数理解析研究所講究録
924巻 1995年 116-126

概均質ベクトル空間のゼータ関数の計算について

京都大学人間・環境学研究科
齋藤裕

この小論では、前半において代数群の整数論、特に近似定理、玉河数等について復習し、後半で、概均質ベクトル空間のゼータ関数の計算を局所的な計算に帰着する方法について述べる。

§1. Arithmetic of algebraic groups

1.1. Adele

F で代数体を表し、O でその整数環を表す。Σ を F の素点の全体の集合とし、Σ_∞、Σ_f でそれぞれ無限素点、有限素点の部分集合を表す。$v \in \Sigma$ に対し、F_v で F の v における completion を表し、$v \in \Sigma_f$ のときには、O_v で F_v の v 進整数環を表す。Σ の部分集合 S で、Σ_∞ を含むものに対し

$$F(S) = \prod_{v \notin S} O_v \times \prod_{v \in S} F_v$$

とおき、F の adele 環を

$$F_A = \bigcup_S F(S)$$

と定義する。$F(S)$ に積位相を考え、F_A の位相を $F(S)$ が開集合になるように決める。F を F_A に対角的に埋め込めば、この位相で F は F_A の離散集合となる。また Σ の有限集合 S に対し F_S, $F_{A,S}$ を

$$F_S = \prod_{v \in S} F_v^\times, \quad F_A = F_S \times F_{A,S}$$

で定義すると次の定理が成り立つ。

Theorem 1.1.1.(Weak approximation theorem)
F は F_S の部分集合として dense である。

Theorem 1.1.2.(Strong approximation theorem)
$S \neq \emptyset$ のとき、F は $F_{A,S}$ のなかで dense である。

特に $S = \Sigma_\infty$ とし

$$O_f = \prod_{v \in \Sigma_f} O_v$$

とすると、Th.1.1.2 より

$$F_A = F + F_{\Sigma_\infty} \times O_f$$

となり、$O_f \cap F = O$ で、O が F_{Σ_∞} の lattice であることから次がわかる。

Corollary 1.1.3. F_A/F は compact。

Σ の部分集合 S で、Σ_∞ を含むものに対し

$$F_A^\times = \bigcup_S F(S)^\times, \qquad F(S)^\times = \prod_{v \in S} F_v^\times \times \prod_{v \notin S} O_v^\times$$

で idele group を定義し、位相も上と同様に定義する。この位相は F_A からの誘導位相とは異なる。この位相に関して $F^\times$ は $F_A^\times$ の discrete な部分群である。$x_v \in F_v^\times$ に対し、norm を

$$|x_v|_v = \begin{cases} |x_v| & \text{if } v \text{ real place,} \\ |x_v \bar{x}_v| & \text{if } v \text{ complex place,} \\ q_v^{-m} & \text{if } v \text{ finite, } \mathrm{ord}_v(x_v) = m, \end{cases}$$

で定義する。q は F_v の剰余体の個数である。$x = (x_v) \in F_A^\times$ に対し

$$|x|_A = \prod_v |x_v|_v$$

と定義すると

$$|x|_A = 1, \qquad x \in F^\times$$

で、

$$F_A^1 = \{\, x \in F_A^\times \mid |x|_A = 1 \,\}$$

とおくと次が成り立つ。

Proposition 1.1.4. $F^\times$ は F_A^1 で discrete で、$F_A^1/F^\times$ は compact。

この場合 weak aproximation theorem ($F^\times$ は $F_S^\times$ で稠密) は成り立つが、strong approximation theorem は一般には成り立たない。

$$\mathcal{U} = F_\infty^\times \times \prod_{v \in \Sigma_f} O_v^\times$$

とおくと

$$F_A^\times / F^\times \mathcal{U}$$

がイデアル類群と同型になり、この剰余類の個数が F の類数となる。以下では、これらの性質が、どの程度一般の代数群について成り立つかを見る。

1.2. Adelization of affine varities

X を F 上定義された m 次元 affine space $\mathbf{A}^m$ の中の affine variety とする。Σ_∞ を含む Σ の有限集合 S に対し X の adelization X_A を

$$X_A = \bigcup X(S), \quad X(S) = \prod_{v \in S} X(F_v) \times \prod_{v \notin S} X(O_v)$$

