'} C_{p',q'} y^{q'} D_y^{p'} \Phi(y)$

と表わす。C_1 を $|y^{q'}| \leq C_1 (1+\|y\|^2)^{\frac{q'}{2}}$ for $^\forall y \in \mathbb{R}^n$

にとると $\left| \int y^{q'} (D_y^{p'} \Phi(y)) e^{2\pi i\langle x,y\rangle} dy \right|$

$\leq C_1 \left[\sup_{y\in\mathbb{R}^n} (1+\|y\|^2)^{\frac{q'}{2}+\frac{n+1}{2}} \cdot |D_y^{p'} \Phi(y)| \right] \cdot \int_{\mathbb{R}^n} (1+\|y\|^2)^{-\frac{n+1}{2}} dy$

ここで $C_2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1+\|y\|^2)^{-\frac{n+1}{2}} dy < +\infty$ ゆえ

$\leq C_1 C_2 \nu(\frac{q'}{2}+\frac{n+1}{2}, p')(\Phi) \leq C_1 C_2 \nu(M_0, M_0)(\Phi)$
for $\forall M_0 \geq \max(\frac{q'}{2}+\frac{n+1}{2}, p')$
結局 $\forall p, q$ に対し $\exists C$, $\exists M_0$ s.t.
$|x^p D_x^q \hat{\Phi}(x)| \leq C \cdot \nu(M_0, M_0)(\Phi)$ がいえた。
従って $\forall M$ に対し $\exists M_0$ s.t.
$\nu(M, M)(\hat{\Phi}) \leq \text{const.}\, \nu(M_0, M_0)(\Phi)$ //

Proposition 15 $\hat{\hat{\Phi}}(x) = \Phi(-x)$, 従って
$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$: Fourier変換.
$\Phi \longmapsto \hat{\Phi}$

∵) きちんと示すと長くなるので, ここでは感じをつかむため $\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i \langle x, y\rangle} dx = \delta(y)$ (これは Dirac の δ-関数 とよばれ $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\delta(y)\, dy = \varphi(0)$ をみたす) を認めて, 示すことにする.

$$\hat{\hat{\Phi}}(x) = \int \hat{\Phi}(y) e^{2\pi i\langle x, y\rangle} dy$$

$$= \int \left(\int \Phi(z) e^{2\pi i \langle z, y\rangle} dz\right) e^{2\pi i \langle x, y\rangle} dy$$

$$= \int \Phi(z) \Big(\underbrace{\int e^{2\pi i\langle z+x, y\rangle} dy}_{=\delta(z+x)}\Big) dz = \Phi(-x)$$

//

一般に，例えば $f(x)=$ 多項式 ならば その Fourier 変換
$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{2\pi i\langle x,y\rangle} dx$ は 収束しない。
しかし これを distribution とみると

$$\int\left(\int f(x)e^{2\pi i\langle x,y\rangle}dx\right)\Phi(y)\,dy$$

$$=\int f(x)\left(\int \Phi(y)e^{2\pi i\langle x,y\rangle}dy\right)dx$$

$$=\int f(x)\hat{\Phi}(x)\,dx = T_f(\hat{\Phi})$$ となり意味をもつ．そこで一般に <u>T の Fourier 変換 $\hat{T}$</u> を
$\hat{T}(\Phi) \overset{\mathrm{def}}{=} T(\hat{\Phi})$ と 定めることにする。

$\mathbb{R}^n \supset U =$ open 上で $\mathbb{R}^n$ 上の distribution T が vanish するとは，$T(\Phi)=0$ for all $\Phi \in C_0^\infty(U)$
そこで U_0 を そのような U の union とするとき
$\mathrm{supp}\,T \overset{\mathrm{def}}{=} \mathbb{R}^n - U_0$ によって <u>distribution T の support</u> を 定義する．

また $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対し fT を
$(fT)(\Phi) \overset{\mathrm{def}}{=} T(f\Phi)$ によって 定義する。
（但し $f\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ とする．例えば $f=$ 多項式 ならよろしい．）

Proposition 16 T = tempered distribution s.t.

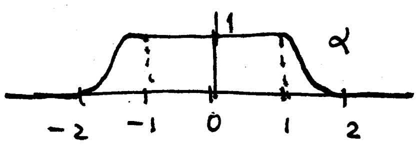
(1) $\exists f$ = 多項式 s.t. $\mathrm{supp}\, T \subset S = \{f = 0\}$

(2) $\exists M_0$, $\exists C > 0$ s.t.

$$|T(\Phi)| \leq C \cdot \nu(M_0, M_0)(\Phi) \text{ for } \forall \Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

$\Rightarrow$ $\forall L > M_0$ に対して $f^L T = 0$

∵) $\alpha \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ を $\alpha(t) = 0$ for $|t| \geq 2$,
$\alpha(t) = 1$ for $|t| \leq 1$ にとる。



$\forall \eta > 0$ を fix する。

$f(x)^L \Phi(x) - f(x)^L \alpha\left(\frac{f(x)}{\eta}\right) \Phi(x)$ は $|f(x)| \leq \eta$ で0, とくに S 上で0. $\mathrm{supp}\, T \subset S$ ゆえ T を作用させても0. よって

$$|f^L T(\Phi)| = |T(f^L \Phi)| = \left|T\left(f^L \cdot \alpha\left(\frac{f}{\eta}\right) \cdot \Phi\right)\right|$$

$$\leq C \cdot \nu(M_0, M_0)\left(f^L \cdot \alpha\left(\frac{f}{\eta}\right) \cdot \Phi\right)$$

$$= C \cdot \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2)^{M_0} \cdot \sum_{|p| \leq M_0} \left|D^p f^L \cdot \alpha\left(\frac{f}{\eta}\right) \cdot \Phi(x)\right|$$

