数理解析研究所講究録
929 巻 1995 年 1-18

実代数群の標準表現の associated variety と巾零軌道の誘導

東京電機大学 工学部 太田琢也 (Takuya Ohta)

Abstract

Lusztig、Spaltenstein は簡約代数群における巾単軌道の誘導を定義した ([LS]) 。このアナログとして、複素簡約代数群の Lie 環の巾零軌道の誘導が定義される。複素簡約代数群においては、表現の誘導と巾零軌道の誘導が、associated variety をとるという操作を通じて compatible になっていることが知られている (c.f., [BV]) 。一方、実代数群の標準表現 (c.f.,[V1]) の associated variety が２つの場合に知られている。１つは、群が quasisplit で標準表現が large となる場合 (Adams-Vogan [AV]) であり、いま１つは、標準表現が discrete series となる場合 (山下 [Y]) である。実簡約代数群において、表現の誘導と巾零軌道の誘導の間に compatibility が成り立つようにするには、巾零軌道の誘導をどのように定義すればよいのか。本稿では、その１つの試みを与える。

1 Adams-Vogan と山下の結果

1.1 標準 $(\mathfrak{g},K)$ 加群

G を $\mathbb{R}$ 上定義された連結簡約複素代数群、$\tau: G \to G$ を複素共役、$G(\mathbb{R}) = \{g \in G; \tau(g) = g\}$ を τ が定める G の実型、$\theta: G \to G$ を τ と可換な（複素化された）Cartan 対合とし、$K := \{g \in G; \theta(g) = g\}$ とおく。G の閉部分群の Lie 環は対応する小文字のドイツ文字で表し、τ、θ が定める $Lie(G) = \mathfrak{g}$ の対合をも τ、θ で表す。$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{s}$ を θ に関する Cartan 分解とする。τ-stable な G 又は $\mathfrak{g}$ の部分集合 A に対して $A(\mathbb{R}) = \{x \in A; \tau(x) = x\}$ とおく。$\mathfrak{g}$ の Cartan 部分環 $\mathfrak{h}$ に対して $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{h}$ に関するルート系を $R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ で表す。V が $\mathfrak{h}$-stable な $\mathfrak{g}$ の部分空間のとき $R(V,\mathfrak{h}) := \{\alpha \in R(\mathfrak{g},\mathfrak{h}); \mathfrak{g}_\alpha \subset V\}$ とおく。ここに、$\mathfrak{g}_\alpha$ はルート $\alpha \in R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ に対するルート空間である。また、$\mathfrak{h}$ が θ-stable のとき、$R(V,\mathfrak{h})$ の虚ルート、実ルートの集合をそれぞれ $R(V,\mathfrak{h})_{i\mathbb{R}}$、$R(V,\mathfrak{h})_{\mathbb{R}}$ で表す：

$$R(V,\mathfrak{h})_{i\mathbb{R}} = \{\alpha \in R(V,\mathfrak{h}); \theta(\alpha) = \alpha\}, \quad R(V,\mathfrak{h})_{\mathbb{R}} = \{\alpha \in R(V,\mathfrak{h}); \theta(\alpha) = -\alpha\}$$

$<,>$ は $\mathfrak{g}$ 上の G-不変な双一次形式で $\mathfrak{k}$ と $\mathfrak{s}$ は$<,>$ に関して直交し、かつ $<,>|_{\mathfrak{k}(\mathbb{R})}$ は負定値、$<,>|_{\mathfrak{s}(\mathbb{R})}$ は正定値であるものとする。$<,>$ が定める $\mathfrak{g}^*$ 上の双一次形式をも $<,>$ で表す。

$\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{s}\cap[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ の極大可換部分空間とし、有限群 F_G を

$$F_G = \{a \in exp(\mathfrak{a}); Ad(a^2) = id\}$$

により定める。

Remark 1.1 F_G は K を normalize し $F_G K = KF_G =< K \cup F_G >$, $Ad(N_G(\mathfrak{k})) = Ad(N_G(\mathfrak{s})) = Ad(F_G K)$ が成り立つ。

ここでは先ず、Vogan[V1] に従って、標準 $(\mathfrak{g},K)$ 加群 $X_{G(\mathbb{R})}(\mathfrak{q}, H(\mathbb{R}), \delta, \nu)$ の記述を与える。詳細については [V1] を参照されたい。