と定義する。一般の代数多様体にたいしても affine covering をとることにより adelization が定義できる。X_A は $X(F_A)$ とも書くことにする。また F 上の代数多様体 X, Y とその間の morphism $f: X \to Y$ から連続写像 $f_A: X_A \to Y_A$ が定義でき、f が同型であれば f_A も同型になる。これについて次が成り立つ。

Proposition1.2.1. 全ての $y \in Y(F)$ に対し F 上定義された $f: X \to Y$ の y で定義された local section が存在すれば、f_A は surjective。

Proposition 1.2.2. G, H が F 上定義された connected algebraic group と connected な部分群であるとき、自然な写像

$$f_A: G_A \longrightarrow (G/H)_A$$

は開写像である。

1.3. Approximation theorems

F 上の connected な代数群 G と Σ の部分集合 S に対し、G_S、$G_{A,S}$ を 1.1 における と同様に

$$G_S = \prod_{v \in S} G(F_v), \quad G_A = G_{A,S} \times G_S$$

で定める。これらに対し次の定義をする。

Definition 1.3.1.

(1) $G(F)$ が G_S において稠密であるとき、G が S に関して weak approximation property を満たすという。

(2) $G(F)$ が $G_{A,S}$ において稠密であるとき、G が S に関して strong approximation property を満たすという。

これに関して次の定理が成り立つ。

Theorem 1.3.2. G が semi-simple で、simply connected または adjoint ならば G はすべての S に関して weak approximation property を持つ。

Theorem 1.3.3. G が connected reductive group であるとき、strong approximation property を持つことと次の (1) (2) が成り立つことと同値である。

(1) G semi-simple, simply connected.

(2) G の simple component G^i で G^i_S が compact になるものが存在しない。

1.4. Class numbers

代数群 G の GL_n への埋め込みが定められているとき

$$G(O_v) = G(F_v) \cap GL_n(O_v)$$

とおけば、$G(O_v)$ は $G(F_v)$ の open compact 部分群を与える。

$$\mathcal{U} = \prod_{v \in \Sigma_\infty} G(F_v) \times \prod_{v \in \Sigma_f} G(O_v)$$

とおくと

Theorem 1.4.1. G_A の $G(F)$, $\mathcal{U}$ による double coset の個数は有限である。

この個数を類数という。これは埋め込みに依存する。G が strong approximation property を持てば類数は 1 である。

1.5. $G_A/G(F)$

connected な代数群 G に対し、$X(G)$ でその指標群を表す。このとき次が成り立つ。

Theorem 1.5.1. G を F 上定義された connected な代数群とする。
(1) $G_A/G(F)$ compact $\Longleftrightarrow$ the reductive part of G is anisotropic.
(2) $G_A/G(F)$ has finite invariant volume $\Longleftrightarrow X(G)_F = \{1\}$.

G_A の部分群 G_A^1 を

$$G_A^1 = \{\ x \in G_A \mid \chi(x) = 1\ \forall \chi \in X(G)_F\ \}$$

で定義する。$G(F)$ は G_A^1 の部分群である。このとき次が成り立つ。

Theorem 1.5.2. G_A^1 は unimodular で有限の volume を持ち、かつ

$$G_A^1/G(F) \text{ compact} \Longleftrightarrow \text{the semi-simple part of } G \text{ is anisotropic.}$$

1.6. Tamagawa numbers

G_A^1 上に Tamagawa measure と呼ばれる不変測度が定義でき、それによる $G_A^1/G(F)$ の体積を Tamagawa number という。これに関してつぎの定理が成り立つ。

Theorem 1.6.1.(Kottwitz) connected reductive group G, G' が互いに inner twist であれば

$$\tau(G) = \tau(G').$$

またこれより

Theorem 1.6.2.(Weil conjecture) G が、semisimple simply connected ならば $\tau(G) = 1$.