(ここで $\alpha\left(\frac{f}{\eta}\right) \neq 0 \Rightarrow |f| \leq 2\eta$, であり $\alpha\left(\frac{f}{\eta}\right)$ の微分で出てくる $\frac{1}{\eta}$ は, そのとき f^L の微分の回数がへるので η は打ち消しあうので,)

$L > M_0$ のとき

$= \eta^{L - M_0} \cdot C_1(\Phi)$, 但し $C_1(\Phi)$ は η によらぬ, と表わせる.

η は任意であったから $\eta \to 0$ として $|f^L T(\Phi)| = 0$ for $^\forall \Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. 即ち $f^L T = 0$ //

注) T がふつうの関数 $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ s.t. supp $T \subset \{f=0\}$ なる 明らかに $fT = 0$ であるが、Prop 16 はこの事実の distribution への拡張である.

以上で distribution の復習を一応終えて再び概均質ベクトル空間にもどろう、今度は $\mathbb{R}$ 上で考える。

(G, ρ, V) = a reductive P.V. defined over $\mathbb{R}$ such that $S = \{f=0\}$ 既約超曲面,

を考える.

Prop 11 により (G, ρ, V) = regular で $f \leftrightarrow \chi$, $d = \deg f$, $n = \dim V$ とすると Prop 9 より $d | 2n$ かつ $\det \rho(g)^2 = \chi(g)^{\frac{2n}{d}}$ となる. とくに

$$\boxed{d(\rho(g)x) = |\det \rho(g)| dx = |\chi(g)|^{\frac{n}{d}} dx}$$

が成り立つ。

Proposition 17 (1) $^\exists \alpha \in \mathbb{C}^\times$ s.t. $\alpha f : V_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$
(即ち $f : V_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ と仮定してよい)
(2) $\chi : G_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^\times$

∵) $V \ni x$ について（$\overline{\ \ }$ は複素共役を表わすと）

$$G_x \ni g \Leftrightarrow \rho(g)x = x \Leftrightarrow \overline{\rho(g)x} = \bar{x}$$

$$\overline{\rho(g)x} \overset{\rho = \text{def. over } \mathbb{R}}{=} \rho(\bar{g})\bar{x}$$

$$\Leftrightarrow \bar{g} \in G_{\bar{x}} \Leftrightarrow g \in \overline{G_{\bar{x}}} \qquad \therefore G_x = \overline{G_{\bar{x}}}$$

$$\therefore S \ni x \Leftrightarrow \dim G_x = \dim \overline{G_{\bar{x}}} = \dim G_{\bar{x}} > \dim G - \dim V$$

$$\Leftrightarrow \bar{x} \in S$$

$$\therefore f(x) = 0 \Leftrightarrow f(\bar{x}) = 0 \Leftrightarrow \underset{\uparrow \atop x\text{の多項式}}{\overline{f(\bar{x})}} = 0$$

よって Hilbert 零点定理（$\mathbb{C}$ 上で $f=0$ なる $h=0$ が常に成立 $\Rightarrow h = cf^{\ell}$ for $\exists c \in \mathbb{C}^\times, \ell \in \mathbb{N}$）と次数を比べて $\overline{f(\bar{x})} = cf(x)$ for $\exists c \in \mathbb{C}^\times$

$$V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}} \ni x_0 \Rightarrow \overline{x_0} = x_0,\ f(x_0) \neq 0, \infty$$

$$\Rightarrow c = \frac{\overline{f(x_0)}}{f(x_0)} \qquad \text{今}\ \alpha = \frac{1}{f(x_0)}\ \text{とおくと}$$

$\overline{\alpha f(\bar{x})} = \alpha f(x)$。そして

$$x \in V_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \bar{x} = x \Rightarrow \overline{\alpha f(x)} = \alpha f(x) \Leftrightarrow \alpha f(x) \in \mathbb{R}^\times$$

(2) の証明：$g \in G_{\mathbb{R}}$, $x_0 \in V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}}$ とすると

$$\underbrace{\alpha f(\rho(g)x_0)}_{\in \mathbb{R}^\times} = \chi(g) \underbrace{\alpha f(x_0)}_{\in \mathbb{R}^\times} \Rightarrow \chi(g) \in \mathbb{R}^\times$$

//

さて $O(n,\mathbb{R})=\{X\in GL_n(\mathbb{R})\,;\,{}^tXX=I_n\}$

$S_+(n,\mathbb{R})=\{X\in GL_n(\mathbb{R})\,;\,{}^tX=X,\ X>0\ (\text{正定値})\}$

とおく。

G を reductive algebraic group defined over $\mathbb{R}$ とする。$V_{\mathbb{R}}$ の base $\{e_1,\cdots,e_n\}$ を適当にとると これにより $G_{\mathbb{R}}\hookrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ としたとき，

