数理解析研究所講究録
925巻 1995年 53-65

岩澤理論の一般化についての概説

東京都立大理 栗原 将人 (Masato Kurihara)

この稿の目標は、いわゆる岩澤理論がideal類群（あるいは不分岐abel拡大のGalois群）以外の多くの対象について存在しているということの（ごく基本的な）解説である。このような岩澤理論の一般化については、Mazur [M]に始まると思われる。ここでは簡単な例についてしか述べられないので、興味のある読者は稿末の文献等を御覧下さい。

§1. good ordinary reduction を持つ楕円曲線

1.1. この§1は主に[M]の解説である。Kを有限次代数体、EをK上の楕円曲線、pを素数とし、K_∞/Kを円分$\mathbb{Z}_p$拡大とする。すなわち$\mathbb{Q}_\infty$は$\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})$ $(=\bigcup_{n\geq 1}\mathbb{Q}(\mu_{p^n})$　μ_{p^n}: 1のp^n乗根全体）の中の$\mathbb{Q}$のunique $\mathbb{Z}_p$拡大であり、$K_\infty=K\cdot\mathbb{Q}_\infty$とする。このときまず基本的な問いとして次の問題が考えられる。

<u>予想R (Mazur)</u>　$E(K_\infty)$は有限生成abel群である。

これを予想として信じる根拠は岩澤理論の哲学にある。すなわちEをK_∞の整数環上の楕円曲面と見たときのNéron Severi群は$E(K_\infty)$と深い関連があるが、岩澤理論の言うK_∞の整数環と代数関体上の曲線の類似を考えると、関体上の曲面のNéron Severi群の有限生成性の類似として$E(K_\infty)$の有限生成性を考えることができる。

岩澤理論はさらに有限体上の曲線のJacobianのTate加群へのFrobeniusの作用からその曲線のL関数が得られるということの類似として、円分$\mathbb{Z}_p$拡大のideal類群への$\mathrm{Gal}(K_\infty/K)$の作用から（zeta関数のp進世界での具現である）p進L関数が得られるという驚くべき美しい結論を得ている。上の場合に対してもこのようなことを考えると、有限体上の曲面Xに対し$NS(X_{\overline{\mathbb{F}}_q})\otimes\mathbb{Z}_\ell \hookrightarrow H^2(X_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathbb{Z}_\ell(1))$であり、$H^2$のL関数がFrobeniusで表せるということの類似を考えると、$E(K_\infty)$を"含む"ようなcohomologyがあって、それへの$\mathrm{Gal}(K_\infty/K)$の作用によってEのp進L関数が得られるのではないかと推測できる。これをもう少し正確に書いていこう。

任意の代数体LとL上の楕円曲線Eに対し、Eのp巾分点全体$E_{p^\infty}\ (=\bigcup_{n\geq 1} E[p^n](\overline{L}))$に関するSelmer群$\mathrm{Sel}(L, E_{p^\infty})$を普通の通り

$$\mathrm{Sel}(L, E_{p^\infty}) := \ker\Big(H^1(L, E_{p^\infty}) \to \prod_{v:\,\text{all primes}} H^1(L_v, E_{p^\infty})/E(L_v)\otimes\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p\Big)$$

で定義する。ここに $E(L_v)\otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ は Kummer sequence により $H^1(L_v, E_{p^\infty})$ の部分群とみなしている。$\Gamma = \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$, $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(K_\infty/K)]] = \mathbb{Z}_p[[\Gamma]] \simeq \mathbb{Z}_p[[T]]$ とおく。最後の同型は fix した Γ の生成元 γ に $1+T$ を対応させるものとする。ここで $\mathrm{Sel}(K_\infty, E_{p^\infty})$ という Λ 加群を考える。これは $\mathrm{Sel}(K_\infty, E_{p^\infty}) = \varinjlim \mathrm{Sel}(K_n, E_{p^\infty})$（$K_n$ は K_∞/K の中間体）と思ってもよい。[M] ではこのような Selmer 群ではなく flat cohomology を使っているが、ここではこの普通の Selmer 群を使うことにする。以下次の仮定をおく。

<u>仮定</u>　E は p の上にある K のすべての素点で good ordinary reduction を持つ。

<u>予想 S (Mazur)</u>　上の仮定の下で Selmer 群の Pontryagin dual $\mathrm{Sel}(K_\infty, E_{p^\infty})^\vee$ は torsion Λ 加群.