§1 については、[P-R] を御参照下さい。

§2. Computation of zeta functions

2.1. Orbits

(G, ρ, V) を irreducible な概均質ベクトル空間とし、その basic relative invariant を P とし、それに付随する G の指標を χ と記す。

$$V^{ss} = \{\ x \in V \mid P(x) \neq 0\ \}$$

と置く。$x \in V^{ss}(F)$ に対し、G_x で x の stabilizer group を表し、G_x^0 でその connected component を表す。また有限群 Π_x を $\Pi_x = G_x/G_x^0$ で定義する。G が parabolic type のときには、$\Pi_x \simeq S_n$, $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ であることが知られている (cf. [G])。ゼータ関数を計算するためには $G(F)\backslash V^{ss}(F)$ を記述することが重要である。この小節ではこれを後の計算に都合のよい形で記述する。$\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ と記す。

ガロアコホモロジーの結果によれば、$G(F)\backslash V^{ss}(F)$ は

$$\mathrm{Ker}\,(H^1(F, G_x) \longrightarrow H^1(F, G))$$

と bijective である。ここでは、これ以外に $Y_x = G/G_x^0$ とし、$G(F)\backslash Y_x(F)$ も同時に考える。これは上と同様に

$$\mathrm{Ker}\,(H^1(F, G_x^0) \longrightarrow H^1(F, G))$$

と bijective である。完全系列

$$1 \longrightarrow G_x^0 \longrightarrow G_x \longrightarrow \Pi_x \longrightarrow 1$$

から完全系列

$$\begin{aligned} 1 \to G_x^0(F) \to G_x(F) \to &\Pi_x(F) \to \\ &H^1(F, G_x^0) \to H^1(F, G_x) \to H^1(F, \Pi_x) \end{aligned}$$

が得られる。写像

$$\begin{gathered} V^{ss}(F) \longrightarrow G(F)\backslash V^{ss}(F), \\ G(F)\backslash V^{ss}(F) \simeq \mathrm{Ker}(H^1(F, G_x) \to H^1(F, G)), \\ H^1(F, G_x) \longrightarrow H^1(F, \Pi_x) \end{gathered}$$

を合成して写像

$$\varphi_x \colon V^{ss}(F) \longrightarrow H^1(F, \Pi_x)$$

を得る。

φ_x について述べる前に次のことを注意しておく。$x,\ y\in V^{ss}(F)$ に対し、$g\cdot x=y$ となる $g\in G(\bar F)$ が存在する。$x,\ y\in V^{ss}(F)$ であることから $g^{-1\sigma}g\in G_x$ がわかる。所で、G_x から G_y への写像 $f(h)=ghg^{-1}$ はこれらの群の間の同型を与え、

$$f^{-1\sigma}f=\mathrm{Int}_{g^{-1\sigma}g}$$

より G_y は G_x の 1-cocycle $(g^{-1\sigma}g)$ による twist であることが分かる。しかし $g^{-1\sigma}g$ は必ずしも G_x^0 には含まれないので、$\tau(G_x^0)$, $\tau(G_y^0)$ の間の関係は分からない。

$y,\ z\in V^{ss}(F)$ に対し、$\varphi_x(y)=\varphi_x(z)$ のとき $y\sim z$ と記すことにする。これは x の選び方によらない $V^{ss}(F)$ の同値関係を定める。このとき $y\sim z$ ならば、Π_y と Π_z は $\mathcal{G}$-group として同型である。また connected な代数群 H に対し

$$\text{Ш}\ (H)=|\mathrm{Ker}\,(H^1(F,H)\longrightarrow\prod_v H^1(F_v,H))|$$

とおく。これらに関して次の命題が成り立つ。

Proposition 2.1.1. $x,\ y,\ z\in V^{ss}(F)$ とする。

(1) $\varphi_x(y)=\varphi_x(z)$ であることと、G_z が G_y の G_y^0 に値をもつ cocycle による twist であることと同値である。従ってこのとき