$G_{\mathbb{R}}\ni\forall g$ は $g=kp\ (k\in G_{\mathbb{R}}\cap O(n,\mathbb{R}),\ p\in G_{\mathbb{R}}\cap S^+(n,\mathbb{R}))$ と書けることが知られている。

とくに ${}^tg^{-1}={}^tk^{-1}\cdot{}^tp^{-1}=k\cdot p^{-1}\in G_{\mathbb{R}}$ ゆえ ${}^tG_{\mathbb{R}}=G_{\mathbb{R}}$. これは代数関係で $G=$defined over $\mathbb{R}$ ゆえ ${}^tG=G$ となる。

> **Proposition 18** $GL(V)\supset G=$reductive alg. gp def. over $\mathbb{R}$
> $\Rightarrow\ \exists\tau:V\to V^*$ linear map, $\exists\iota:G\to G$ involution
> s.t. $\tau(V_{\mathbb{R}})=V_{\mathbb{R}}^*$, $\tau(gx)=(g^\iota)^*\tau(x)$, $\chi(g^\iota)=\chi(g)^{-1}$

$\because)$ base を ${}^tG=G$ となるようにとり $g^\iota\overset{\text{def}}{=}{}^tg^{-1}$ とおく。これは G の involution になる。$V_{\mathbb{R}}$ の base $\{e_1,\cdots,e_n\}$ の dual base $\{f_1,\cdots,f_n\}$ により $V=V^*=\mathbb{C}^n$ とする。

$\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^n x_iy_i$ のとき $\langle gx,g^*y\rangle=\langle x,y\rangle$

即ち $g^*={}^tg^{-1}$ である. $\tau:V\to V^*$ を

$\tau\left(\sum_{i=1}^n x_ie_i\right)=\sum_{i=1}^n x_if_i$ で τ を定めると

$\tau(gx) = g\tau(x) = (g^\iota)^* \tau(x)$ であり

$\tau(V_{\mathbb{R}}) = V_{\mathbb{R}}^*$ は明らかである。

$G_{\mathbb{R}} \ni g = kp \Rightarrow \chi(g^\iota) = \chi({}^t g^{-1}) = \chi(kp^{-1})$

$= \chi(k)\chi(p)^{-1}$

$|\chi(G_{\mathbb{R}} \cap O(n, \mathbb{R}))|$ は $\mathbb{R}_+^\times$ の compact 部分群ゆえ

$= 1$ であるが 一方 Prop 17 (2) により

$\chi(G_{\mathbb{R}} \cap O(n, \mathbb{R})) \subset \mathbb{R}^\times$ $\therefore \chi(G_{\mathbb{R}} \cap O(n, \mathbb{R})) = \{\pm 1\}$

とくに $\chi(k) = \chi(k)^{-1}$ であるから,

$\chi(g^\iota) = \chi(g)^{-1}$ for $g \in G_{\mathbb{R}}$. これは代数関係で

G = defined over $\mathbb{R}$ ゆえ $\chi(g^\iota) = \chi(g)^{-1}$ for $\forall g \in G$ //

そこで $f^*(y) \overset{\text{def}}{=} f(\tau^{-1} y)$ $(y \in V^*)$

$S^* \overset{\text{def}}{=} \{y \in V^* ; f^*(y) = 0\}$ とおくと

$f^*(\tau(x)) = f(x)$ ゆえ $\tau(V - S) = V^* - S^*$ は

G-orbit, 従って,

(G, ρ^*, V^*) = a reductive P.V. defined over $\mathbb{R}$

s.t. $S^* = \{y \in V^* ; f^*(y) = 0\}$,

$f^*(\rho^*(g) y) = f(\tau^{-1} g^* y) = f(g^\iota \tau^{-1} y)$

$= \chi(g^\iota) f^*(y) = \chi(g)^{-1} f^*(y)$

$\Rightarrow f^* \leftrightarrow \chi^{-1}$ 更に $(x, y) \overset{\text{def}}{=} \langle x, \tau y \rangle$

$= \langle \sum_i x_i e_i, \tau(\sum_j y_j e_j) \rangle = \langle \sum_i x_i e_i, \sum_j y_j f_j \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$

とおくと $f^*(D_x)e^{(x,y)} = f(\tau^{-1}(\tau y))e^{(x,y)} = f(y)e^{(x,y)}$

が成り立つ。更に

$(gx, g^\iota y) = \langle gx, \tau(g^\iota y)\rangle = \langle gx, g^*\tau(y)\rangle = \langle x, \tau(y)\rangle$

$= (x, y)$ である. $d = \deg f = \deg f^*$ とすると

$f^*(D_x)f(x)^{s+1} = b(s)f(x)^s, \quad \deg b(s) = d$

$b(s) = b_0\prod_{i=1}^{d}(s+\alpha_i) \quad (b_0 \neq 0)$ であるが

$\alpha_i > 0, \alpha_i \in \mathbb{Q}$ が柏原正樹氏の定理として知られている.

$\Gamma(s)$ を Γ-関数とすると $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ であるから

$\gamma(s) \overset{\mathrm{def}}{=} \prod_{i=1}^{d}\Gamma(s+\alpha_i)$ とおくと $b(s) = b_0 \cdot \dfrac{\gamma(s+1)}{\gamma(s)}$

となる.