<u>Remarks</u> 1. $\mathrm{Sel}(K_\infty, E_{p^\infty})^\vee$ が有限生成 Λ 加群であることは（仮定なしで）すぐにわかる。従ってもちろん予想 S は予想 R を導く。また逆に、K_∞/K のすべての有限次中間体 K_n で、Tate Shafarevich 群 $\text{Ш}(E/K_n)$ の p 巾 torsion 部分が有限であれば 予想 R が予想 S を導くことを示すことができる。

2. $K/\mathbb{Q}$ が有限次 abel 拡大，$E/\mathbb{Q}$ が modular 楕円曲線の

とき、加藤和也氏は予想Sを証明した[K]。

1.2. 以下簡単のため $p \neq 2$ とし、E を $\mathbb{Q}$ 上の modular な楕円曲線、すなわち parametrization $X_0(N) \to E$ があるとする。また E は p で good ordinary reduction を持つとする。$K/\mathbb{Q}$ を有限次 abel 拡大とするとき、Mazur と Swinnerton-Dyer により p 進 L 関数 $L_p(E/K, s)$ が定義されている[MS]。$L_p(E/K, s)$ についてはここでは詳しく述べる余裕がないが、$L_p(E/K, s)$ の $s=1$ での値が普通の L 関数 $L(E/K, s)$ の $s=1$ での値に関連している。たとえば

$$\mathrm{order}_{s=1} L_p(E/K, s) = \mathrm{order}_{s=1} L(E/K, s) = \mathrm{rank}\, E(K)$$

と予想される。最後の = は Birch Swinnerton-Dyer 予想である。上の予想については order $= 0, 1$ のとき Mazur, Swinnerton-Dyer Gross, Zagier, Perrin-Riou 等による結果がある。$L_p(E/K, 1)$ という値も $L(E/K, 1)$ という値と関連している。また $L_p(E/K, s)$ には $L(E/K, s)$ と同じ型の関数等式も存在する。さらに $L_p(E/K, s)$ は岩澤関数である。すなわち $L_p(E/K, s) = G_p(E/K, \kappa(\gamma)^{s-1} - 1)$, $G_p(E/K, T) \in \mathbb{Z}_p[[T]]$ となる巾級数 G_p が存在する。ここに γ は 1.1 でとった $\mathrm{Gal}(K_\infty/K)$ の生成元、$\kappa : \mathrm{Gal}(K_\infty/K) \to \mathbb{Z}_p^\times$ は円分指標である。まず $G_p(E/K, T)$ については次の結果がある。

<u>定理（Rohrlich）</u>　$G_p(E/K, T) \neq 0$

このとき E/K についての岩澤主予想は次のように定形化される。

<u>予想 IMC（岩澤主予想）</u>　予想 S の下に

$$\mathrm{char}_\Lambda(\mathrm{Sel}(K_\infty, E_{p^\infty})^\vee) = (G_p(E/K, T))$$

ここに $\mathrm{Sel}(K_\infty, E_{p^\infty})^\vee$ は $\mathrm{Sel}(K_\infty, E_{p^\infty})$ の Pontryagin dual。$\mathrm{char}_\Lambda(M)$ は有限生成 torsion Λ 加群 M に対し M の特性巾級数で生成される単項 ideal を表す。

上はもう少し詳しく各 χ part に分けて考えることができる。すなわち $\chi : \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ を $K/\mathbb{Q}$ の指標とするとき、$\mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})]$ 加群 M に対して $M^\chi = M \otimes_{\mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})]} \mathcal{O}_\chi$，$\mathcal{O}_\chi = \mathbb{Z}_p[\mathrm{Im}\chi]$ $\mathcal{O}_\chi$ に $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ は χ を通じて作用，と定義する。このとき G_p の χ-part $G_p(E/K, \chi, T)$ も定義され，

$$\mathrm{char}_{\mathcal{O}_\chi[[T]]}(\mathrm{Sel}(K_\infty, E_{p^\infty})^{\vee\chi}) = (G_p(E/K, \chi, T))$$