$$\tau(G_y^0)=\tau(G_z^0),\ \text{Ш}\ (G_y^0)=\text{Ш}\ (G_z^0)$$

が成り立つ。

(2) $y\in V^{ss}(F)$ に対して

$$V^{ss}(F,y)=\{\ z\in V^{ss}(F)\ |\ z\sim y\ \}$$

と定める。

$$V^{ss}(F)=\bigcup_{y\in V^{ss}(F)/\sim}V^{ss}(F,y)$$

は disjoint union である。

(3) $Y_y(F)$ から $V^{ss}(F,y)$ への写像 λ を $gG_y^0\mapsto g\cdot y$ で定め、それから自然に導かれる写像

$$\bar\lambda\colon G(F)\backslash Y_y(F)\longrightarrow G(F)\backslash V^{ss}(F,y)$$

を考える。このとき $\lambda,\bar\lambda$ は surjective であり、

$$\deg\lambda=|\Pi_y(F)|,$$

$$|\bar\lambda^{-1}(G(F)y'))|=|\Pi_y(F)|/[G_{y'}(\mathrm{F}):G_{y'}^0(F)],\quad y'\in V^{ss}(F,y)$$

が成り立つ。

(2) の分解は $\Pi_x=S_2$ の場合には次の分解を与える。

$$V^{ss}(F)=\bigcup_{d\in F^\times/F^{\times 2}}V^{ss}(F,d)$$

ここで

$$V^{ss}(F,d) = \{\ x \in V^{ss}(F) \mid P(x) = d\ \}$$

また G_A の orbit に関して次の命題が成り立つ。

Proposition 2.1.2. G_A から $Y_x(F_A)$ への 写像 $g \mapsto gG_x^0(F_A)$ は open map であり、次の bijection 導く。

$$G(F_A)\backslash Y_x(F_A) \longleftrightarrow \mathrm{Ker}\,({\prod_v}' H^1(F,G_x^0) \longrightarrow {\prod_v}' H^1(F,G_x))$$

ここで

$${\prod_v}' H^1(F_v,H) = \{\ (c_v) \in \prod_v H^1(F_v,H) \mid c_v = 1\ \forall' v\ \}$$

これから $H^1(F,G) \longrightarrow \prod_v H^1(F_v,G)$ が単射である場合には、写像

$$G(F)\backslash Y_x(F) \longrightarrow G(F_A)\backslash G(F_A)Y_x(F)$$

の degree は Ш (G_x^0) であることがわかる。

2.2. Zeta functions

$\rho(g)x = g\cdot x$ と略記する。$\Phi = \prod_v \Phi_v$ を $V(F_A)$ 上の Schwarts-Bruhat 関数とする。このときゼータ関数を

$$Z(\Phi,s) = \int_{G(F_A)/G(F)} |\chi(g)|^s \sum_{x\in V^{ss}(F)} \Phi(g\cdot x)dg$$

と定義する。ここではこの積分が絶対収束すると仮定する。この仮定については佐藤文広氏の報告を参照下さい。ここでの目標はこの積分を局所的な積分に帰着する事である。

まず次の部分和

$$Z(\Phi,s,\tilde{x}) = \int_{G(F_A)/G(F)} |\chi(g)|^s \sum_{y\in V^{ss}(F,x)} \Phi(g\cdot x)dg$$

を考える。明かに

$$Z(\Phi,s) = \sum_{x\in V^{ss}(F)/\sim} Z(\Phi,s,\tilde{x})$$

が成り立つ。ここではこの部分和 $Z(\Phi,s,\tilde{x})$ がほぼ局所的なゼータ関数の積として表されることを示す。

容易に

$$\begin{aligned} Z(\Phi,s,\tilde{x}) &= \sum_{y\in G(F)\backslash V^{ss}(F,\tilde{x})} [G_y(F):G_y^0(F)]^{-1} \int_{G(F_A)/G_y^0(F)} |\chi(g)|^s \Phi(g\cdot y)dg \\ &= \sum_{y\in G(F)\backslash V^{ss}(F,\tilde{x})} \frac{\tau(G_y^0)}{[G_y(F):G_y^0(F)]} \int_{G(F_A)/G_y^0(F_A)} |P(g\cdot y)|^s \Phi(g\cdot y)dg \end{aligned}$$