$G^+ \overset{\mathrm{def}}{=} G_{\mathbb{R}}$ の単位元の連結成分

$\Rightarrow V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}} = V_1 \cup \cdots \cup V_l$, 各 V_i は G^+-orbit,

と分解する。

注) k が type(F) の体であるとは

(1) $\forall$次数に対し, k は有限個の拡大しかもたない.

(2) 完全体,

J.P. Serre の Cohomologie Galoisienne (Springer Lecture Note) には

☆ k が type(F) $\Rightarrow V_k - S_k$ は有限個の G_k-orbits に分解,

が証明されている。特に $ch(k)=0$ の local field なら良い。$V-S=G/H$ とするとき

$G_k \backslash V_k - S_k = \ker(H^1(k,H) \to H^1(k,G))$ である。

$ch(k)=p>0$ の local field は完全体ではないから type (F) ではないが，筆者が J.P. Serre に手紙で問い合わせた所，この場合でも $H=$ connected reductive ならば $H^1(k,H)=$有限集合，だとのことであった。

この事から連結でない場合も有限になることがいえるので $ch(k)=p>0$ の local field k の場合も generic isotropy subgroup が reductive ならば，特に (G,ρ,V) が reductive regular P.V. ならば V_k-S_k が有限個の G_k-orbits に分解することがいえる。 //

さて $f: V_{\mathbb{R}}-S_{\mathbb{R}}=V_1\cup\cdots\cup V_\ell \to \mathbb{R}^\times$ 連続，で $V_i=$連結，ゆえその符号は V_i 上一定である。

そこで $\varepsilon_i = \operatorname{sgn}_{x\in V_i} f(x)$ $(i=1,\cdots,\ell)$ とおく。

$\Rightarrow$ $|f(x)| = f(x)\varepsilon_i$ on V_i，となるから

$$f^*(D_x)|f(x)|^{s+1} = b(s)\varepsilon_i|f(x)|^s = \varepsilon_i b_0 \frac{\gamma(s+1)}{\gamma(s)}\cdot|f(x)|^s$$

そこで $\Phi \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$, $s \in \mathbb{C}$ について

$$F_i(s, \Phi) \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{\gamma(s)} \int_{V_i} |f(x)|^s \cdot \Phi(x)\, dx$$ とおく

$\operatorname{Re} s > 0$ で $|f(x)|^s$ は多項式 order となり収束する.

$$\frac{|f(x)|^s}{\gamma(s)} = \varepsilon_i b_0^{-1} f^*(D_x) \frac{|f(x)|^{s+1}}{\gamma(s+1)}$$ であるから

$$F_i(s, \Phi) = \frac{\varepsilon_i b_0^{-1}}{\gamma(s+1)} \int_{V_i} (f^*(D_x) |f(x)|^{s+1}) \cdot \Phi(x)\, dx$$

$$\overset{\text{部分積分}}{=\!=} \frac{(-1)^d \varepsilon_i b_0^{-1}}{\gamma(s+1)} \cdot \int_{V_i} |f(x)|^{s+1} \cdot f^*(D_x)\Phi(x)\, dx$$

$$= (-1)^d \varepsilon_i b_0^{-1} F_i(s+1, f^*(D_x)\Phi(x))$$

$$= \cdots = (-1)^{dm} (\varepsilon_i b_0^{-1})^m F_i(s+m, f^*(D_x)^m \Phi(x))$$

右辺は $\operatorname{Re} s > -m$ で収束するから,

$F_i(s, \Phi)$ は s の entire function として全 s 平面に解析接続される。

$\deg f = d$ ゆえ $\exists C_1 > 0$ s.t. $|f(x)| \leq C_1 (1 + \|x\|^2)^{\frac{d}{2}}$ for $\forall x \in V_{\mathbb{R}}$ である. $\operatorname{Re} s > 0$ ならば

$$|f(x)|^{\operatorname{Re} s} \leq C_1^{\operatorname{Re} s} \cdot (1 + \|x\|^2)^{\frac{d}{2} \cdot \operatorname{Re} s}$$ となるから

$$|F_i(s,\Phi)| \leq \frac{1}{|\gamma(s)|}\int_{V_i} |f(x)|^{\mathrm{Re}\,s}\cdot|\Phi(x)|\cdot dx$$

$$\leq \frac{C_1^{\mathrm{Re}\,s}}{|\gamma(s)|}\int_{V_i}(1+\|x\|^2)^{\frac{d}{2}\mathrm{Re}\,s+\frac{n+1}{2}-\frac{n+1}{2}}\cdot|\Phi(x)|\,dx$$

$$\leq \frac{C_1^{\mathrm{Re}\,s}}{|\gamma(s)|}\cdot\underbrace{\left(\sup_{x\in V_{\mathbb{R}}}(1+\|x\|^2)^{\frac{d}{2}\mathrm{Re}\,s+\frac{n+1}{2}}\cdot|\Phi(x)|\right)}_{=\,\nu(\frac{d}{2}\mathrm{Re}\,s+\frac{n+1}{2},\,0)(\Phi)}\cdot\underbrace{\int_{V_i}(1+\|x\|^2)^{-\frac{n+1}{2}}dx}_{=\,C_2\,<\,+\infty}$$

即ち $|F_i(s,\Phi)| \leq \dfrac{C_2 C_1^{\mathrm{Re}\,s}}{|\gamma(s)|}\cdot\sup_{x\in V_{\mathbb{R}}}(1+\|x\|^2)^{\frac{d}{2}\mathrm{Re}\,s+\frac{n+1}{2}}\cdot|\Phi(x)|$

よって $\Phi_m \Rightarrow 0$ ならば $|F_i(s,\Phi_m)| \to 0$ ($\mathrm{Re}\,s>0$)

ゆえ $\Phi \mapsto F_i(s,\Phi)$ は tempered distribution.