と予想される。

<u>Remarks 1.</u>　一般の楕円曲線 E についても E が p の上の素点で good ordinary reduction を持てば、p 進 L 関数 $G_p(E/K, T)$ は存

在すると思われる。もっと一般に ordinary, critical な motive（あるいはもう少し一般に Panciskin 条件をみたす motive）に対し岩澤関数となるような p 進 L の存在が予想されている cf. [CP]。さらに岩澤主予想も定形化される [G]。

2. 加藤氏は $\mathrm{char}(\mathrm{Sel}(K_\infty, E_{p^\infty})^{\vee}\chi) \ni G_p(E/K, \chi T)$ を示した。[K]

1.3. λ, μ 不変量について。Selmer 群は Mordell Weil 群と Tate Shafarevich 群に分かれる

$$0 \longrightarrow E(K_\infty)\otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathrm{Sel}(K_\infty, E_{p^\infty}) \longrightarrow Ш(E/K_\infty)_{\text{div}} \longrightarrow 0$$

ので、λ 不変量（$G_p(E/K, T)$ を（多項式）×(unit) と書いたときの多項式の次数）も Mordell Weil 群からの寄与 λ^{MW} と Tate Shafarevich 群からの寄与 $\lambda^{Ш}$ に分かれる。すなわち $\lambda = \lambda(G_p(E/K, T))$ としたとき

$$\lambda = \lambda^{MW} + \lambda^{Ш}, \quad \lambda^{MW} = \sharp\{G_p(E/K, T) = 0 \text{ の } T = \zeta - 1 \ (\zeta : 1 \text{ の } p^n \text{ 乗根 for some } n) \text{ なる型の解の数}\}$$

と書くと λ^{MW} は Mordell Weil 群からの寄与と考えられ

$$\lambda^{MW} = \mathrm{rank}\, E(K_\infty)$$

と予想される。1.2 で述べた加藤氏の結果 $G_p(E/K, T) \in \mathrm{char}(\mathrm{Sel}(K_\infty, E_{p^\infty})^{\vee})$ は

$$\mathrm{rank}\, E(K_\infty) \leqq \lambda^{MW}$$

を導く。特に $\mathrm{rank}\, E(K_\infty) < \infty$ で予想 R はすぐわかる。

μ不変量については次の予想がある.

<u>予想 μ</u> E の p 等分点への表現 $\rho_{E[p]}: Gal(\bar{K}/K) \longrightarrow GL_2(\mathbb{F}_p)$ が既約であれば $\mu(G_p(E/K, T)) = 0$ 。(ここに巾級数 $f(T) \in \Lambda$ の μ不変量 $\mu(f(T))$ とは $f(T)$ がいくつ p で割れるかである.)

<u>Remarks</u> 1. Greenberg はもっと一般的な μ不変量の予想を持っている。

2. $E = X_0(11)$, $X_0(17)$, $K = \mathbb{Q}(\mu_p)$ に対して比較的小さな p に対する λ^{MW}, $\lambda^{Ш}$ の表は [MS] にある。

3. $E = X_0(11)$, $K = \mathbb{Q}$ のとき, よく知られているように $E[5](\mathbb{Q}) \neq 0$ であり $\rho_{E[5]}$ は可約である。このとき $Sel(\mathbb{Q}_\infty, E_{5^\infty})^\vee \sim \Lambda/5$ 。

1.4. 次のような型の予想を(一般的) weak Leopoldt 予想とよぶ。

<u>予想 WL.</u> E を代数体 K 上の楕円曲線とするとき
$H^2(Gal(M_\infty/K_\infty), E_{p^\infty}) = 0$ 。ここに M_∞/K_∞ は p と E が bad reduction を持つ素点の外で不分岐な最大の K_∞ の拡大。

<u>命題</u> $K(E[p])_\infty/K(E[p])$ の普通の意味での μ不変量 $= 0$

であれば 予想WLは成立する.