がわかる。ここで $y \in V^{ss}(F)$ であることと、$P(g\cdot y) = \chi(g)P(y)$ であることから $|\chi(g)| = |P(g\cdot y)|$ であることを用いた。Prop.2.1.1(3) を用いて $G(F)\backslash Y_x(F)$ 上の和に変えると

$$\frac{\tau(G_y^0)}{[G_y(F) : G_y^0(F)]} \times \frac{[G_y(F) : G_y^0(F)]}{\Pi_y(F)} = \frac{\tau(G_y^0)}{|\Pi_y(F)|}$$

であり、右辺は y に依存しないことに注意する。次に Prop.2.1.2 を用いると

$$\begin{aligned} Z(\Phi, s, \tilde{x}) &= \frac{\tau(G_x^0)\ Ш\ (G_x^0)}{|\Pi_x(F)|} \sum_{y\in G(F_A)\backslash G(F_A)Y_x(F)} \int_{G(F_A)/G_y^0(F_A)} |P(g\cdot y)|^s \Phi(g\cdot y)dg \\ &= \frac{\tau(G_x^0)\ Ш\ (G_x^0)}{|\Pi_x(F)|} \sum_{y\in G(F_A)\backslash G(F_A)Y_x(F)} \int_{G(F_A)y} |P(\lambda(y))|^s \Phi(\lambda(y))dy \\ &== \frac{\tau(G_x^0)\ Ш\ (G_x^0)}{|\Pi_x(F)|} \int_{G(F_A)Y_x(F)} |P(\lambda(y))|^s \Phi(\lambda(y))dy. \end{aligned}$$

ここで、G_x^0 が simply connected であるとすると、次の図式

$$\begin{array}{ccc} H^1(F, G_x^0) & \longrightarrow & H^1(F, G) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod_v H^1(F_v, G_x^0) & \longrightarrow & \prod_v H^1(F_v, G) \end{array}$$

より、自然な写像 $G(F)\backslash Y_x(F) \longrightarrow G(F_A)\backslash Y_x(F_A)$ が surjective 即ち、$G(F_A)Y_x(F) = Y_x(F_A)$ であることがわかり、この積分は局所的な積分

$$\int_{Y_x(F_v)} |P(\lambda(y_v))|^s \Phi(\lambda(y_v))dy_v = |\Pi_x(F_v)| \int_{X^{ss}(F_v,\tilde{x})} |P(x_v)|^s \Phi(x_v)dx_v$$

の積になる。$G(F_A)Y_x(F)$ と $Y_x(F_A)$ とが異なる例を次の節で見る。一般の場合もここでの方法を修正すれば計算できると思われる。

2.3 Example

$\tilde{G} = GL_n \times G_m$、$V = S_n$ (n 次の対称行列のなすベクトル空間)

$$\tilde{\rho}((g,a))v = agv^t, \quad (g,a) \in GL_n \times G_m$$

と置くと、$(\tilde{g}, \tilde{\rho}, V)$ は、概均質ベクトル空間である。ここで

$$\operatorname{Ker}\tilde{\rho} = \{\ (\alpha, \alpha^2) \mid \alpha \in G_m\ \} \simeq G_m$$

で、$G = \tilde{\rho}(\tilde{G})$ と置くと、G について Hasse principle が成り立つ。$\rho(g) = g,\ g \in G$ と置くと、(G, ρ, V) も概均質ベクトル空間となるが、$(\tilde{G}, \tilde{\rho}, V)$ を考えておく方が計算に便利なようである。このとき $P(v) = \det v$ 、$\chi(\tilde{g}) = a^n \det g^2$、$\tilde{g} = (g,a)$、が、basic relative invariant