$\mathrm{Re}\,s>-m$ のときも

$$|F_i(s,\Phi)| = |b_0|^{-m}\cdot|F_i(s+m,\ f^*(D_x)^m\Phi(x))|$$

$$\leq \frac{C_2\cdot C_1^{\mathrm{Re}(s+m)}}{|\gamma(s+m)|}\cdot\sup_{x\in V_{\mathbb{R}}}(1+\|x\|^2)^{\frac{d}{2}\mathrm{Re}(s+m)+\frac{n+1}{2}}\cdot|f^*(D_x)^m\Phi(x)|$$

ゆえ tempered distribution である。また

s が $0\geqq \mathrm{Re}\,s>-1$ の compact set を動くとき

$\exists M'>0$ s.t. $|F_i(s-\frac{n}{d},\hat{\Phi})| \leq \mathrm{const.}\,\nu(M',M')(\hat{\Phi})$

であるが これと Prop 14 をあわせて

(☆) $\exists M > 0$ s.t. $\left| F_i\left(s-\frac{n}{d}, \hat{\Phi}\right)\right| \leq \text{const.}\, \nu(M,M)(\Phi)$

となる。

$\Phi \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$, T = tempered distribution, $g \in G^+$

に対して

$\Phi^g(x) \overset{\text{def}}{=} \Phi(gx)$, $(gT)(\Phi) \overset{\text{def}}{=} T(\Phi^g)$

により G^+ を $\mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$, $\mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})'$ に作用させる。

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Proposition 19}\\ V_j = \text{a } G^+\text{-orbit with } G^+\text{-invariant measure } \dfrac{dx}{|f(x)|^{\frac{n}{d}}}\\ T: C_0^\infty(V_j) \to \mathbb{C} \text{ distribution s.t. } gT = T \text{ for } {}^\forall g \in G^+\\ \Rightarrow {}^\exists c \in \mathbb{C}^\times \text{ s.t. } T(\Phi) = c\displaystyle\int_{V_j} \Phi(x) \frac{dx}{|f(x)|^{\frac{n}{d}}}\end{array}}$$

cf. Harish-Chandra Trans. A.M.S. vol 83, Lemma 36

を参照せよ.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Corollary 20} \quad T: C_0^\infty(V_j) \to \mathbb{C} \text{ distribution}\\ \quad \text{s.t.} \quad gT = |\chi(g)|^{s-\frac{n}{d}}\, T \quad (0 \geqq \operatorname{Re} s > -1)\\ \Rightarrow {}^\exists c \in \mathbb{C}^\times \text{ s.t. } T(\Phi) = c\displaystyle\int_{V_j} |f(x)|^{-s}\, \Phi(x)\, dx\end{array}}$$

∵) $\tilde{T} \overset{\text{def}}{=} |f(x)|^{s-\frac{n}{d}} \cdot T$ とおくと

$(g\tilde{T})(\Phi) = \tilde{T}(\Phi^g) = T\left(|f(x)|^{s-\frac{n}{d}} \cdot \Phi(gx)\right)$

$$= |\chi(g)|^{\frac{n}{d}-s} \cdot T\left(\left(|f(x)|^{s-\frac{n}{d}} \cdot \Phi(x)\right)^g \right)$$

$$= T\left(|f(x)|^{s-\frac{n}{d}} \Phi(x) \right) = \widehat{T}(\Phi)$$

$$\therefore \ \widehat{T}(\Phi') = c \int_{V_j} \Phi'(x) \frac{dx}{|f(x)|^{\frac{n}{d}}}$$

$$\widehat{T}(\Phi') = T\Big(\underbrace{|f(x)|^{s-\frac{n}{d}} \cdot \Phi'(x)}_{= \Phi} \Big)$$

$$c \int_{V_j} \Phi'(x) \frac{dx}{|f(x)|^{\frac{n}{d}}} = c \int_{V_j} |f(x)|^{-s} \cdot \Phi(x)\, dx \qquad //$$

$$\boxed{\textit{Proposition 21} \quad T(\Phi) \overset{\text{def}}{=} F_i\left(s-\tfrac{n}{d}, \widehat{\Phi}\right) \text{ とおくと } \quad gT = |\chi(g)|^{s-\frac{n}{d}}\, T}$$

$$\because) \quad \widehat{\Phi^g}(y) = \int \Phi(gx)\, e^{2\pi i (x,y)}\, dx$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{ここで } gx = x' \Rightarrow dx = |\chi(g)|^{-\frac{n}{d}} \cdot dx' \\ (x, y) = (g^{-1}x', y) = (x', g^{\iota} y) \text{ ゆえ} \end{array} \right)$$

$$= \int \Phi(x')\, e^{2\pi i (x', g^{\iota} y)} \cdot |\chi(g)|^{-\frac{n}{d}} dx'$$

$$= |\chi(g)|^{-\frac{n}{d}} \cdot \left(\widehat{\Phi}\right)^{g^{\iota}}, \quad \text{従って}$$

$$(gT)(\Phi) = T(\Phi^g) = F_i\left(s-\tfrac{n}{d}, \widehat{\Phi^g}\right)$$

$$= \frac{|\chi(g)|^{-\frac{n}{d}}}{\gamma(s-\frac{n}{d})} \cdot \int_{V_i} |f(x)|^{s-\frac{n}{d}} \cdot \widehat{\Phi}(g^{\iota}x)\, dx$$

