

連続力学系のコネクティングオービットの 精度保証付き数値解析法

大石 進一

Shin'ichi Oishi

早稲田大学理工学部

〒169 東京都新宿区大久保3-4-1
電子メール oishi@oishi.info.waseda.ac.jp

1 はじめに

本文では次のパラメタを含む非線形力学系を考える：

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \lambda), \quad x(t) \in R^n, \quad \lambda \in R^p \quad (1)$$

ただし、 $f(x, \lambda)$ は n -次元ベクトル値連続関数とする。(1) の $\lambda = \lambda^*$ における解 $x(t)^*$, $-\infty < t < \infty$ で極限

$$x_- = \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t), \quad x_+ = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \quad (2)$$

が存在するものは平衡点 x_- , x_+ 間のコネクティングオービットと呼ばれる。コネクティングオービットは $x_- = x_+$ のときはホモクリニックオービット, $x_- \neq x_+$ のときはヘテロクリニックオービットとなる。コネクティングオービットは力学系の大域的な性質を決定する上で重要な役割をはたすため、その数値計算法は1990年代になって活発に提案されるようになってきた。[1],[2] また、それらの数値計算法の安定性、収束性の証明も示されている。ここでは、コネクティングオービットの数値的存在検証法を、精度保証付き数値計算を基に、与えることを目的とする。数値解析的には近似解が求められた後に、その解の誤差を評価する事後誤差評価法を与える。

この数値的存在検証法は従来のコネクティングオービットの数値計算法を補完するもので、コネクティングオービットの近似とそれが発生する固有値(これをコネクティングオービット対と呼ぶ)の近似 $c = (x(t)_a, \lambda_a)$ が与えられたとき、 c の近くに(1)の真のコネクティングオービット対が存在するための十分条件の成立を精度保証付き数値計算により検証するものである。存在検証に成功したときには、同時に、 c と真のコネクティングオービット対との間のシャープな誤差評価も与えられる。

本報告では実際に行った数値的な検証例についても述べる。この例は、 $n = 2$ でホモクリニック分岐点の計算例となっている。本手法によりホモクリニック分岐の存在と、その分岐を起こすパラメータ値が小数点以下8桁に渡って数学的に厳密に確定された。

2 多点境界値問題としての定式化

本節では、コネクティングオービット対を求める問題が多点境界値問題に帰着することを見る。

$x_- = x_-(\lambda)$, $x_+ = x_+(\lambda)$ を双曲型平衡点とし、それぞれ局所安定多様体 $W^s(x_-)$, $W^s(x_+)$ と局所不安定多様体 $W^u(x_-)$, $W^u(x_+)$ をもつとする。これらの多様体の次元は考えている λ の範囲で一定で、それぞれ n_-^s , n_+^s と $n_-^u = n - n_-^s$, $n_+^u = n - n_+^s$ とするとき $n+1 = n_-^u + n_+^s + p$ が成立しているものとする。

$-\infty < T_- < T_+ < \infty$ として $J = [T_-, T_+]$ とする。局所不安定多様体 $W^u(x_-)$ と局所安定多様体 $W^s(x_+)$ がそれぞれ方程式

$$B_-(x(T_-), \lambda) = 0, \quad B_- : R^n \times R^p \rightarrow R^{n-n_-^s} \quad (3)$$

及び

$$B_+(x(T_+), \lambda) = 0, B_+ : R^n \times R^p \rightarrow R^{n-n_+} \quad (4)$$

で記述されるとする. すると x_- から出て, x_+ に入るコネクティングオービットは次の有限時間区間の境界値問題

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \lambda), \frac{d\lambda}{dt} = 0, \quad (5)$$

$$B_-(x(T_-), \lambda) = 0, B_+(x(T_+), \lambda) = 0, \Psi(x, \lambda) = 0 \quad (6)$$

の解となる. ただし, $\Psi : C^1(J, V) \times R^p \rightarrow R$ は位相条件である. これは, (1) の解の位相シフトはまた (1) の解となることの不定性を除くためである. 位相条件の例として

$$\Psi(x, \lambda) = \dot{x}_a(0)^T [x(0) - x_a(0)] \quad (7)$$

などが知られている. 時間を適当に規格化し, $J = [-1, 1]$ とする.

