数理解析研究所講究録
926巻 1995年 149-162

A_ℓ-型 Hecke環のモノドロミー表現と旗多様体の幾何

斉藤正明（北大理）
山田浩嗣（北見工大）

§0 動機付け.

Weyl群の表現として，いわゆるSpringer表現がある。それはLie環の巾零元 f に対して旗多様体の subvariety $\mathcal{B}_f$ が定まり，$\mathcal{B}_f$ の最高次(コ)ホモロジー群を表現空間とするもので，f を変えることにより全ての既約表現が得られる。1方，Slodowy [6] は Grothendieck の同時特異点解消を用いて，特異点の変形理論の立場から $\mathcal{B}_f$ の(コ)ホモロジー群に Weyl群がモノドロミー群として作用することを示した。この2通りの既約表現の構成が符号表現を除いて一致することが，堀田[3]により示されている。

さて，Weyl群の q-変形とみなせる Hecke環の表現が Kazhdan-Lusztig [5], Ginsburg [1] により旗多様体上の同変K-理論を用いて得られている。そこで我々は次のことを問題とする。

問題

Hecke環の様々な表現が特異点の変形理論の立場から（Slodowy による Lie群論的視点の類似として）モノドロミー表現として得られるか？

すでに Givental' [2] は特異点の立場から Hecke環のモノドロミー表現（Burau表現）を得ている。それは単純特異点の普遍変形 $F(x,t)$ に対して，$\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^\ell$ の超曲面 $F(x,t)=0$ の補集合上局所系を考え，その局所系係数のホモロジー群に Hecke環が作用するという理論である。我々の目標は Givental' の idea を用いて Hecke環の全ての既約表現をモノドロミー表現として構成することにあるが，まだまだ分からない。本稿ではこの問題に対する1つの試みを報告する。

§1. 問題の定式化.

まず, 記号の準備をする。$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{C})$ とし,
$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{l+1} \end{pmatrix} \in \mathfrak{g} \right\}$ を $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分環,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha \quad : \text{ルート空間分解}$$

$$(\alpha = \lambda_i - \lambda_j \quad , i \neq j)$$

とする。すると, $\mathfrak{h}$ の元で固有値が重複するところとして, $\alpha = \lambda_i - \lambda_j \in \Delta$ に対して,

$$H_\alpha = \left\{ h = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{l+1} \end{pmatrix} \in \mathfrak{h} \;\middle|\; \lambda_i = \lambda_j \right\}$$

とおく。また W を $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ に関する Weyl 群とする。このとき W は $\mathfrak{h}$ 上 $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{l+1})$ の置換として作用し, 互換 $\sigma_i = (i, i+1)$ が W の生成元となる. すなわち $W = \langle \sigma_1, \ldots, \sigma_l \rangle$. また, G, H を対応する Lie 環の随伴群とする。このとき, H は W-作用で不変であるから, G/H 上 $[g] \longmapsto [g w^{-1}]$ $(w \in W)$ で作用する。この作用により, cohomology 環 $H^*(G/H)$ に W-作用が定まり次が成り立つ:

<u>fact 1</u>

任意の $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して, G/H 上の holomorphic 2-form

$$\omega(\lambda) = \sum_{\alpha \in \Delta_+} (\lambda | \alpha)\, \theta_\alpha \wedge \theta_{-\alpha}$$

を対応させるとき,

$$\mathfrak{h}^* \longrightarrow H^2(G/H), \quad \lambda \longmapsto [\omega(\lambda)]$$

は W-equivariant linear isomorphism である。ただし, θ_α は positive root $\alpha = \lambda_i - \lambda_j$ $(i < j) \in \Delta_+$ に対応する G 上の left invariant 1-form である。

$H^2(G/H) \cong \mathfrak{h}^*$ であるから，Chevalley の定理より次が成り立つ：

<u>fact 2</u>

$\mathbb{C}[H^2(G/H)]^W$ ：多項式環 $\mathbb{C}[H^2(G/H)]$ の W-不変式環

このとき，$\mathbb{C}[H^2(G/H)]^W = \mathbb{C}[J_1, \dots, J_{\ell-1}, J_\ell]$.

ただし，$J_1, \dots, J_{\ell-1}, J_\ell$ は斉次多項式で，$m_j = \deg J_j$ とするとき，

$$m_1 \leq \cdots \leq m_{\ell-1} < m_\ell$$

ととれる。従って，$H^2(G/H)/W \cong \mathbb{C}^\ell$.

さて，$\mathfrak{h}_r^* \underset{def}{=} \mathfrak{h}^* \setminus \bigcup_{\alpha \in \Delta_+} H_\alpha$ （固有値がすべて相異なる元全体）

とおくとき，可換図式

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{h}_r^* \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] \arrow[d, "\pi_W"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathfrak{h}_r^* \times H^2(G/H) \arrow[d, "\pi_W'"] \\
\mathfrak{h}_r^*/W \arrow[r, "\varphi"'] & \mathfrak{h}_r^*/W \times \mathbb{C}^{\ell-1},
\end{tikzcd}$$