(ここで $g^{\iota}x = x'$ とおくと $dx = |\chi(g)|^{\frac{n}{d}} dx'$,

$|f(x)|^{s-\frac{n}{d}} = |\chi(g)|^{s-\frac{n}{d}} |f(x')|^{s-\frac{n}{d}}$ ゆえ)

$$= |\chi(g)|^{s-\frac{n}{d}} F_i(s-\tfrac{n}{d}, \hat{\Phi}) = |\chi(g)|^{s-\frac{n}{d}} \cdot T(\Phi) \quad //$$

Corollary 20 と Proposition 21 をあわせて

$\forall \Phi \in C_0^\infty(V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}})$ に対して $\exists c_{ij}(s)$ s.t.

$$F_i(s-\tfrac{n}{d}, \hat{\Phi}) = \sum_{j=1}^{l} c_{ij}(s) \int_{V_j} |f(x)|^{-s} \Phi(x)\, dx$$

となる。

> **Proposition 22** s が $0 \geqq \operatorname{Re} s > -1$ の compact set を動くとき，$\forall \Phi \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$ に対して
>
> $$T_s(\Phi) \overset{\text{def}}{=} F_i(s-\tfrac{n}{d}, \hat{\Phi}) - \sum_{j=1}^{l} c_{ij}(s) \int_{V_j} |f(x)|^{-s} \Phi(x)\, dx$$
>
> とおくと
>
> (1) $\operatorname{supp} T_s \subset S = \{f = 0\}$
>
> (2) $\exists M_0, \exists C > 0$ s.t.
>
> $$|T_s(\Phi)| \leqq C \cdot \nu(M_0, M_0)(\Phi) \quad \text{for } \forall \Phi \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$$

∵) (1) は今示したばかりである。

$|f(x)| \leqq C_1 (1+\|x\|^2)^{\frac{d}{2}}$ ($\forall x \in V_{\mathbb{R}}$) なる C_1 をとると

$(-\operatorname{Re} s \geqq 0$ ゆえ$)$ $\left| \int_{V_j} |f(x)|^{-s} \Phi(x)\, dx \right| \leqq \int_{V_j} |f(x)|^{-\operatorname{Re} s} \cdot |\Phi(x)|\, dx$

$$\leqq C_1^{-\operatorname{Re} s} \cdot \int_{V_j} (1+\|x\|^2)^{-\frac{d}{2}\cdot \operatorname{Re} s + \frac{n+1}{2} - \frac{n+1}{2}} \cdot |\Phi(x)| \cdot dx$$

$$\leq C_1^{-\mathrm{Re}\,s} \cdot \sup_{x \in V_{\mathbb{R}}} (1+\|x\|^2)^{-\frac{d}{2}\cdot \mathrm{Re}\,s + \frac{n+1}{2}} \cdot |\Phi(x)| \cdot \underbrace{\int_{V_j} (1+\|x\|^2)^{-\frac{n+1}{2}} dx}_{\substack{\| \\ C_2 < +\infty}}$$

$$= C_2 \cdot C_1^{-\mathrm{Re}\,s} \cdot \nu\left(-\tfrac{d}{2}\mathrm{Re}\,s + \tfrac{n+1}{2}, 0\right)(\Phi)$$

$$\leq {}^{\exists} C' \cdot \nu(M, M)(\Phi) \quad \left({}^{\forall} M > -\tfrac{d}{2}\mathrm{Re}\,s + \tfrac{n+1}{2}\right)$$

これと 36頁の (✱) をあわせて (2) を得る. //

従って Prop 16 により $f^L T_s = 0$ for $^{\forall} L > M_0$ となる。 次に $f^L T_s = (-2\pi i)^{-dL} \cdot (\varepsilon_i b_0)^L \cdot T_{s-L}$ を示す. ここで s は $0 \geq \mathrm{Re}\,s > -1$ の compact set を動くが, T_s は s に analytic に依存しているから $T_s = 0$ for $^{\forall} s \in \mathbb{C}$ を得る. これが $\mathbb{R}$ 上の基本定理とよばれるものである。

Lemma 23 $\quad C_{ij}(s)$ は entire function

∵) $^{\forall}\Phi \in C_0^\infty(V_j)$ に $F_i(s-\frac{n}{d}, \hat{\Phi})$ と

$$\int_{V_j} |f(x)|^{-s} \Phi(x)\, dx = \int_{\mathrm{supp}\,\Phi \subset V_j} |f(x)|^{-s} \cdot \Phi(x)\, dx$$ は

entire function で $\int_{V_j} |f(x)|^{-s} \Phi(x)\, dx \neq 0$ なる Φ が

あるから $C_{ij}(s) = \dfrac{F_i(s-\frac{n}{d}, \hat{\Phi})}{\int_{V_j} |f(x)|^{-s} \Phi(x)\, dx} < +\infty$ //

$$\boxed{\textit{Lemma 24}\quad \widehat{f\Phi}(x) = (2\pi i)^{-d}\cdot f^*(D_x)\hat{\Phi}(x)}$$

