数理解析研究所講究録
925巻 1995年 95-101

log etale cohomology の双対性

東京大学D3 中山能力
Chikara Nakayama

"Duality in log etale cohomology"

Throughout this manuscript, A denotes a (commutative) ring.
k denotes a (commutative) field.

0. Introduction

$$\text{scheme} \xrightarrow{\text{log化}} \text{log scheme}$$

右が左を含んでいる
⓪:話の順序

etale cohomology ① log etale cohomology

② Poincaré duality ③ log Poincaré duality

④ Proofs

⑤ Application

1. The definition of log etale cohomology

Let X be an fs log scheme (i.e. locally the log str. M_X of X has a chart with an fs monoid).

$$P:\text{fs} \leftrightarrow \begin{cases} \text{finitely generated, } P \to P^{gp} \text{ is injective (fine)} \\ \forall a \in P^{gp}, a^n \in P,\ n \geq 1 \Rightarrow a \in P \quad \text{(saturated)} \end{cases}$$

Then we define the log etale pretopology $X_{et}^{\log}$ of X as follows:

$\mathrm{Obj} = \{ Y \to X$ in $\overset{\text{(fs log sch)}}{\text{(fs)}}$, log etale and $\underline{\text{of Kummer type}}\}$

for $\forall y \mapsto x$

$(M_Y/\mathcal{O}_Y^*)_{\bar{y}} \leftarrow (M_X/\mathcal{O}_X^*)_{\bar{x}}$ is injective and $\forall \overset{\cup\!\!\!|}{a}$ $\exists n \geq 1$ $\overset{\cup\!\!\!|}{a^n}$

Fl = X-morphisms

coverings = surjective families

log etale cohomology は K.Fujiwara によって導入され、一般の定義は. K. Kato による。従来の etale cohomology 論と並行的にするために. クンマー型を課する。単に log etale だけでは. 例えば全射の base change が全射にならないことがある. などの困難が生ずる。((fs)での base change の underlying scheme は. scheme の圏での base change にならない場合がある。)

Proposition　If X has the trivial log str., i.e. $M_X = \mathcal{O}_X^*$,

then $X_{et}^{\log} = \overset{\circ}{X}_{et}$ ($\overset{\circ}{X}$ denotes the underlying scheme.)

このように. log etale cohomology は. fs というよい性質をもつ log scheme に対してのみ定義されるが. trivial log str. は fs なので. 従来の場合は含んでいることになる。

2. A review of relative Poincaré duality in etale cohomology (SGA4 XVIII §3)

Poincaré duality といえば普通は H_c^i と H^{2d-i} とが dual ということだが. etale cohomology について証明するとき. relative な定式化が有効であった。

① Formal duality

Let S be a scheme. (一つ base を固定)

Let $f : X \to Y$ be an S-compactifiable morphism and let A be a torsion ring.

fがproperならRf_*, open immersionなら0による拡張，一般にはその合成で定義

Then $Rf_! : D(X,A) \to D(Y,A)$ has a (unique) partial right adjoint

$$Rf^! : D^+(Y,A) \to D^+(X,A), \text{ and}$$

$$R^+f_* R\mathcal{H}om(K, Rf^!L) \xrightarrow{\sim} R\mathcal{H}om(Rf_!K, L),\ K \in D^-(X,A),\ L \in D^+(Y,A)$$

これは本質的には圏論のadjoint functor theoremに帰着する形式的な命題である。

② Further assume f is smooth and the relative dimension d of f is pure. Let $A = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ where n is an integer invertible on S. Then

$$Rf^!L \cong f^*L(d)[2d]$$

<u>Notes.</u> In particular when $Y = S = k = k_{sep}$, $L = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}[0]$, and $K = F[0]$ is locally constant and constructible on X_{et},

①+② ⇒ there is a non-degenerate pairing

$$H^i_c(X, F) \times H^{2d-i}(X, \check{F}(d)) \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

3. Log Poincaré duality

以上をlog化したいが，まずformal dualityはそのまま成り立つので，問題は

① Formal duality OK.

② <u>Problem</u> Calculate $Rf^!\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ for various f that is log smooth and compactifiable.

ということになる。では log smooth 射にはどういうものがあるかというと．

Typical examples of log smooth morphisms:

a) toric variety $/S = (\mathrm{Spec}\, k$, trivial log.)

b) semistable family $/T = (\mathrm{Spec}\, \underset{\substack{\uparrow \\ \mathrm{dvr}}}{R}$, log str. defined by the closed pt)

このように．singularity のある対象が適当な log str. を与えることで，log smooth になるということがそもそもの log scheme 導入の動機であった。結果を述べる。

<u>Thm. 1.</u> Let S be as above and let $A = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ where n is an integer invertible on S. Let $f: Y \to X$ be a log smooth S-compactifiable morphism in $(fs)/S$ with Y and X connected $\neq \phi$. Let $d = \dim Y - \dim X$.