$\tilde{\varphi}(\lambda) = (\lambda, [\omega(\lambda)])$

$\pi_W'(\lambda, \xi]$
$= ([\lambda], J_1(\xi), \dots, J_{\ell-1}(\xi))$

を考える。すると，可換図式

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{\pi}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathfrak{h}_r^*/W \times (G/H \times_W H^2(G/H)) \arrow[d, "\tilde{\pi}'"] \\
\mathfrak{h}_r^*/W \arrow[r, "\varphi"'] & \mathfrak{h}_r^*/W \times \mathbb{C}^{\ell-1}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{cases} \tilde{\pi}'([\lambda], [[g], \xi]) = ([\lambda], J_1(\xi), \dots, J_{\ell-1}(\xi)) \\ Z = \varphi^*(\mathfrak{h}_r^*/W \times (G/H \times_W H^2(G/H))) : \text{fibre 積}. \end{cases}$$

より

$$\tilde{\pi} : Z \longrightarrow \mathfrak{h}_r^*/W$$

を得る。

さて，Z 上の関数 $\tilde{J}_\ell([\lambda],[[g],\xi]) = J_\ell(\lambda) - J_\ell(\xi)$ の
0-面の補集合を

$$\mathring{Z} = Z \setminus \tilde{J}_\ell^{-1}(0)$$

とおけば，$\tilde{J}_\ell : \mathring{Z} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ である。$\mathring{Z}$ 上に local system を
次の様に定める：
generic な $g \in \mathbb{C}^*$ に対して，$\mathbb{C}(g)$ を有理関数体とし，$\mathbb{C}^*$ の
基本群の表現

$$\rho_g : \pi_1(\mathbb{C}^*) \cong \mathbb{Z} \longrightarrow Aut(\mathbb{C}(g)),\quad \rho_g(k) = g^k$$

なる $\mathbb{C}^*$ 上に定まる local system を $\mathcal{S}_g$ とおく。このとき
$\mathring{Z}$ 上の local system を

$$\mathcal{L}_g \underset{def}{=} \tilde{J}_\ell^* \mathcal{S}_g$$

で定める。そこで次の問題を考える。

問題

(1) $\lambda_0 \in \mathfrak{h}_r^*$ (generic)．$\mathring{Z}([\lambda_0]) = \tilde{\pi}^{-1}([\lambda_0]) \cap \mathring{Z}$ とおくとき，
$H_3(\mathring{Z}([\lambda_0]), \mathcal{L}_{g,[\lambda_0]})$ の $\mathbb{C}(g)$-module としての構造を
調べよ。ただし，$\mathcal{L}_{g,[\lambda_0]} = \mathcal{L}_g|_{\mathring{Z}([\lambda_0])}$．

(2)

$$\rho : \pi_1(\mathfrak{h}_r^*/W, [\lambda_0]) \rightarrow Aut(H_3(\mathring{Z}([\lambda_0]), \mathcal{L}_{g,[\lambda_0]}))$$

monodromy 表現をもとめよ。

(注) 3次の homology 群（これは $H^2(G/H)$ を考えていることに対応している）
以外にも考えられるが，まだ現段階では特殊な例以外
良く解かっていない。

§2. $\mathbb{C}(\mathfrak{g})$-module $H_3(\mathring{Z}([\lambda_0]), \mathcal{L}_{\mathfrak{g},[\lambda_0]})$ の構造

まず $\tilde{\pi} : \mathring{Z} \longrightarrow \mathfrak{h}_r^*/W$ の fibre を調べる。

$\lambda_0 \in \mathfrak{h}_r^*$ に対して,

$$\mathring{Z}([\lambda_0]) = \{[\lambda_0]\} \times \left\{ [[g], \xi] \in G/H \times_W H^2(G/H) \;\middle|\; \begin{array}{l} J_i(\xi) = J_i(\lambda_0) \\ \quad i = 1, \dots, l-1, \\ J_l(\xi) \neq J_l(\lambda_0) \end{array} \right\}$$

$$\subset \{[\lambda_0]\} \times G/H \times_W H^2(G/H)$$

であるから, $\mathring{Z}([\lambda_0]) \subset G/H \times_W H^2(G/H)$ と思えば,

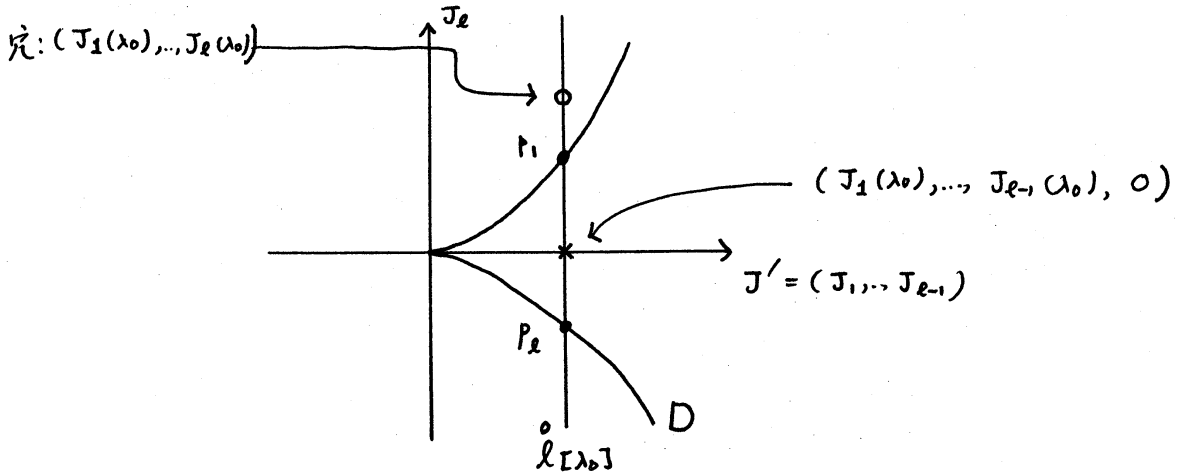
$$\begin{array}{ccc} \mathring{Z}([\lambda_0]) & \subset & G/H \times_W H^2(G/H) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathring{l}_{[\lambda_0]} & \subset & H^2(G/H)/W. \end{array}$$