∵) $\widehat{f\Phi}\ (x) = \int f(y)\Phi(y)e^{2\pi i(x,y)}dy$

$\left(f^*(D_x)e^{2\pi i(x,y)} = (2\pi i)^d f(y)e^{2\pi i(x,y)}\right.$ ゆえ $\left.\right)$

$$= (2\pi i)^{-d}\cdot\int \Phi(y)\cdot f^*(D_x)e^{2\pi i(x,y)}dy$$

$$= (2\pi i)^{-d} f^*(D_x)\hat{\Phi}(x) \qquad //$$

$$\boxed{\textit{Lemma 25}\quad F_i(s,\widehat{f\Phi}) = \varepsilon_i b_0(-2\pi i)^{-d} F_i(s-1,\hat{\Phi})}$$

∵) *Lemma 24*より $F_i(s,\widehat{f\Phi}) = (2\pi i)^{-d} F_i(s, f^*(D_x)\hat{\Phi})$

$$= (2\pi i)^{-d}\int_{V_i} \frac{|f(x)|^s}{\gamma(s)}\cdot f^*(D_x)\hat{\Phi}(x)\,dx$$

$$\underset{\text{部分積分}}{=} (-2\pi i)^{-d}\cdot\int_{V_i}\left(f^*(D_x)\frac{|f(x)|^s}{\gamma(s)}\right)\hat{\Phi}(x)\,dx$$

$$= \varepsilon_i b_0(-2\pi i)^{-d}\int_{V_i}\frac{|f(x)|^{s-1}}{\gamma(s-1)}\cdot\hat{\Phi}(x)\,dx$$

$$= \varepsilon_i b_0(-2\pi i)^{-d}\cdot F_i(s-1,\hat{\Phi}) \qquad //$$

$$\boxed{\textit{Proposition 26}\quad C_{ij}(s) = \varepsilon_i\varepsilon_j b_0(-2\pi i)^{-d}\cdot C_{ij}(s-1)}$$

∵)

$\Phi \in C_0^\infty(V_j)$ とすると

$$F_i\left(s-\frac{n}{d}, \widehat{f\Phi}\right) = c_{ij}(s)\int_{V_j}|f(x)|^{-s}\cdot f(x)\Phi(x)\,dx$$

$$\Big\| \ \text{Lem 25} \qquad\qquad \| $$

$$c_{ij}(s)\cdot\varepsilon_j\cdot\int_{V_j}|f(x)|^{1-s}\cdot\Phi(x)\cdot dx$$

$$\varepsilon_i b_0(-2\pi i)^{-d}\cdot F_i(s-1,\hat{\Phi})$$

$$\|$$

$$\varepsilon_i b_0(-2\pi i)^{-d}\cdot c_{ij}(s-1)\int_{V_j}|f(x)|^{1-s}\cdot\Phi(x)\,dx$$

両辺の係数を比べて，$c_{ij}(s) = \varepsilon_i\varepsilon_j b_0(-2\pi i)^{-d}\cdot c_{ij}(s-1)$ //

$$\boxed{\textit{Proposition 27} \quad f^L T_s = (-2\pi i)^{-dL}\cdot(\varepsilon_i b_0)^L\cdot T_{s-L}}$$

$\because)$

$$(fT_s)(\Phi) = F_i\left(s-\frac{n}{d}, \widehat{f\Phi}\right) - \sum_j c_{ij}(s)\int_{V_j}|f(x)|^{-s}\cdot f(x)\Phi(x)\,dx$$

$$= \varepsilon_i b_0(-2\pi i)^{-d}F_i\left(s-1-\frac{n}{d}, \hat{\Phi}\right)$$

$$-\sum_j\left(\varepsilon_i\varepsilon_j b_0(-2\pi i)^{-d}c_{ij}(s-1)\right)\cdot\varepsilon_j\int_{V_j}|f(x)|^{1-s}\cdot\Phi(x)\,dx$$

$$= (-2\pi i)^{-d}\cdot\varepsilon_i b_0\cdot T_{s-1}(\Phi)$$

$$\Rightarrow f^L T_s = (-2\pi i)^{-dL}\cdot(\varepsilon_i b_0)^L\cdot T_{s-L} \qquad //$$

Theorem 28（$\mathbb{R}$上の基本定理）

(G,ρ,V) = reductive P.V. defined over $\mathbb{R}$ s.t.
$S=\{f=0\}$ 既約超曲面，とし $S^*=\{f^*=0\}$
を その dual P.V. (G,ρ^*,V^*) の特異集合とする。
但し $f: V_{\mathbb{R}}\to\mathbb{R}$ にとる。$V_{\mathbb{R}}-S_{\mathbb{R}}=V_1\cup\cdots\cup V_\ell$
（各 V_i は連結成分），$\varepsilon_i=\underset{x\in V_i}{\mathrm{sgn}}\, f(x)$，$d=\deg f$，$n=\dim V$．

$$f^*(D_x)f(x)^{s+1}=b(s)f(x)^s,\quad b(s)=b_0\prod_{i=1}^{d}(s+\alpha_i)\ (d=\deg f)$$

$$\gamma(s)=\prod_{i=1}^{d}\Gamma(s+\alpha_i),\quad F_i(s,\Phi)=\frac{1}{\gamma(s)}\int_{V_i}|f(x)|^s\cdot\Phi(x)\,dx$$

