数理解析研究所講究録
925巻 1995年 102-104

代数体上の多様体の Chow 群の有限性について

東大・数理　　斎藤 秀司

Xを体k上の非特異射影的多様体とし$CH^r(X)$をX上の余次元rの代数的サイクルの有理同値類のなす群、いわゆる余次元rの Chow 群とする。$r=1$ の場合 $CH^1(X)$ はX上の因子類群に他ならず

$$CH^1(X) \simeq \mathrm{Pic}(X)$$

なる同型がある。ここに右辺はX上の階数1のベクトル束の同型類のなす群である。ピカール多様体の理論により完全列

$$0 \to \mathrm{Pic}^0(X) \to \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{NS}(X) \to 0$$

が存在する。ここに $\mathrm{Pic}^0(X)$ はX上の代数的に0に同値な因子類たちのなす部分群で $\mathrm{NS}(X)$ はネロン・セヴェリ群と呼ばれ有限生成アーベル群であることが知られている。また

$$\mathrm{Pic}^0(X) \simeq \mathrm{Picvar}(X)(k)$$

なる同型がある。ここに右辺はピカール多様体と呼ばれるアーベル多様体 $\mathrm{Picvar}(X)$ のk−有理点全体のなす群とする。以上により $CH^1(X)$ の構造はある程度把握されることになる。特にkが有限次代数体の場合には代数体上のアーベル多様体の有理点のなす群の有限生成性（モーデル・ヴェイユの定理）により $CH^1(X)$ は有限生成アーベル群である。

一方 $r \geq 2$ の場合は上に述べたように$CH^r(X)$をアーベル多様体の有理点と結びつけることは一般には本質的に不可能なことが知られている。しかし最後に述べた有限生成性については次の予想がある。

予想（1）（H. Bass）　Xを代数体上の非特異多様体とすると$CH^r(X)$は有限生成アーベル群である。

$r \geq 2$ の場合この予想に対し一般的な結果はほとんど知られていない。つぎは現在最も一般的な結果[1]である。

定理（2）（Colliot-Thélène/Raskind/Salberger）Xが代数体上定義された非特異射影的多様体とし $H^2(X, \mathcal{O}_X)=0$ が成り立つとする。このとき $CH^2(X)$ のねじれ部分 $CH^2(X)_{tor}$ は有限群である。

系（3）Xが代数体上定義された非特異射影的曲面とし $H^2(X, \mathcal{O}_X)=0$ が成り立ちかつXは一般型でないとする。このとき $CH^2(X)$ は有限生成アーベル群である

（３）は（２）と Bloch-Kas-Lieberman[２]の結果より直ちに従う。

さて有理素数 p にたいしサイクル写像

$$\rho_p \ : \ CH^2(X)\{p\} \to H^2_{cont}(X, \mathbf{Z}_p(2))$$

が定義される。ここに左辺は $CH^2(X)$ の p のべき乗でゼロ化されるねじれ元全体を表し右辺は Jannsen[３]によって定義された｀連続 エタール・コホモロジー（ continuous etale cohomology)' である。これに対し筆者[４]は次の結果を得ている。

定理（４） X が代数体上定義された非特異射影的多様体とし次を仮定する。

(i) $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$ 。

(ii) X のピカール多様体はすべての k の素点において potentially good reduction をもつ（たとえば $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ ならこの仮定は満たされる)。

このとき ρ_p は単射である。

一般に ρ_p の像が有限であることも示される。これにより（４）は（２）の別証明をも与えている（実は (ii) の仮定なしでも $\mathrm{Ker}(\rho_p)$ が有限であることはいえる)。さらに（４）は具体的に与えられた多様体（特に有理多様体）の Chow 群の定量的な計算にも応用される（[５]参照)。

さて（２）と（４）における仮定 $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$ は本質的なものであった。一方これに対し筆者と A.Langer[６]は次の結果を得た。

定理（５） E をモヂュラーな楕円曲線で $\phi \ : \ X_0(N) \to E$ をそのモヂュラー曲線による parametrization とする。$X = E \times E$ とおく。このとき $p \nmid 6N$ の仮定の下

$$\rho_p \ : \ CH^2(X)\{p\} \to H^2_{cont}(X, \mathbf{Z}_p(2))$$

は単射である。特に $CH^2(X)\{p\}$ は有限である。

（５）は余次元２以上の Chow 群の有限性に関する結果で $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$ を仮定しないものとしてはいまのところただ一つのものである。（４）の証明においては代数的 K 理論の応用が本質的である。これは元々S.Bloch によって７０年代に創始されたものである。さらにこれに加えて局所体上の曲線の類体論[７]と Jannsen[８]によるコホモロジー論的 Hasse 原理に関する結果が使われる。（５）の証明においてはモヂュラー曲線や楕円曲線の整数論からの本質的に新しいアイデアが使われる。さらに p—進ホッヂ理論、Fontaine-Messing の理論[９]、サントミック・コホモロジー（ syntomic cohomology ）といった新しい手法も活躍する。証明のひとつの根幹は A.Wiles の志村—谷山予想に関する仕事でも使われた一般化されたセルマー群

$$Sel(\mathbf{Q}, A) = \mathrm{Ker}\Big(H^1(\mathbf{Q}, A) \to \bigoplus_{all\ \ell} \frac{H^1(\mathbf{Q}_\ell, A)}{H^1_f(\mathbf{Q}_\ell, A)}\Big)$$

$$(A = H^2(X \times_{\mathbf{Q}} \overline{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(2))$$

の有限性が本質的である。この有限性はもともとFlach[１０]によるものだが[６]においてはp−進ホッヂ理論を使った別証明も与えれている。。

参考文献

1. J.-L. Colliot-Thélène and W. Raskind, *Groupe de Chow de codimension deux des variété sur un corps de numbres: Un théorème de finitude pour la torsion*, Invent. Math. **105** (1991),.
2. S. Bloch, A. Kas and D. Lieberman, *Zero-cycles on surfaces with* $p_g = 0$, Compos. Math. **33** (1976), 135–145.
3. U. Jannsen, *Continuous etale cohomology*, Math. Annal. **280** (1987), 207–245.
4. S. Saito, *On the Cycle Map for Torsion Algebraic Cycles of Codimension Two*, Invent. Math. **106** (1991), 443–460.
5. J.-L. Colliot-Thélène and S. Saito, *Brauer-Manin equivalence for zero-cycles on varieties over p-adic fields*, preprint.
6. A. Langer and S. Saito, *Torsion zero-cycles on the self-product of a modular elliptic curve*, to appear in Duke Math. J..
7. S. Saito, *Class field theory for curves over local fields*, Journal Number Theory **21** (1985), 44–80.
8. U. Jannsen, *Principe de Hasse cohomologique*, Séminaire de théorie des nombres de Paris, Progress in Mathematics **102** (1989-90, Sinnou David, Editor), Birkhäuser, Boston/Basel/ Berlin.
9. J.-M. Fontaine and W. Messing, *p-adic periods and p-adic étale cohomology*, Contemporary Math. **67** (1987), 179–207.
10. M. Flach, *A finiteness theorem for symmetric square of an elliptic curve*, Invent. Math. **109** (1992), 307–327.