Assume (a) X is log smooth and compactifiable over S

or (b) X is compactifiable over S and is etale locally <u>the log locus</u> of an X' that is log smooth over S. $\mathrm{Supp}(M_{X'}/\mathcal{O}^*_{X'})$

Then

$$Rf^! \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = j_! \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d)[2d]$$

where $j: \underset{\shortparallel}{Y_{\mathrm{ver}/f}} \hookrightarrow Y$ is the open immersion from $\{y \in Y \mid f$ is vertical at y i.e. $\forall a \in M_{Y,\bar{y}}\ \exists b \in M_{X,\overline{f(y)}}$ s.t. $a | b$ in $M_{Y,\bar{y}}\}$ //

For simplicity $\boxed{\Lambda := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ in the following. 本稿の最後まで

<u>Example 1</u> (a) Assume $X = S$. Then $Y_{\mathrm{ver}/f} \hookrightarrow Y$ is a toroidal

embedding.

普通のetale cohomologyでは. toric varietyの双対複体は複雑だが. logでは. 単に. torusからの0による拡張となっている. ということ。

(b) Let $f : Y \to X$ be the special fiber of a semistable family, where $X = T \otimes_R k$.

Then X satisfies (b) and $Y_{\mathrm{ver}/f} = Y$, so $Rf^! \Lambda = \Lambda(d)[2d]$ where $d = \dim Y$.

普通のsmoothの場合と全く並行的である。実際に族から来ていなくても. 局所的にそうなっているだけでもよい。

<u>Remark</u> For a certain f which does not satisfy (a) nor (b), $Rf^! \Lambda \neq j_! \Lambda(d)[2d]$.

一般にはどうなるかは.今の所予想することも難しい。

<u>Thm 2.</u> (d.v.r. base) Let T be as above and let η be its generic point. Let n be an integer invertible on T. Let $f : Y \to X$ be a log smooth T-compactifiable morphism in $(fs)/T$ with Y and X connected $\neq \phi$. Assume that f is vertical. Let $d = \dim(Y_\eta) - \dim(X_\eta)$. Assume X is log smooth and compactifiable over T.

Then the same conclusion as in Thm.1 holds.

<u>Example 2.</u> Let $f : Y \to X = T$ be a semistable family. Then Thm 2.

can be applied to f.

4. Proofs

Thm1.(a) reduces to the case where $X = S = k = k_{sep}$ and $Y = \mathrm{Spec}(k[t_1, \dots, t_d])$ with log str. associated to $\mathbb{N} \ni 1 \mapsto t_1$.

Consider

$$\begin{tikzcd}
\underset{\text{trivial log}}{Y_{ver}} \arrow[r, hook, "j"] \arrow[dr, "u"'] & Y \arrow[d, "f"] & Y \setminus Y_{ver} =: Z \arrow[l, hook', "\iota"'] \arrow[d, "\varepsilon : \text{forgetting log morphism}"] \\
& k & Z^{cl} = (\mathring{Y}/(t_1), \text{trivial log}) \arrow[l, "z^{cl}"']
\end{tikzcd}$$

(Notation: For a log scheme X, $\mathring{X}$ denotes the underlying scheme of X and $X^{cl} = (\mathring{X}, \text{the trivial log str.})$)

We have $j^* Rf^! \Lambda = Ru^! \Lambda \cong \Lambda(d)[2d]$ (usual Poincaré duality).

We prove its adjoint $Rf^! \Lambda \xleftarrow{\mu} j_! \Lambda(d)[2d]$ is an isomorphism.

To see this, it suffices to show $R\iota^! \mu$ is an isomorphism.

Consider

$$\begin{tikzcd}
R\iota^! j_! \Lambda(d)[2d] \arrow[d, "R\iota^! \mu"'] & R\iota^! \iota_* \Lambda(d)[2d-1] \arrow[l, "\partial", "\sim"'] = \Lambda(d)[2d-1] \arrow[d, "\wr"] \\
R\iota^! Rf^! \Lambda = R\varepsilon^! Rz^{cl!} \Lambda & \underset{\text{usual P.d. for } \mathring{Z}}{\cong} R\varepsilon^! \Lambda(d-1)[2d-2]
\end{tikzcd}$$

where ∂ is an isomorphism by (usual) relative purity and the right vertical arrow is an isomorphism induced by a Galois theory on the constant log scheme Z:

$$\{\text{Module on } Z^{\log}_{et}\} \approx \{\text{Module on } \mathring{Z}_{et} \text{ on which } \hat{\mathbb{Z}}(1) = \varprojlim_{(m, \mathrm{ch}\, k) = 1} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(1) \text{ acts continuously}\}$$

この図式の可換性の証明は難しいが、実はformal dualityを利用した論法があって可換性を示すことなしに、μの同型をいうことができる。

Thm 1(b) is reduced to (a). Thm 2 is formally induced from Thm 1 and purity for log smooth families over d.v.r.

5. An application of Thm 1(a).

Prop. Let Δ be a finite simplicial fan of dim. r and let k be a field. Let n be an integer prime to ch(k) and to N_Δ (an integer determined by Δ).

$\boxed{\Lambda = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$

Then $R(X_\Delta \to k)^! \Lambda \cong \Lambda(r)[2r]$ on $(X_\Delta)_{et}$.

X_Δ: the toric variety associated to Δ

(Note that this statement concerns the usual etale cohomology (not log).)

文献について：log schemeの基本的なことについては論文集 Algebraic analysis, geometry, and number theory, Johns Hopkins University Press, 1989の中のK. Katoの論文(pp. 191-224)をはじめ、いくつかの文献が出版されている。しかし§1, 3-5の内容が書かれた文献は今の所(1995年4月現在) preprintの段階である。