さて, $\pi_W : H^2(G/H) \cong \mathfrak{h}^* \longrightarrow H^2(G/H)/W = \mathfrak{h}^*/W$ は ramified W-Galois covering であり, ramification locus を R とすれば, $R = \bigcup_{\alpha \in \Delta_+} H_\alpha$ である。写像 π_W の discriminant を $D = \pi_W(R)$ とおき, 以下 $\lambda_0 \in \mathfrak{h}_r^*$ に次の仮定をおく:

仮定

$\mathring{l}_{[\lambda_0]}$ と D の交わりは相異なる l 点, i.e.,

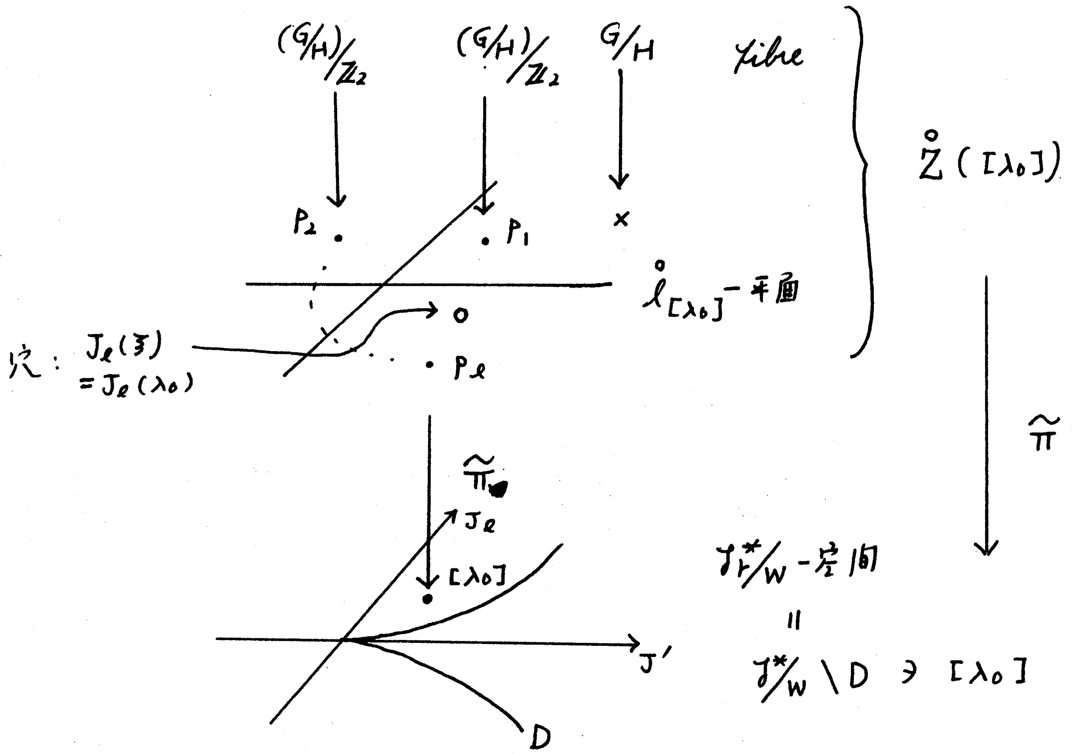
$$\mathring{l}_{[\lambda_0]} \cap D = \{p_1, \dots, p_l\}.$$



この仮定のもとで、各 $p_i \in \mathring{l}_{[\lambda_0]} \cap D$ の fibre $\pi_W^{-1}(p_i) \subset R$ の各点 $\tilde{p}_i$ における分岐位数は2である [redacted] から、$\tilde{p}_i$ の等方群は $\mathbb{Z}_2$ に同型とする。従って、

$$\tilde{\pi} : \mathring{Z} \longrightarrow \mathfrak{t}_r^*/W = \mathfrak{t}^*/W \setminus D$$

の概念図は次の様にする:



次に $H_3(\mathring{Z}([\lambda_0]), \mathcal{L}_{g,[\lambda_0]})$ の構造を調べたいのであるが、少し準備をする。$G/H \underset{C^\infty}{\cong} T^*(G/B) \cong G \times_B \mathfrak{n}$ なる同一視をする。ただし、$\mathfrak{b} = \mathfrak{t} \oplus \sum_{\alpha \in \Delta_+} \mathfrak{g}_\alpha$: Borel 部分環、$\mathfrak{n} = [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]$ 巾零 Lie 部分環、B は $\mathfrak{b}$ に対応する Borel 部分群である。

