数理解析研究所講究録
925巻 1995年 117-119

On Shioda's problem about Jacobi sums

京都工繊大　三木 博雄 (Hiroo Miki)

本講演では，ヤコビの和 $J_\ell^{(a)}(\mathfrak{p})$ に関する塩田徹治氏の問題（[5, 問題 3.4]）の ℓ-部分および Gouvêa - Yui [1] の予想 (1.9) に肯定的解決を与えた講演者による最近の結果（[4]）が報告された。詳細については，文献 [4] を見られたい。

ℓ を5以上の任意の素数，ζ_ℓ を複素数体 $\mathbb{C}$ 内の1の原始 ℓ 乗根，$\mathbb{Q}$ を有理数体，$\mathbb{Z}$ を有理整数環とし，$k=\mathbb{Q}(\zeta_\ell)$ とおく。任意の自然数 r，任意の $a=(a_1,\cdots,a_r)\in\mathbb{Z}^r$，および ℓ と素な k の任意の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して，

$$J_\ell^{(a)}(\mathfrak{p})=(-1)^{r+1}\sum_{\substack{x_1,\cdots,x_r\in\mathbb{F}_q\\ x_1+\cdots+x_r=-1}}\chi_\mathfrak{p}^{a_1}(x_1)\cdots\chi_\mathfrak{p}^{a_r}(x_r)\in\mathbb{Z}[\zeta_\ell]$$

は，ヤコビの和とよばれている。但し，$\mathbb{F}_q=\mathbb{Z}[\zeta_\ell]/\mathfrak{p}$，$q=N\mathfrak{p}=\#(\mathbb{F}_q)$ で，$\chi_\mathfrak{p}(x)=\left(\frac{x}{\mathfrak{p}}\right)_\ell$ は k における ℓ 巾剰余記号である。すなわち，$x\in\mathbb{Z}[\zeta_\ell]$，$x\notin\mathfrak{p}$ なる x については，

$\chi_{\mathfrak{p}}(x \bmod \mathfrak{p})$ は，

$$\chi_{\mathfrak{p}}(x \bmod \mathfrak{p}) \equiv x^{(N\mathfrak{p}-1)/l} \pmod{\mathfrak{p}}$$

をみたす$\mathbb{C}$内の唯一つの1のl乗根であり，$\chi_{\mathfrak{p}}(0)=0$である。

rが3以上の奇数で，すべてのi $(0 \leqq i \leqq r)$について，$a_i \not\equiv 0 \pmod{l}$ (但し，$a_0 = -\sum_{i=1}^{r} a_i$) ならば，文献[5，系3.3]により，

$$N_{k/\mathbb{Q}}(1 - J_l^{(a)}(\mathfrak{p})\mathfrak{p}^{-(r-1)/2}) = B\,l^3 / \mathfrak{p}^w$$

とかける。ここに，$N_{k/\mathbb{Q}}$はkから$\mathbb{Q}$へのノルム写像，Bは非負有理整数で，wは[5]の(2.8)で定義された非負整数である。

塩田の問題 ([5，問題3.4])。Bは平方数か？

Zagier [7] ([5，例3.5] および [6，例5.15.1] 参照) は，計算機によって，$l < 20$ および $p < 500$，$p \equiv 1 \pmod{l}$ の場合に，これを確かめた (ここにpは$\mathfrak{p}$内の素数)。塩田[5，定理7.1] は，$r=3$のとき，2，l，p以外の素数ではBが平方数であること (すなわち，Bを素因子分解したとき，$2lp$と素な部分は平方数である) を証明し，諏訪－由井[6，系5.14.1]は，$r=3$のとき，ある条件のもとで，pにおいてBが平方数であることを証明した。

本講演では，任意の奇数$r(\geqq 3)$について，Bのl－部分

が平方数であることを証明した[4]について報告した。

文献

[1] F. Gouvêa and N. Yui, Arithmetic of diagonal hypersurfaces over finite fields, London Math. Soc. Lecture Notes Series 209, Cambridge Univ. Press 1995.

[2] H. Miki, On the l-adic expansion of certain Gauss sums and its applications, Advanced Studies in Pure Math. 12 (1987), pp. 87-118.

[3] H. Miki, On Shioda's problem about Jacobi sums, Acta Arith. 69 (1995), pp. 107-112.

[4] H. Miki, On Shioda's problem about Jacobi sums II, to appear in Acta Arith.

[5] T. Shioda, Some observations on Jacobi sums, Advanced Studies in Pure Math. 12 (1987), 119-135.

[6] N. Suwa and N. Yui, Arithmetic of certain algebraic surfaces over finite fields, in: Lecture Notes in Math. 1383, Springer, Berlin, 1989, pp. 186-256.

[7] D. Zagier, Numerical data, March 1983 (see [6], Examples 5.15.1).