と その指標を与える。以下 n が奇数か偶数かにより状況が異なるので二つの場合に分けて考える。

n が奇数の場合。このとき

$$\tilde{G}_x = \tilde{G}_x^0 = \{\ (a,g) \mid gx{}^tg = a^{-1}x\ \}(\simeq GO_x)$$

で、$\tilde{G}_x$ は connected であり、$\Pi_x = \{1\}$、$Y_x = V^{ss}$ である。$\tilde{G}(F_A)V^{ss}(F)$ を調べるために次の完全系列を考える。

$$1 \longrightarrow SO_x \longrightarrow GO_x \longrightarrow G_m \longrightarrow 1$$

ここで GO_x から G_m への写像は

$$g \longmapsto (\det g)\nu(g)^{-(n-1)/2}$$

で定める。$\nu(g)$ は g の similitude を表す。これから次の可換図式

$$\begin{array}{ccccccc}
F^\times & \longrightarrow & H^1(F,SO_x) & \longrightarrow & H^1(F,GO_x) & \longrightarrow & 1 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\prod_v F^\times & \longrightarrow & \prod_v H^1(F_v,SO_x) & \longrightarrow & \prod_v H^1(F_v,GO_x) & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

を得る。写像

$$H^1(F,SO_x) \to H^1(F,GO_x), \quad \prod_v H^1(F_v,SO_x) \to \prod_v H^1(F_v,GO_x)$$

は同型である。また $H^1(F,SO_x) \to \prod_v H^1(F_v,SO_x)$ の像は、二次形式の理論により知られている。従って、写像 $H^1(F,GO_x) \to \prod_v H^1(F_v,GO_x)$ の像もわかる。これを具体的に調べる。簡単のため $x = e$ 単位行列にとる。$x = ag{}^tg$、$a \in G_m$、$g \in GL_n$ とする。このとき $g^{-1\sigma}g \in GO_e(\sigma \in \mathcal{G})$ で $\nu(g^{-1\sigma}g) = a^\sigma a^{-1}$ である。ここで

$$(\det g^{-1\sigma}g(a^\sigma a^{-1})^{-(n-1)/2})^{-1}g^{-1\sigma}g = h^{-1\sigma}h \in SO_e, \quad h = ((\det g)^{-1}a^{-(n-1)/2}g$$

であることに注意し、

$$hh^\sigma = (\det g)^{-2}a^{-n}x = (\det x)^{-1}x$$

であることに注意すれば、$(x_v) \in V^{ss}(F_A)$ が $\tilde{G}(F_A)V^{ss}(F)$ に含まれるための必要十分条件は

$$\prod_v \varepsilon_v((\det x_v)^{-1}x_v) = 1 \Longleftrightarrow \prod_v \tilde{\varepsilon}_v(x_v) = 1$$

であることがわかる。ここで $\varepsilon_v(x_v)$ は x_v の Hasse invariant を表し、

$$\tilde{\varepsilon}_v(x_v) = \varepsilon((\det x_v)^{-1}x_v) = \varepsilon_v(x_v)(\det x_v, (-1)^{(n+1)/2})_v$$

である。即ち

$$\tilde{G}(F_A)V^{ss}(F_A) = \{ (x_v) \in V^{ss}(F_A) \mid \prod_v \tilde{\varepsilon}_v(x_v) = 1 \}$$

であることがわかる。これより

$$Z(\Phi, s) = (\tau(G_e)/4)(\int_{V^{ss}(F_A)} |P(x)|^s \Phi(x)dx + \int_{V^{ss}(F_A)} \tilde{\varepsilon}(x)|P(x)|^s \Phi(x)dx)$$

$$\tilde{\varepsilon}(x) = \prod_v \tilde{\varepsilon}_v(x_v), \quad x = (x_v)$$

とゼータ関数が自然に二つのオイラー積に分かれることが分かる。

n が偶数の場合。この場合 G_x は connected ではなく $|\Pi_x| = 2$ である。従って

$$V^{ss}(F) = \bigcup_{d \in F^\times/F^{\times 2}} V^{ss}(F, d), \quad V^{ss}(F, d) = \{ x \in V^{ss}(F) \mid \det x \in dF^{\times 2} \}$$