このとき、$J_G : T^*(G/B) \cong G \times_B \mathfrak{n} \to \mathfrak{g}^* \cong \mathfrak{g}$ を

$$J_G([g, n]) = Ad(g)n$$

で定める。

今，我々は3次のホモロジーを考えている（$H^2(G/H)$ を考えたことに対応）ので，

$$f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}$$

：subregular 巾零元

$\left(\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \; Z_{\mathfrak{g}}(f) = \{ x \in \mathfrak{g} \mid [x, f] = 0 \} \text{ に対して，} \dim . Z_{\mathfrak{g}}(f) = \ell + 2 \right)$

に対して，

$$\widetilde{\mathcal{B}}_f = J_G^{-1}(f) \subset T^*(G/B) \cong G \times_B \mathfrak{n} \cong G/H$$

$$= \{ [g, n] \in G \times_B \mathfrak{n} \mid Ad(g) n = f \}.$$

を考える．さて，この $\widetilde{\mathcal{B}}_f$ であるが，flag manifold G/B の subvariety

$$\mathcal{B}_f = \{ [g] \in G/B \mid Ad(g)^{-1} f \in \mathfrak{n} \} \subset G/B$$

と同一視されることに注意する．この $\mathcal{B}_f$ の構造は良く解かっていて次のようである：

<u>fact 3</u> [7]

$P_i = B \cup B \sigma_i B$: parabolic subgroup $(i = 1, \dots, \ell)$

とおくと，

$$\mathcal{B}_f = P_1/B \cup \sigma_1 P_2/B \cup \dots \cup \sigma_1 \cdots \sigma_{\ell-1} P_\ell/B.$$

従って，$\mathcal{B}_f$ の irreducible components は ℓ-個あり，各々 $P^1(\mathbb{C})$ に同型である。

従って，$\widetilde{\mathcal{B}}_f$ の irreducible components も ℓ-個あり，

$$\begin{cases} I(\widetilde{\mathcal{B}}_f) = \{ \widetilde{C}_1, \dots, \widetilde{C}_\ell \}, & (\widetilde{C}_i \text{ は } \sigma_1 \cdots \sigma_{i-1} P_i/B \text{ に対応}) \\ \widetilde{C}_i \cong S^2 & (i = 1, \dots, \ell) \end{cases}$$

である。

以上の準備の下で, $H_3(\mathring{Z}([\lambda_0]), \mathcal{L}_{g,[\lambda_0]})$ の構造を調べる。

$$\begin{cases} \mathring{\tilde{Z}}([\lambda_0]) = \left\{ ([g], \xi) \in G/H \times H^2(G/H) \;\middle|\; \begin{array}{l} J_i(\xi) = J_i(\lambda_0),\ i=1,\dots,l-1 \\ J_l(\xi) \neq J_l(\lambda_0) \end{array} \right\} \\ \mathring{\tilde{l}}_{[\lambda_0]} = \left\{ \xi \in H^2(G/H) \;\middle|\; \begin{array}{ll} J_i(\xi) = J_i(\lambda_0) & i=1,\dots,l-1 \\ J_l(\xi) \neq J_l(\lambda_0) \end{array} \right\} \end{cases}$$

とおけば,

$$\begin{tikzcd}
G/H \times H^2(G/H) \arrow[rrr, "\tilde{\pi}_W"] \arrow[ddd] & & & G/H \times_W H^2(G/H) \arrow[ddd] \\
& \mathring{\tilde{Z}}([\lambda_0]) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ul, hook] & \mathring{Z}([\lambda_0]) \arrow[d] \arrow[ur, hook] & \\
& \mathring{\tilde{l}}_{[\lambda_0]} \arrow[r] \arrow[dl, hook] & \mathring{l}_{[\lambda_0]} \arrow[dr, hook] & \\
H^2(G/H) \arrow[rrr, "\pi_W"'] & & & H^2(G/H)/W
\end{tikzcd}$$

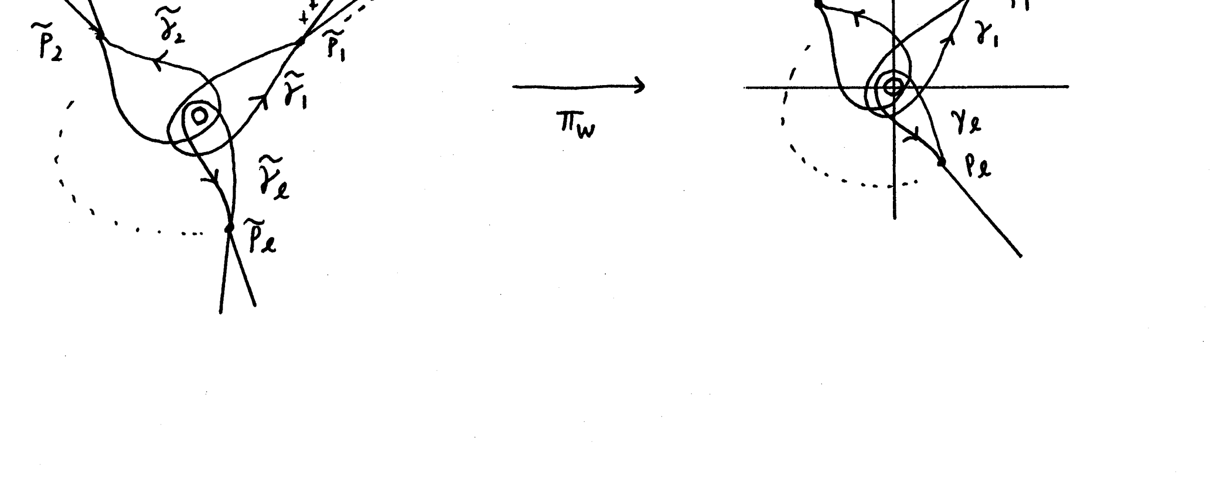
なる可換図式を得る。ここで,

$\pi_W : \mathring{\tilde{l}}_{[\lambda_0]} \longrightarrow \mathring{l}_{[\lambda_0]}$: ramified W-Galois covering