なぜなら $H^2(M_\infty/K(E[p])_\infty, \mathbb{Z}/p)=0$ (by Iwasawa) による。
また cohomology の計算により (Euler標数の計算等を使って
Λ rank を計算すると) 次がわかる。

<u>命題</u> 予想Sの状況で, 予想S'は予想WLを導く。

§2. ideal類群, 一般論への示唆

ideal類群は etale cohomology でとらえられる。普通の意味での岩澤主予想を§1と同じ型に定式化すると次のようになる.
KをCM体とする。$H^1_{et}(\mathcal{O}_{K_\infty}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cont}}(\mathrm{Gal}(L_\infty/K_\infty), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$
(L_∞はK_∞の最大不分岐, pro-p, abel拡大) に注意すると

<u>予想IMC (岩澤主予想)</u> χを odd character とするとき

$$\mathrm{char}_{\mathcal{O}_\chi[[T]]}\left(H^1_{et}(\mathcal{O}_{K_\infty}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^{\vee\chi}\right) = \left(G_p(\chi^{-1}\omega, T)\right)$$

ここに $G_p(\chi^{-1}\omega, T)$ は p進L関数 $L_p(\chi^{-1}\omega, s)$ に対応する巾級数である。(その存在は Deligne Ribet による. もちろん abel体のときは Kubota Leopoldt の p進L.)

このように岩澤主予想の定式化に§1では $\mathrm{Sel}(K_\infty, E_{p^\infty})$ が

§2では $H^1_{et}(O_{K_\infty}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ が使われた。[BK]では有限次代数体 L に対して $H^1_f(L,-) = H^1_{f\, \mathrm{Spec}\, O_L}(L,-)$ なる cohomology が定義されている。定義には p 進 Hodge 理論が本質的に使われる。$H^1_f(L\ -)$ は整数論的に非常に微妙で重要な対象を表している。
まて

$$H^1_f(L, E_{p^\infty}) = \mathrm{Sel}(L, E_{p^\infty})$$

$$H^1_f(L, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) = H^1_{et}(O_L, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$$

である。そこで

$$H^1_f(K_\infty, \ ) := \varinjlim H^1_f(K_n, \ )$$

という群が岩澤理論の一般化で中心的役割を果たすと考えることができる。(H^1_f は本当は普通のL関数の値を表すのに適しており p 進Lを表すには若干の修正を必要とする。§4でその例を述べる。上のように H^1_f が岩澤理論で大事な群であるということを述べるのに、もう少し cohomology 論的に整理した形で述べることもできるが、ここでは述べない。)

<u>Remark</u> 普通の意味の岩澤理論を表すのに M_∞/K_∞ を K_∞ の p の外で不分岐な最大 pro-p, abel 拡大として $\mathrm{Gal}(M_\infty/K_\infty)$ の $+$ part を使う方法がある。これは k を総実代数体, $r \geqq 2$ を偶数として étale cohomology $H^1_{et}(O_{k_\infty}[\frac{1}{p}], \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(r))$ でとらえられるが、このときも $H^1_f(k_\infty, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(r)) = H^1_{et}(O_{k_\infty}[\frac{1}{p}], \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(r))$ であり H^1_f で書けることがわかる。

§3. modular form

$f=\sum a_n q^n$ を level N, weight k の newform とする。さらに p で good, ordinary reduction, すなわち $p \nmid N$, $p \nmid a_p$ と仮定する。このとき §1 とまったく同じ議論が進められる。V を f に伴う p 進表現とする。すなわち

$$\rho_f : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow GL_2(k) \qquad ([k:\mathbb{Q}_p]<\infty)$$

(ρ_f は pN の外で不分岐, $l \nmid pN$ に対し $\mathrm{Tr}(\rho_f(\mathrm{Frob}_l))=a_l$) に対応する Galois 加群とする。$T$ を $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ - stable lattice として, 有限次代数体 K に対して §2 のように $H^1_f(K_\infty, V/T)$ を考えると

<u>予想 S</u>　$H^1_f(K_\infty, V/T)^\vee$ は torsion Λ 加群

$k>2$ のときは今度は次のようなことがこの予想を support する。K_∞/K のすべての有限次中間体 K_n に対し $H^1_f(K_n, V(2-k))=0$ であれば予想 S が出る。一方, V を weight $\geqq 0$ の motive の p 進表現とすると有限次代数体 L に対し $H^1_f(L,V)=0$ は一般に予想されている。