H を θ-stable かつ τ-stable な G の極大トーラスとし、$H = H_c H_s$ をその Cartan 分解 (i.e., $H_c = H \cap K$, $H_s = \{h \in H; \theta(h) = h^{-1}\}$) とする。$(\mathfrak{q}, H(\mathbb{R}), \delta, \nu)$ を、次の条件を満たす四つ組 (set of θ-stable data for $G(\mathbb{R})$) とする：

(a) $\mathfrak{q} = \mathfrak{l} + \mathfrak{u}$ は $\mathfrak{g}$ の θ-stable な放物型部分環であって、θ-stable かつ τ-stable な Levi factor $\mathfrak{l}$ をもつもの。

(b) $\mathfrak{l}$ に対応する G の連結部分群 L は quasisplit であって、H を極大分解な極大トーラスとして含む。

(c) $\delta \in H_c(\mathbb{R})\hat{}$ は $L(\mathbb{R})$ に関して fine ([V1,Definition 4.3.8]) な $H_c(\mathbb{R})$ の指標である。

(d) $\nu \in H_s(\mathbb{R})\hat{}$.

(e) $\lambda^L := d\delta \in \mathfrak{h}_c^*$ を δ の微分とし $\lambda^G := \lambda^L + \rho_{\mathfrak{u}} \in \mathfrak{h}_c^* \subset \mathfrak{h}^*$ とおくとき、任意の $\alpha \in R(\mathfrak{u}, \mathfrak{h})$ に対して $< \alpha, \lambda^G >> 0$ が成り立つ。ここに $\rho_{\mathfrak{u}}$ は $R(\mathfrak{u}, \mathfrak{h})$ に含まれるルートの和の 1/2 倍である。

$P_L = HN_L$ を τ-stable な L の Borel 部分群で $Re < \alpha, \nu > \leq 0$ $(\forall\alpha \in R(\mathfrak{n}_L, \mathfrak{h}))$ を満たすものとする。ここに N_L は P_L の unipotent radical である。このとき、data $(\mathfrak{q}, H(\mathbb{R}), \delta, \nu)$ に対応する標準 $(\mathfrak{g},K)$-加群

$$X = X_{G(\mathbb{R})}(\mathfrak{q}, H(\mathbb{R}), \delta, \nu) = \left(\mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{g}}\right)^{\dim(\mathfrak{u}\cap\mathfrak{k})} \left(Ind_{P_L(\mathbb{R})}^{L(\mathbb{R})}(\delta \otimes \nu)\right)$$

が定義される。ここに $Ind_{P_L(\mathbb{R})}^{L(\mathbb{R})}$ は 実放物型部分群による parabolic induction 、$\left(\mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{g}}\right)^{\dim(\mathfrak{u}\cap\mathfrak{k})}$ は θ-stable な放物型部分環による cohomological parabolic induction である。

標準 $(\mathfrak{g},K)$-加群の性質をいくつか揚げておく。$A_{L(\mathbb{R})}(\delta)$ を $Y := Ind_{P_L(\mathbb{R})}^{L(\mathbb{R})}(\delta\otimes\nu)$ の lowest-$L(\mathbb{R}) \cap K(\mathbb{R})$-type の集合とし、$A_{G(\mathbb{R})}(\mathfrak{q}, H(\mathbb{R}), \delta)$ を X の lambda-lowest $K(\mathbb{R})$-type の集

合とする。また、$F_L := \{a \in exp(\mathfrak{h}_s \cap [\mathfrak{l},\mathfrak{l}]); Ad(a^2)\mid_{\mathfrak{l}} = id\}$ とおく。このとき、次が成り立つ。

(i) F_L は $A_{L(\mathbb{R})}(\delta)$ に、推移的に作用する。
(ii) 自然な全単射 $A_{L(\mathbb{R})}(\delta) \simeq A_{G(\mathbb{R})}(\mathfrak{q}, H(\mathbb{R}), \delta)$ がある。従って、F_L は $A_{G(\mathbb{R})}(\mathfrak{q}, H(\mathbb{R}), \delta)$ に、推移的に作用する。
(iii) 任意の $\pi \in A_{G(\mathbb{R})}(\mathfrak{q}, H(\mathbb{R}), \delta)$ は X に重複度 1 で現れ、π を含む既約部分 $(\mathfrak{g},K)$-加群 $\bar{X}(\pi)$ を定める。
(iv) 任意の既約 $(\mathfrak{g},K)$-加群は上のような、ある data から $\bar{X}(\pi)$ として得られる。