であるから, 1つの閉基本領域から1点をのぞいた領域 $\mathring{F}_{[\lambda_0]}$ を

$$\begin{cases} \tilde{p}_i = \mathring{F}_{[\lambda_0]} \cap H_{\alpha_i} \quad i=1,\dots,l \quad : \text{ramification point} \\ \pi_W(\tilde{p}_i) = p_i \end{cases}$$

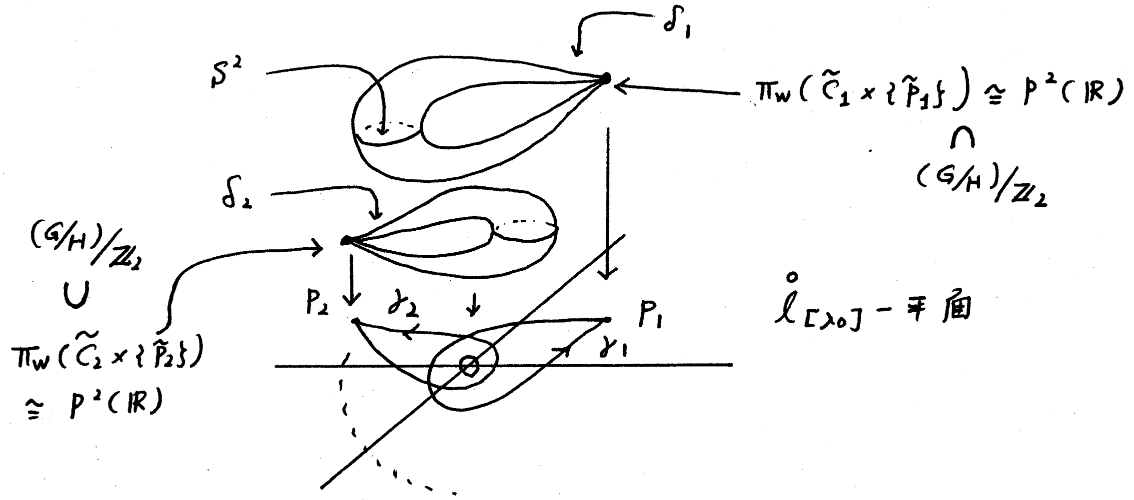
となる様にとり, $\mathring{F}_{[\lambda_0]}$, $\mathring{l}_{[\lambda_0]}$ の loops を次の図の様にとる.



そこで、

$$\left\{\begin{array}{l}\tilde{\delta}_i = \tilde{C}_i \times \tilde{\gamma}_i \subset \mathring{\tilde{Z}}([\lambda_0]) \\ \delta_i = \tilde{\pi}_W(\tilde{\delta}_i) \subset \mathring{Z}([\lambda_0])\end{array}\right. \qquad (i=1,\dots,l)$$

とおけば δ_i $(i=1,\dots,l)$ は次の絵の様になる.



このとき、次の命題が成り立つ。

Proposition (Givental' [2] Proposition)

$q \in \mathbb{C}^*$: generic に対して,

$$H_3(\mathring{Z}([\lambda_0]), \mathcal{L}_{q,[\lambda_0]}) = \bigoplus_{j=1}^{l} \mathbb{C}(q)[\delta_j]$$

が成り立つ。

§3 monodromy 表現.

以下, 具体例 $\mathfrak{g} = sl(3,\mathbb{C})$ を通じて感じをつかんでもらうことにする.

まず次の重要な事実が成り立つ。次のことは一般の $\mathfrak{g}$, 一般の nilpotent element f に対して調べられていることを注意しておく。

我々が今必要するのは A_2-型の場合なので，この場合についてのみ述べることにする。これは[4]，[6]の特殊な場合である。

<u>*fact 4*</u>

(1) $H_2(\widetilde{\mathbb{B}}_f) = \mathbb{C}[\widetilde{C}_1] \oplus \mathbb{C}[\widetilde{C}_2]$ は W-module の構造をもち，W の生成元 σ_1, σ_2 に対して次が成り立つ:

$$\begin{cases} \sigma_1([\widetilde{C}_1]) = -[\widetilde{C}_1] \\ \sigma_1([\widetilde{C}_2]) = [\widetilde{C}_2] + [\widetilde{C}_1] \end{cases}$$