3 局所不変多様体の記述

局所不安定多様体 $W^u(x_-)$ と局所安定多様体 $W^s(x_+)$ を記述する方程式を具体的に書き下そう. ここでは, Perron の積分方程式を用いる方法による. 今, $x_c(\lambda)$ を $f(x_c(\lambda), \lambda) = 0$ を満たす双曲型平衡点の族としよう. $x_c(\lambda)$ は λ の連続関数とする. 座標変換 $u = x - x_c(\lambda)$ により平衡点の位置を原点に移動する. このとき $A(\lambda) = f_x(x_c(\lambda), \lambda)$ と置く. すると, (1) は

$$\frac{du}{dt} = A(\lambda)u + s(u, \lambda) \quad (8)$$

と書き直される. ただし,

$$s(u, \lambda) = f(u + x_c(\lambda), \lambda) - f(x_c(\lambda), \lambda) \quad (9)$$

である. 今, 考えている λ の領域で $A(\lambda)$ の固有値のうち k 個の実部が負で, 残りの $n - k$ 個は正であるとする. 正則行列 $P(\lambda)$ を適当に選べば

$$P(\lambda)A(\lambda)P(\lambda)^{-1} = B(\lambda) = \begin{pmatrix} B_1(\lambda) & 0 \\ 0 & B_2(\lambda) \end{pmatrix} \quad (10)$$

となる. $B_1(\lambda)$ は k 次の行列で, その固有値の実部はすべて負で, $B_2(\lambda)$ は $n - k$ 次の行列で, その固有値の実部はすべて正である. この $P(\lambda)$ を用いて $v = P(\lambda)u$ とする. このとき (8) は

$$\frac{dv}{dt} = B(\lambda)v + S(v, \lambda) \quad (11)$$

となる. ただし,

$$S(v, \lambda) = P(\lambda)s(P(\lambda)^{-1}v, \lambda). \quad (12)$$

$$U_1(t, \lambda) = \begin{pmatrix} e^{tB_1(\lambda)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, U_2(t, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{tB_2(\lambda)} \end{pmatrix} \quad (13)$$

と置くと, 明らかに

$$e^{tB(\lambda)} = U_1(t, \lambda) + U_2(t, \lambda) \frac{dU_i(\lambda)}{dt} = B(\lambda)U_i(\lambda), i = 1, 2 \quad (14)$$

となる.

ここで, $t = T$ での (11) の解の値を $v_T = v(T)$, $v_T = (v_{T1}, v_{T2}, \dots, v_{Tn})^T$, とするとき

$$v_T^1 = (v_{T1}, v_{T2}, \dots, v_{Tk}, 0, 0, \dots, 0)^T \in R^n, \quad (15)$$

$$v_T^2 = (0, 0, \dots, 0, v_{Tk+1}, v_{Tk+2}, \dots, v_{Tn})^T \in R^n, \quad (16)$$

とする。このとき、次の積分方程式を考える：

$$\begin{aligned} \theta(t, \lambda, v_T^1) &= U_1(t-T, \lambda)v_T^1 + \int_{T_+}^t U_1(t-s, \lambda)S(\theta(s, \lambda, v_T^1))ds \\ &\quad - \int_t^\infty U_2(t-s, \lambda)S(\theta(s, \lambda, v_T^1))ds. \end{aligned} \quad (17)$$

この積分方程式の解は適当な条件の下で $|v_T^1|$ が十分小さければ存在して一意であることが容易に示せる。そこで、

$$\psi_+(v_T^1, \lambda) = - \int_{T_+}^\infty U_2(T-s, \lambda)S(\theta(s, \lambda, v_T^1))ds \quad (18)$$

とすると、この積分は $|v_T^1|$ が十分小さければ存在することが示される。 ψ_+ は S の滑らかさと同じ滑らかさをもつことが示される。 $x_c(\lambda)$ における局所安定多様体の定義式は

$$B_+(x(T_+), \lambda) = v_T^2 - \psi_+(v_T^1, \lambda) = 0 \quad (19)$$

となる。

一方、 $x_c(\lambda)$ における局所不安定多様体の定義式は $t' = -t$ と時間反転させれば局所安定多様体の定義式に一致するので同様である。

4 数値的検証法

以上の議論により得られた非線形上微分方程式の境界値問題は著者による精度保証付き数値計算に基づく解の数値的存在検証法によって解きうる形となっている。そこで詳細は Oishi[5] を参照していただくことにして検証法の要点のみ記すことにする。

$Y = C[-1, 1]$ で区間 $J = [-1, 1]$ 上の連続な実 n -次元ベクトル値関数 $y(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_n(t))$ の作るバナッハ空間を表す。ノルムは scaled maximum norm

$$\|y\|_u = \sup_{t \in I} |y(t)|_u, \quad (20)$$

で与える。ただし、 $m = n + p$ として

$$|y(t)|_u = \max_{1 \leq i \leq m} \frac{|y_i(t)|}{u_i}. \quad (21)$$

ここで、 $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ は定 m -次元ベクトルで正の成分を持つものとする： $u_i > 0$ for $i = 1, 2, \dots, m$.