とおくと $F_i(s,\Phi)$ は全 $\mathbb{C}$-平面に entire function として
解析接続され

$$F_i\left(s-\frac{n}{d},\widehat{\Phi}\right)=\sum_{j=1}^{\ell}c_{ij}(s)\int_{V_j}|f(x)|^{-s}\Phi(x)\,dx$$

が $^\forall\Phi\in\mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$ に対して成立する．ここで
$c_{ij}(s)$ は s の entire function．

∵）Prop 27 と 39頁なかほどの議論より　//

注）これは もっと一般に S が既約と仮定しない
超曲面の場合も成立する．更に S が超曲面で
ない場合も 行者明彦氏により $\mathbb{R}$上の基本定理が

得られているが，形はもっと複雑になる。

最後に b-関数の対称性を証明しておこう。

Lemma 29 $\widehat{f^*(D_x)\Phi}(x) = (-2\pi i)^d f(x)\hat{\Phi}(x)$

∵) $\displaystyle \widehat{f^*(D_x)\Phi}(x) = \int_{V_{\mathbb{R}}} \big(f^*(D_y)\Phi(y)\big) e^{2\pi i(x,y)}\,dy$

$$\underset{\text{部分積分}}{=} (-1)^d \int_{V_{\mathbb{R}}} \Phi(y)\, f^*(D_y) e^{2\pi i(x,y)}\,dy$$

$$= (-1)^d \cdot (2\pi i)^d f(x) \int_{V_{\mathbb{R}}} \Phi(y) e^{2\pi i(x,y)}\,dy = (-2\pi i)^d f(x)\hat{\Phi}(x) \quad //$$

Proposition 30（b-関数の対称性）
(G, ρ, V) = reductive P.V. s.t. $S = \{f=0\}$ 既約超曲面．$n = \dim V$, $d = \deg f$ とし $S^* = \{f^*=0\}$ を dual P.V. (G, ρ^*, V^*) の singular set，
$$f^*(D_x) f(x)^{s+1} = b(s) f(x)^s$$
$$\Rightarrow b(s) = (-1)^d \cdot b\left(-s - \frac{n}{d} - 1\right)$$

∵)

$\Phi \in C_0^\infty(V_j)$ に対して

$$F_i\left(s-\tfrac{n}{d}, \widehat{f^*(D_x)\Phi}\right) = c_{ij}(s)\int_{V_j} |f(x)|^{-s}\cdot f^*(D_x)\Phi(x)\,dx$$

|| Lem 29 　　　　|| 部分積分

$$(-2\pi i)^d F_i\left(s-\tfrac{n}{d}, f\hat{\Phi}\right) \qquad (-1)^d c_{ij}(s)\int_{V_j}\left(f^*(D_x)|f|^{-s}\right)\Phi\,dx$$

||　　　　||

$$\frac{(-2\pi i)^d}{\gamma(s-\frac{n}{d})}\cdot\int_{V_i}|f(x)|^{s-\frac{n}{d}}\cdot f(x)\hat{\Phi}(x)\,dx \qquad \underbrace{(-1)^d c_{ij}(s)\,\varepsilon_j\, b(-s-1)}\int_{V_j}|f|^{-s-1}\Phi\,dx$$

||

$$\frac{\gamma(s+1-\frac{n}{d})}{\gamma(s-\frac{n}{d})}\cdot(-2\pi i)^d\cdot\varepsilon_i\cdot\frac{1}{\gamma(s+1-\frac{n}{d})}\int_{V_i}|f(x)|^{s+1-\frac{n}{d}}\cdot\hat{\Phi}(x)\,dx$$

||

$$\varepsilon_i\frac{b(s-\frac{n}{d})}{b_0}\cdot(-2\pi i)^d\cdot F_i\left(s+1-\tfrac{n}{d}, \hat{\Phi}\right)$$

|| 基本定理

$$\varepsilon_i\frac{b(s-\frac{n}{d})}{b_0}\cdot(-2\pi i)^d\cdot\underbrace{c_{ij}(s+1)}_{\substack{\text{Prop 26}\ \|\\ \left(\varepsilon_i\varepsilon_j b_0(-2\pi i)^{-d}c_{ij}(s)\right)}}\cdot\int_{V_j}|f(x)|^{-s-1}\cdot\Phi(x)\,dx$$

$$= \underbrace{b(s-\tfrac{n}{d})\,\varepsilon_j\, c_{ij}(s)}\int_{V_j}|f(x)|^{-s-1}\cdot\Phi(x)\,dx.$$ 係数を比べて

$$b(s-\tfrac{n}{d}) = (-1)^d b(-s-1) \quad \therefore\ b(s) = (-1)^d\cdot b(-s-\tfrac{n}{d}-1) \qquad /\!/$$

注1. $\{ f_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \}$ は イデアル

$\{ f(x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{nn}) \in K[x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{nn}]$ s.t.

$f \equiv 0$ on $G \}$ を生成するものと仮定する.

注2. 概均質ベクトル空間 (G, ρ, V) が reductive であるとは. 作用する群 G が reductive であること.