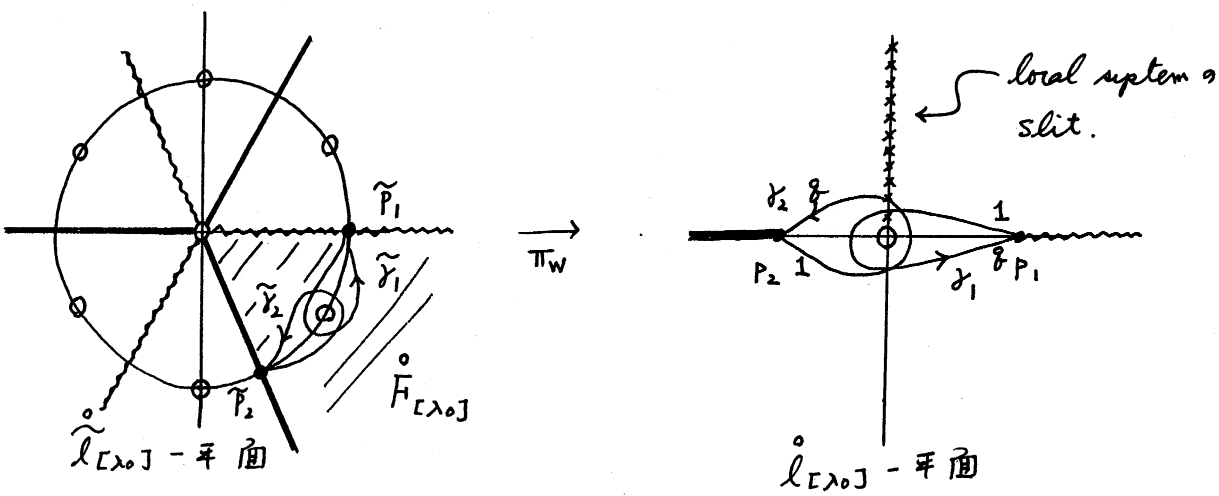
$$\begin{cases} \sigma_2([\widetilde{C}_1]) = [\widetilde{C}_1] + [\widetilde{C}_2] \\ \sigma_2([\widetilde{C}_2]) = -[\widetilde{C}_2]. \end{cases}$$

(2) $i : \widetilde{\mathbb{B}}_f \hookrightarrow G/H$: inclusion より induce される

$$i_* : H_2(\widetilde{\mathbb{B}}_f) \longrightarrow H_2(G/H)$$

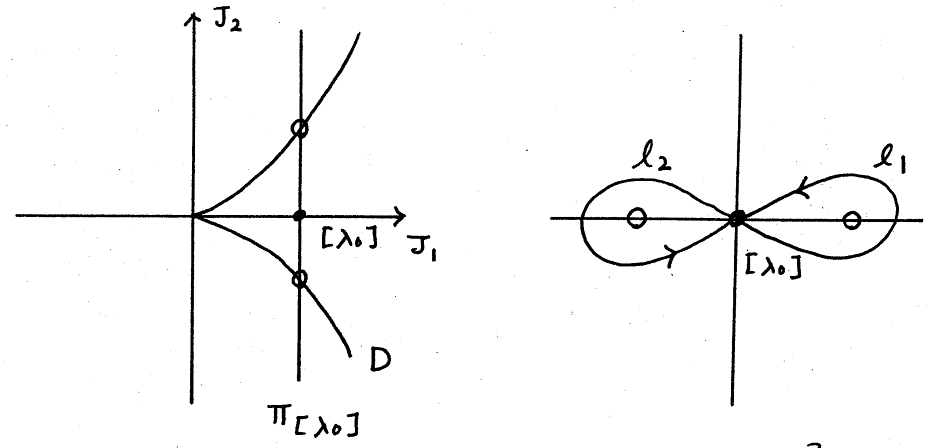
は W-equivariant linear isomorphism である。

さて，A_2-型の場合 $\mathring{\widetilde{\ell}}_{[\lambda_0]}$，$\mathring{\ell}_{[\lambda_0]}$ は次の様になっている。