1.2 $\mathfrak{g}$-principal な $\mathfrak{s}$ の巾零 K 軌道のパラメーター付け

$\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{g}(\mathbb{R})$) の巾零元の全体の集合を $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}$ (resp. $\mathcal{N}_{\mathfrak{s}}$, $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}(\mathbb{R})}$) で表し、その G 軌道 (resp. K 軌道、 $G(\mathbb{R})$ 軌道) の集合を $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}/G$ (resp. $\mathcal{N}_{\mathfrak{s}}/K$, $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}(\mathbb{R})}/G(\mathbb{R})$) で表す。$\mathfrak{g}$ で regular な巾零元（これらは 1 つの G 軌道を成す）を $\mathfrak{g}$-principal な巾零元という。$\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}$ (resp. $\mathcal{N}_{\mathfrak{s}}$, $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}(\mathbb{R})}$) の $\mathfrak{g}$-principal な元の集合を $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{g}-pr}$ (resp. $\mathcal{N}_{\mathfrak{s}}^{\mathfrak{g}-pr}$, $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}(\mathbb{R})}^{\mathfrak{g}-pr}$) で表し、その G 軌道 (resp. K 軌道、 $G(\mathbb{R})$ 軌道) の集合を $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{g}-pr}/G$ (resp. $\mathcal{N}_{\mathfrak{s}}^{\mathfrak{g}-pr}/K$, $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}(\mathbb{R})}^{\mathfrak{g}-pr}/G(\mathbb{R})$) で表す。ここでは先ず、$\mathcal{N}_{\mathfrak{s}}^{\mathfrak{g}-pr} \neq \emptyset$ となるための条件を記述し、$\mathcal{N}_{\mathfrak{s}}^{\mathfrak{g}-pr}/K$ のパラメーター付けを与える。

Definition 1.2 $\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の θ-stable な Cartan 部分環とし、Σ を虚ルートの成すルート系 $R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})_{i\mathbb{R}}$ の正系 (positive system) とする。$\mathfrak{g}$ の θ-stable な放物型部分環 $\mathfrak{q}$ が、次の条件を満たすとき、$(\mathfrak{h},\Sigma)$ に属すると呼ぶ。

(1.1.a) $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{q}$
(1.1.b) $\mathfrak{q} = \mathfrak{l} + \mathfrak{u}$ を $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{l}$ なる Levi 分解とするとき、$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{l}$ の極大分解 (maximally split) な Cartan 部分環である。
(1.1.c) $\Sigma = R(\mathfrak{u},\mathfrak{h})_{i\mathbb{R}}$（従って $\mathfrak{l}$ は虚ルートをもたず quasisplit である。）

Definition 1.3 ([AV]) (i) $\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の θ-stable な Cartan 部分環 とし、Σ を $R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})_{i\mathbb{R}}$ の正系とする。Σ の単純ルートがすべて非コンパクト (i.e., $\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{s}$) であるとき、$\Sigma$ は large type であるという。
(ii) $\mathfrak{g}$ の θ-stable な Borel 部分環 $\mathfrak{b}$ は、任意の θ-stable な Cartan 部分環 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{b}$ に対する正ルートの集合 $R(\mathfrak{b},\mathfrak{h})$ の単純ルートが complex なルート、または非コンパクトな虚ルートであるとき、large type であるという。$\mathfrak{g}$ の large type の θ-stable な Borel 部分環の集合を $\mathcal{B}_{\mathfrak{g}}^{L}$ で表す。

(iii) $\mathcal{B} \in \mathcal{B}^L_{\mathfrak{g}}/K$ を large type の θ-stable な Borel 部分環の K-共役類とする。$\mathfrak{g}$ の θ-stable な放物型部分環 $\mathfrak{q}$ は $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{q}$ となる $\mathfrak{b} \in \mathcal{B}$ があるとき、$\mathcal{B}$ に関して special であるという。

(iv) $\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の θ-stable な Cartan 部分環とし、$\mathfrak{l}$ は $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{l}$、$R(\mathfrak{l},\mathfrak{h}) = R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})_{\mathbb{R}}$ により定まる $\mathfrak{g}$ の Levi 部分環とする。$R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})_{i\mathbb{R}}$ の正系 Σ は $\mathfrak{l}$ を Levi factor にもつ $\mathcal{B} \in \mathcal{B}^L_{\mathfrak{g}}/K$ に関して special な θ-stable な放物型部分環 $\mathfrak{q} = \mathfrak{l} + \mathfrak{u}$ で $\Sigma = R(\mathfrak{u},\mathfrak{h})_{i\mathbb{R}}$ となるものが存在するとき、$\mathcal{B}$ に関して special であるという。