$K/\mathbb{Q}$ が有限次 abel 拡大のとき p 進 L 関数 $G_p(f,K,T)$ が定義され, 岩澤主予想は次のように定式化される ([K] で証明されている。)

予想 IMC　$\mathrm{char}_\Lambda(H^1_f(K_\infty, V/T)^\vee) = (G_p(f, K, T))$

μ不変量についての注意を一言述べる。μ不変量については§1と同じ予想があるが、一般にμはTのとり方による。たとえば $f=$ Ramanujan's Δ, $p=691$ とすると（もちろん $\rho_{T/p}$ は可約だが）Tとして $0 \to \mathbb{Z}/p \to T/p \to \mathbb{Z}/p(11) \to 0$ なる lattice をとると $\mu=0$, $0 \to \mathbb{Z}/p(11) \to T'/p \to \mathbb{Z}/p \to 0$ なる lattice T' をとると $\mu=1$ である[P1]。（私はTの方が自然な lattice と思う。）

§4. 楕円曲線, §1 以外の場合

枚数が少ないので簡単に書く。Eを有限次代数体K上の楕円曲線, pの上のすべての素点で supersingular reduction とする。このときは $\mathrm{Sel}(K_\infty, E_{p^\infty})^\vee$ はもはや Λ-torsion にはならない。このとき予想Sは次のようになる。

予想S　$\mathrm{rank}_\Lambda \mathrm{Sel}(K_\infty, E_{p^\infty})^\vee = [K:\mathbb{Q}]$

一方p進L関数ももはや岩澤関数にならない。（巾級数では表せない。）このときは Perrin-Riou による理論がある[P2]。

E が multiplicative reduction を持つとき、$\mathrm{Sel}(K_\infty, E_{p^\infty})$ は定式化に適さない。実際、$E/\mathbb{Q}$ を modular な楕円曲線、p で split multiplicative reduction を持つとすると、§1 のような p 進 L 関数 $G_p(E/\mathbb{Q}, T)$ に対して

$$\mathrm{order}_{T=0}\, G_p(E/\mathbb{Q}, T) = 1 + \mathrm{order}_{s=1}\, L(E/\mathbb{Q}, s)$$

と予想される。このずれを持った Λ 加群を構成しなければならない。そのために $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大 k に対して $H^i_g(k, -)$ なる cohomology theory を定義する。$H^1_g(k, E_{p^\infty})$ は [BK] の $H^1_g(k, E_{p^\infty})$ と少しずれる。[BK] では上の群は divisible だが、上の H^1_g は divisible でなく Tate curve $E = \mathbb{G}_m/q^{\mathbb{Z}}$ に対しては $0 \longrightarrow E(k) \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \longrightarrow H^1_g(k, E_{p^\infty}) \longrightarrow \mathbb{Z}_p/\mathrm{ord}_k(q) \longrightarrow 0$ (exact) となる。この H^1_g を p のところの local condition におき、Selmer 群を構成すると、上のずれを吸収したよい Λ 加群ができ、岩澤主予想が定式化できる。

参考文献

[BK] S. Bloch and K. Kato, L-functions and Tamagawa number of Motives, The Grothendieck Festschrift Vol I (1990)

[CP] J. Coates and B. Perrin-Riou, On p-adic L-functions attached to motives over $\mathbb{Q}$, Alg. Number Th. in honor of Iwasawa (1989)

[G] R. Greenberg, Iwasawa theory for p-adic representations, Alg. Number Theory in hornor of Iwasawa (1989)

[K] K. Kato, 保型形式の岩澤理論, this volume

[M] B. Mazur, Rational Points of abelian varieties with values in towers of number fields, Invent math 18 (1972)

[MS] B. Mazur and P. Swinnerton-Dyer, Arithmetic of Weil curves, Invent. math 25 (1974)

[P1] B. Perrin-Riou, Variation de la fonction L p-adique par isogénie, Alg Number Theory in hornor of Iwasawa (1989)

[P2] B. Perrin-Riou, Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques sur un corps local, Invent math 115 (1994)