である。$x \in V^{ss}(F, d)$ とする。次の完全系列を考える。

$$1 \longrightarrow SO_x \longrightarrow GO_x^0 \longrightarrow G_m \longrightarrow 1$$

GO_x^0 から G_m への写像は similitude によって与えられるものである。これから次のか可換図式

$$\begin{array}{ccccccc} F^\times & \longrightarrow & H^1(F, SO_x) & \longrightarrow & H^1(F, GO_x^0) & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \prod F_v^\times & \longrightarrow & \prod H^1(F_v, SO_x) & \longrightarrow & \prod H^1(F_v, GO_x^0) & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

を得る。ここで $F^\times$ の $H^1(F, SO_x)$ への作用は、二次形式との対応で述べると $y \mapsto ay$ $(a \in F^\times)$ で与えられる。Hasse invariant の関係式

$$\varepsilon_v(a_v x_v) = \varepsilon_v(x_v)((-1)^{n/2} \det x_v, a_v)_v$$

に注意すると $(-1)^{n/2} \det x \notin F^{\times 2}$ の場合には、写像

$$H^1(F, GO_x^0) \longrightarrow \prod{}' H^1(F_v, GO_x)$$

が surjective になる。従って $\tilde{G}(F_A)Y_x(F) = Y_x(F_A)$、$\tilde{G}(F_A)V^{ss}(F, d) = V^{ss}(F_A, d)$ が成り立つ。ここで

$$V^{ss}(F_A, d) = \{ x \in V^{ss}(F_A) \mid \det x \in dF_A^{\times 2} \}$$

である。$(-1)^{n/2} \det x \in F^{\times 2}$ の場合には、同型

$$H^1(F, SO_x) \simeq H^1(F, GO_x^0)$$

$$\prod_v H^1(F_v, SO_x) \simeq \prod_v H^1(F_v, GO_x^0)$$

が得られ、これから

$$\tilde{G}(F_A)V^{ss}(F) = \{\ x \in V^{ss}(F,d) \mid \varepsilon(x) = 1\ \}$$

が得られる。ここで $\varepsilon(x) = \prod \varepsilon_v(x_v)$ $x = (x_v)$。これから $Z(\Phi, s, \tilde{x})$ は $(-1)^{n/2}\det x \notin F^{\times 2}$ のときには

$$(\tau(G_x^0)/2)\int_{Y_x(F_A)} |P(\lambda(y))|^s \Phi(\lambda(y))dy$$

となり、オイラー積を持つが、$(-1)^{n/2} \in F^{\times 2}$ のときには

$$(\tau(G_x^0)/4)(\int_{Y_x(F_A)} |P(\lambda_x(y))|^s \Phi(\lambda(y))dy + \int_{Y_x(F_A)} \varepsilon(\lambda(y))|P(\lambda(y))|^s \Phi(\lambda(y))dy$$

とオイラー積をもつもの二つの和となる。

局所的なゼータ関数については、V^{ss} 全体の上のものについては、井草準一氏により多くの場合に計算されているが、orbit 上のものについてはまだあまり計算されていないようである。対称行列の空間の場合は、[I-S] を御参照下さい。また、エルミート行列の空間の場合にも計算できる。

References

[G] A. Gyoja, Invariants, nilpotent orbits, and prehomogeneous vector spaces, J. of Algebra, 142(1991), 210-232.

[I-S] T. Ibukiyama and H. Saito, Zeta functions associated to symmetric matrices, preprint.

[P-R] V. Platonov and A. Rapinchuk, Algebrai groups and number theory, Academic Press.