Remark 1.4 (i) θ-stable な $\mathfrak{g}$ の Borel 部分環 $\mathfrak{b}$ に対して $\mathfrak{b}$ の θ-stable な Cartan 部分環らは、容易に $B \cap K$ で共役であることが判る（ここに B は $\mathfrak{b}$ に対応する Borel 部分群である)。 従って、$\mathfrak{b}$ の θ-stable な Cartan 部分環 $\mathfrak{h}$ で $R(\mathfrak{b},\mathfrak{h})$ の単純ルートが complex なルート、または非コンパクトな虚ルート となるものが存在するとき、$\mathfrak{b}$ は large type であるといってもよい。

(ii) Definition 1.2,(iv) の仮定で、$R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})_{i\mathbb{R}}$ の正系 Σ が $\mathcal{B} \in \mathcal{B}^L_{\mathfrak{g}}/K$ に関して special であるための必要十分条件は、$(\mathfrak{h},\Sigma)$ に属する $\mathfrak{g}$ の放物型部分環 $\mathfrak{q}'$ で $\mathcal{B}$ に関して special なものが存在することである。

Proposition 1.5([AV, Proposition 6.30(a),Proposition6.25]) (i) $\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の θ-stable な Cartan 部分環とし、Σ を $R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})_{i\mathbb{R}}$ の正系とする。このとき、もし Σ が、ある $\mathcal{B} \in \mathcal{B}^L_{\mathfrak{g}}/K$ に関して special ならば、Σは large type である。

(ii) $\mathfrak{b}$ を $\mathfrak{g}$ の θ-stable な Borel 部分環とし、$\mathfrak{t}$ を $\mathfrak{b}$ の θ-stable な Cartan 部分環（このような $\mathfrak{t}$ は、すべて $B \cap K$ の作用で共役である）とする。このとき、$R(\mathfrak{g},\mathfrak{t})_{i\mathbb{R}}$ の正系 $R(\mathfrak{b},\mathfrak{t})_{i\mathbb{R}}$ が large type であるための必要十分条件は、$\mathfrak{b}$ が large type となることである。

標準 $(\mathfrak{g}, K)$ 加群 $X_{G(\mathbb{R})}(\mathfrak{q}, H(\mathbb{R}), \delta, \nu)$ の associated variety の $\mathfrak{g}$-principal な K 軌道を記述するために、次の記号を導入する。$\mathfrak{q}$ を $\mathfrak{g}$ の θ-stable な放物型部分環として

$$\mathcal{B}^L_{\mathfrak{q}} := \{\mathfrak{b} \in \mathcal{B}^L_{\mathfrak{g}}; k \cdot \mathfrak{b} \subset \mathfrak{q} \ \text{ for some } \ k \in K\}$$

とおく。又、次の条件を満たす対 $(\mathfrak{t}, \Sigma^c)$ の集合を $\mathcal{P}^L_{\mathfrak{q}}$ と表す：

(1.2.a) $\mathfrak{t}$ は fundamental な $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分環（即ち、$\mathfrak{t}$ は $\mathfrak{k}$ の Cartan 部分環を含む）である。

(1.2.b) Σ^c は $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})_{i\mathbb{R}}$ の large type の正系である。

(1.2.c) $k \in K$ で $k \cdot \mathfrak{t} \subset \mathfrak{q}$ かつ $k \cdot \Sigma^c \subset R(\mathfrak{q}, k \cdot \mathfrak{t})$ となるものが存在する。

Proposition 1.6([AV, Proposition 6.24]) 次の条件は同値である。

(a) $\mathfrak{g}$ は quasisplit である。即ち、$\mathfrak{g}$ は $\mathbb{R}$ 上定義された、Borel 部分環をもつ。
(b) $\mathcal{N}_{\mathfrak{s}}^{\mathfrak{g}-pr} \neq \emptyset$
(c) $\mathcal{B}_{\mathfrak{g}}^{L} \neq \emptyset$
(d) $\mathfrak{g}$ の任意の θ-stable な Cartan 部分環 $\mathfrak{h}$ について、$R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})_{i\mathbb{R}}$ は large type の正系をもつ。
(d') $\mathfrak{g}$ の θ-stable な Cartan 部分環 $\mathfrak{h}$ で $R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})_{i\mathbb{R}}$ が large type の正系をもつものが存在する。