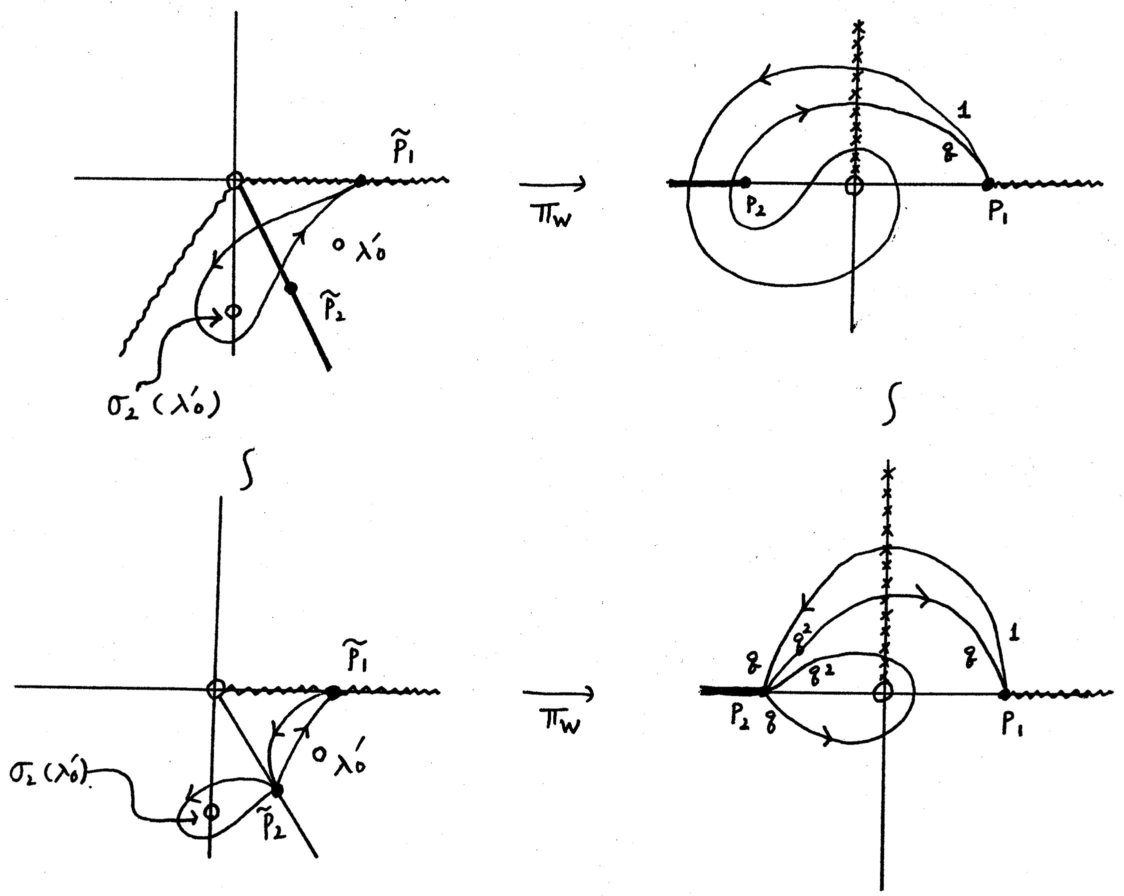
ここで loops γ_1, γ_2 に書いてある 1, ξ は local system の local cross-section の点 P_1, P_2 を始点，終点とみたときの値である。

また, parameter 空間 $\mathcal{J}_r^*/W = \mathcal{J}^*/W \setminus D$ において $[\lambda_0]$ が次の図の様に loops l_1, l_2 に沿って移動したとする。

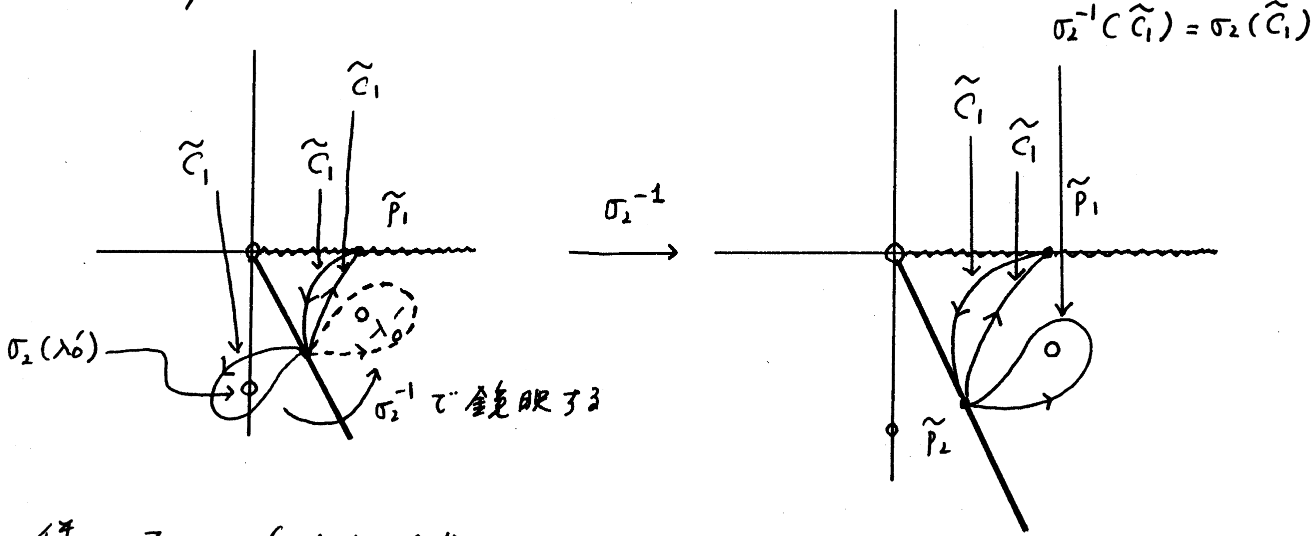


$\mathcal{J}^*/W \setminus D$-空間　　　　$\pi_{[\lambda_0]}$-平面.