以下、近似コネクティングオービット対 $c = (x_a, \lambda_a)$ は Y の要素と仮定する。ここで、作用素 $F : C^1[-1, 1] \rightarrow Y$ を次のように定義する：

$$Fy = \left(\frac{dy}{dt} - e(y), g(y) \right). \quad (22)$$

ただし、

$$e(y) = \begin{pmatrix} f(x, \lambda) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (23)$$

及び

$$g(y) = \begin{cases} B_-(x(T_-), \lambda) \\ B_+(x(T_+), \lambda) \\ \Psi(x, \lambda) \end{cases} \quad (24)$$

である。すると、元の境界値問題は作用素方程式 $Fy = 0$ と書きかえられる：以下、 $e : D \rightarrow Y$ と $g : D \rightarrow R^m$ は連続 Fréchet 微分可能とする。 $e_y(c)$ と $D_y g(c)$ を近似する区間 J 上で連続な実 $m \times m$ 行列値関数 $A(t)$ とベクトル値線形汎関数 l に対して次の線形作用素を定義する：

$$Lh = \left(\frac{dh}{dt} - A(t)h, lh \right) \text{ for } h \in D. \quad (25)$$

ここで、 L^{-1} が存在するとして(その条件については Urabe[3] 参照)、ニュートンの作用素 $k: X \rightarrow X$

$$k(y) = L^{-1}(L - F)x = L^{-1}(e(y) - A(t)y, l(y) - g(y)). \quad (26)$$

を導入する。 $y^* \in Y$ が k の不動点となると、それは自動的に D の要素となって $Fy^* = 0$ を満たす。以下では G が正則という仮定の下で、式(6)と同値なバナッハ空間 Y 上の不動点問題 $k(y) = y$ を考えていく。

作用素 k が近似解 c を含む閉集合上に不動点を持つことを計算機で検証するために無限次元 Krawczyk 作用素を導入する。そのため、簡単に区間関数の理論を概観する。区間 J 上の区間関数 $Y(t)$ は

$$Y(t) = [\underline{y}(t), \bar{y}(t)]. \quad (27)$$

と定義される。実関数 $\underline{y}(t)$ と $\bar{y}(t)$ は端点関数と呼ばれる。本稿では端点関数は $C[-1, 1]$ の要素とする。また、区間関数 $Y(t)$ を $y \in C[-1, 1]$ で $\underline{y}(t) \leq y(t) \leq \bar{y}(t)$ を満たすものの全体と考える。ここで区間関数の積分を次のように定義する:

$$\int_{-1}^t Y(s)ds = \left[\int_{-1}^t \underline{y}(s)ds, \int_{-1}^t \bar{y}(s)ds \right]. \quad (28)$$

ただし、積分は Riemann 積分とする。

ベクトル値区間関数、行列値区間関数はその成分が区間関数となるものとして定義される。 $Y(t)$ がベクトル値または行列値区間関数とすると $|Y(t)|$ は要素として $|Y_i(T)|$ または $|Y_{ij}(t)|$ をもつベクトル値または行列値区間関数とする。ただし、 a と b を実数として、区間 $[a, b]$ に対して、 $||[a, b]||$ は次のように定義される:

$$|[a, b]| = \max(|a|, |b|). \quad (29)$$

また、Mid 関数は次のように定義される

$$\text{Mid}(Y(t)) = \frac{\bar{y}(t) + \underline{y}(t)}{2}. \quad (30)$$

ここで $T(t)$ を $\text{Mid}(T(t)) = c(t)$ となる区間関数とする。次の、Krawczyk 作用素を定義する:

$$K(T) = k(c) + M(T - c), \quad (31)$$

ただし、

$$\begin{aligned} M(T(t) - c) &= L^{-1}(L - DF(T))(T - c) \\ &= \Phi(t) \int_{-1}^t \Phi^{-1}(s)R(s)(T(s) - c(s))ds \\ &\quad - \Phi(t)G^{-1}l[\Phi(t) \int_{-1}^t \Phi^{-1}(s)R(s)(T(s) - c(s))ds] \\ &\quad + \Phi(t)G^{-1}(l - Dg(T(t)))(T(t) - c(t)) \\ &= [-1, 1]|\Phi(t)| \int_{-1}^t |\Phi^{-1}(s)||R(s)||T(s) - c(s)|ds \\ &\quad - \Phi(t)G^{-1}l[[-1, 1]|\Phi(t)| \int_{-1}^t |\Phi^{-1}(s)||R(s)||T(s) - c(s)|ds] \\ &\quad + \Phi(t)G^{-1}(l - Dg(T))(T(t) - c(t)), \end{aligned} \quad (32)$$

である。ここで、

$$R(t) = De(T) - A(t) \text{ 及び } c = \text{Mid}(T). \quad (33)$$

このとき、次の定理が成立する:

定理 $T(t)$ を区間関数で $\text{Mid}(T(t)) = c(t)$ を満たすものとする。もし、

$$K(T(t)) - c(t) \subset T(t) - c(t) \quad (34)$$

及び

$$\|M\|_u < 1, \quad (35)$$

が成立すると k の不動点 y^* が唯一つ $T(t) \subset y$ に存在する。この y^* は D に属し $Fy^* = 0$ を満たす。更に、この解は孤立解, i.e., $DF(y^*)$ は可逆である。□

5 検証例

本節では、例として次の非線形常微分方程式を考える：

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x - x^2 + \lambda y + 0.5xy \quad (36)$$

平衡点は $(0,0)$ と $(1,0)$ にある。この方程式においては $\lambda = -0.5$ でスーパークリティカル Hopf 分岐が $(1,0)$ で発生する。この値よりパラメータ λ を増加させると、発生した周期解が λ のある値 λ_c でサドル $(0,0)$ のホモクリニック軌道になり、それより大きな λ の値でホモクリニック軌道も周期軌道も消滅するというホモクリニック分岐が起こる。ここではホモクリニック分岐点 λ_c とホモクリニック軌道の数値的存在検証を行い、その値を包みこむことにする。

$T_+ = -T_- = 10$ とし、近似解は射影線形化境界条件 [1],[2] の下で Chebyshev 多項式を用いる Urabe の方法 [4] を用いて求めた。近似解は x について 90 次の Chebyshev 多項式で計算した。この結果 λ_c の近似値として

$$\lambda_c = -\frac{969926592}{2258238379} = -0.429505848904\dots \quad (37)$$

を得た。また、ホモクリニック軌道の近似として図のような軌道を得た。この値及びホモクリニック軌道の精度保証を前節の方法で行った所、ホモクリニック分岐点の存在が証明でき、上式で与えられたホモクリニック分岐点の誤差が高々 0.0000000022 で与えられることが示された。したがって、ホモクリニック分岐点の値は

$$\lambda_c \in [-0.429505852, -0.429505846] \quad (38)$$

と包み込まれた。

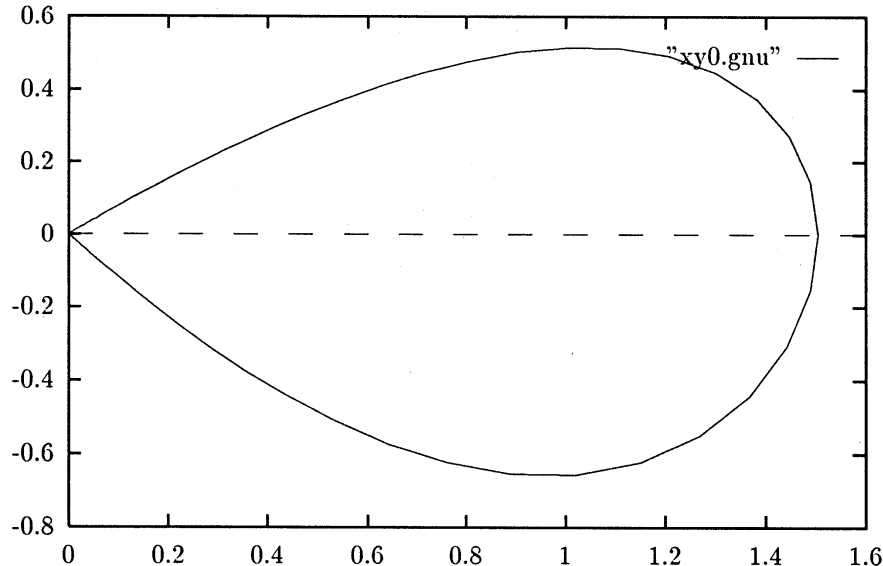


図 1: ホモクリニック軌道

参考文献

- [1] W.J.Beyn: "The Numerical Computation of Connecting Orbits in Dynamical Systems", IMA Journal of Numerical Analysis, 9, pp.379-405 (1990).
- [2] M.J.Friedman and E.J.Doedel: "Numerical Computation of Invariant Manifolds Connecting Fixed Points", SIAM J. Numerical Anal., 28, pp.780-808 (1991).

- [3] M.Urabe:“An Existence Theorem for Multi-Point Boundary Value Problems”, *Funkcialaj Ekvacioj*, 9 (1966), pp.43-60.
- [4] M.Urabe:“Numerical Solution of Multi-Point Boundary Value Problems in Chebyshev Series –Theory of the Method–”, *Numerische Mathematik*, 9 (1967), pp.341-366.
- [5] S.Oishi:“Two Topics in Nonlinear System Analysis through Fixed Point Theorems”, *IEICE Trans. Fundamentals*, **E77-A**, pp.1144-1153 (1994).