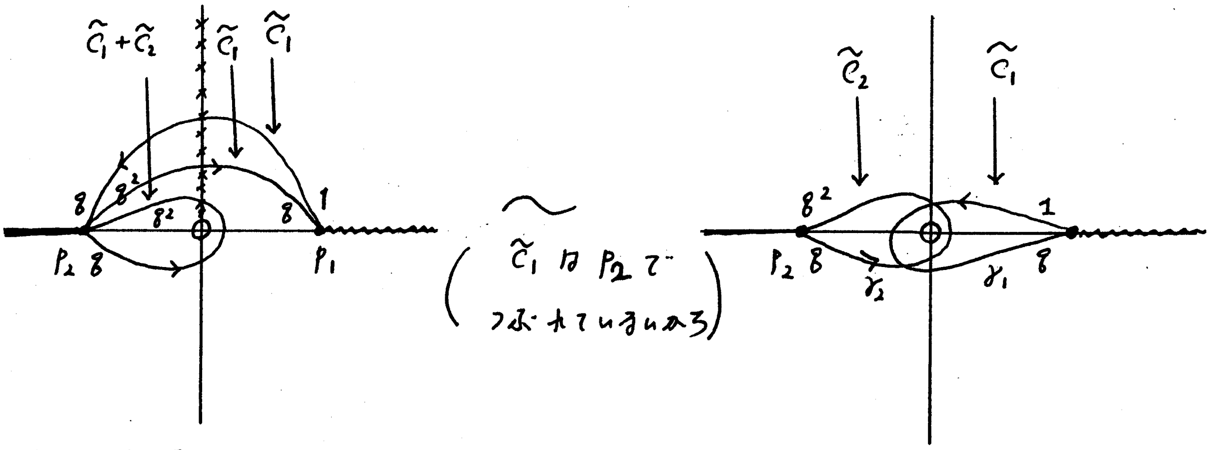
以上の準備の下で, monodromy が計算できる。ここでは $[\lambda_0]$ が l_2 に沿って移動したときの $[\tilde{\delta}_1]$ への作用を計算する。このときの $\overset{\circ}{\tilde{l}}_{[\lambda_0]}$, $\overset{\circ}{l}_{[\lambda_0]}$ における loops γ_1 の変化は次の様:



次に loop $\tilde{\gamma}_1$ に沿っていた $\tilde{C}_1$ の変化をみる。



従って, fact 4 より



すなわち,

$$\rho : \pi_1(\pi_{[\lambda_0]}, [\lambda_0]) \longrightarrow \mathrm{Aut}(H_3(\mathring{Z}([\lambda_0]), \mathcal{L}_{g,[\lambda_0]}))$$

$$\rho(\ell_2)([\delta_1]) = [\delta_1] + g[\delta_2]$$

まったく同様にして,

$$\begin{cases} \rho(\ell_1)([\delta_1]) = -g[\delta_1] \\ \rho(\ell_1)([\delta_2]) = [\delta_2] + [\delta_1] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho(\ell_2)([\delta_1]) = [\delta_1] + g[\delta_2] \\ \rho(\ell_2)([\delta_2]) = -g[\delta_2] \end{cases}$$

を得る。

ここで、$\pi_1(\Pi_{[\lambda_0]}, [\lambda_0]) \longrightarrow \pi_1(\mathfrak{h}_r^*/W, [\lambda_0])$ は全射であるが、
ρ の表現行列が、Braid群の関係式を満たすことがわかる。
従って、

$$\rho : \pi_1(\mathfrak{h}_r^*/W, [\lambda_0]) \longrightarrow Aut\left(H_3(\mathring{Z}([\lambda_0]), \mathcal{L}_{q,[\lambda_0]})\right)$$

$$\rho(l_1) = \begin{pmatrix} -q & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad \rho(l_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q & -q \end{pmatrix}$$

が得られ、これは A_2-型 Braid群の Burau表現に一致している。
この事実は A_ℓ-型一般に成り立ち次の定理を得る。

Theorem (Givental' [2] Theorem 1)

$q \in \mathbb{C}^*$: generic

このとき、

$$\rho : \pi_1(\mathfrak{h}_r^*/W, [\lambda_0]) \longrightarrow Aut\left(H_3(\mathring{Z}([\lambda_0]), \mathcal{L}_{q,[\lambda_0]})\right)$$

は Braid群 $\pi_1(\mathfrak{h}_r^*/W, [\lambda_0])$ の Burau表現に一致する。
従って、$R = \mathbb{C}(q)[\pi_1(\mathfrak{h}_r^*/W, [\lambda_0])]$: Braid群の群環,

H_ℓ : A_ℓ-型 Hecke環 とするとき、

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\rho"] \arrow[d] & End\left(H_3(\mathring{Z}([\lambda_0]), \mathcal{L}_{q,[\lambda_0]})\right) \\ H_\ell \arrow[ur, "\bar{\rho}"'] & \end{tikzcd}$$

と Hecke環の表現に factor する。

これ以外の Hecke環の表現も $H^2(G/H)$ を変えることにより ほんの少し
得られるが、まだまだ目標には程遠い。

Reference

[1] Ginsburg V. "Lagrangian Construction for representations of Hecke algebras" Adv. in Math. 63 (1987)

[2] Givental' A. B. "Twisted Picard-Lefschetz Formulas" Funct. Analy. and its Appl. 22 (1988)

[3] Hotta R. "On Springer's representations" J. Fac. Sci. Uni. of Tokyo IA 28 (1982)

[4] Hotta R. "On Joseph's Construction of Weyl Group Representations" Tōhoku Math. J. 36 (1984)

[5] Lusztig G. "Equivariant K-theory and Representation of Hecke algebras" Proc. Am. Math. Soc. 94 (1985)

[6] Slodowy P. "Four lectures on simple groups and singularities" Comm. of Math. Inst. Rijks. Uni. Utrecht 11 (1980)

[7] Steinberg R. "Conjugacy Classes in Algebraic Groups" Lecture Notes in Math. 366 (1974)