$\mathcal{N}_{\mathfrak{s}}^{\mathfrak{g}-pr}/K$ は $\mathcal{B}_{\mathfrak{g}}^{L}/K$、$\mathcal{P}_{\mathfrak{g}}^{L}/K$ を用いて、次のようにパラメーター付けされる。$x \in \mathcal{N}_{\mathfrak{s}}^{\mathfrak{g}-pr}$ に対して、normal S-triple (h,x,y) $(h \in \mathfrak{k}, y \in \mathfrak{s})$ が存在する (c.f.,Kostant, Rallis [KR]) 。h は $\mathfrak{g}$ の regular な半単純元より、$\mathfrak{t} := \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(h)$ は $\mathfrak{g}$ の θ-stable な Cartan 部分環 である。$\mathfrak{b} \supset \mathfrak{t}$ を $R(\mathfrak{b},\mathfrak{t}) = \{\alpha \in R(\mathfrak{g},\mathfrak{t}); \alpha(h) > 0\}$ により定まる、θ-stable な Borel 部分環とし、$R(\mathfrak{b},\mathfrak{t})$ の単純ルートの集合を Δ とかく。このとき、$\Delta = \{\alpha \in R(\mathfrak{g},\mathfrak{t}); \alpha(h) = 2\}$ と $[h,x] = 2x$ より、x は

$$x = \textstyle\sum_{\alpha\in\Delta} X_{\alpha} \quad ({}^{\exists}X_{\alpha} \in \mathfrak{g}_{\alpha} \setminus (0))$$

とかけ、$\theta(X_{\alpha}) = -X_{\theta(\alpha)}$ が成り立つ。特に、$\alpha \in \Delta$ が虚ルートなら、$\mathfrak{g}_{\alpha} \subset \mathfrak{s}$ であって、α は非コンパクトである。これと Δ が θ-stable であることから、Δ は complex ルート、及び非コンパクトな虚ルートから成ることが判り、$\mathfrak{b}$ は large type である。$x \in \mathfrak{b}$ と x は $\mathfrak{g}$-principal であることから、$\mathfrak{b}$ は x を含む唯 1 つの $\mathfrak{g}$ の Borel 部分環であって、$x \mapsto \mathfrak{b}$ は写像

$$\varphi : \mathcal{N}_{\mathfrak{s}}^{\mathfrak{g}-pr}/K \to \mathcal{B}_{\mathfrak{g}}^{L}/K$$

を定める。

次に、$\mathfrak{b} \in \mathcal{B}_{\mathfrak{g}}^{L}$ に対して、$\mathfrak{b}$ の θ-stable な Cartan 部分環 $\mathfrak{t}$ をとる。$\mathfrak{b}$ は θ-stable より、$R(\mathfrak{b},\mathfrak{t})$ は実ルートをもたない。よって、$\mathfrak{t}$ は fundamental である。又、$\Sigma^{c} := R(\mathfrak{b},\mathfrak{t})_{i\mathbb{R}}$ は Proposition 1.5,(ii) により large type 、従って $(\mathfrak{t},\Sigma^{c}) \in \mathcal{P}_{\mathfrak{g}}^{L}$である。$\mathfrak{b} \mapsto (\mathfrak{t},\Sigma^{c})$ は写像

$$\psi : \mathcal{B}_{\mathfrak{g}}^{L}/K \to \mathcal{P}_{\mathfrak{g}}^{L}/K$$

を定める。

Proposition 1.7([AV, Proposition A.7]) $\mathcal{N}_{\mathfrak{s}}^{\mathfrak{g}-pr}/K$、$\mathcal{B}_{\mathfrak{g}}^{L}/K$、$\mathcal{P}_{\mathfrak{g}}^{L}/K$ には F_G が自然に推移的に作用して、$\varphi : \mathcal{N}_{\mathfrak{s}}^{\mathfrak{g}-pr}/K \to \mathcal{B}_{\mathfrak{g}}^{L}/K$、$\psi : \mathcal{B}_{\mathfrak{g}}^{L}/K \to \mathcal{P}_{\mathfrak{g}}^{L}/K$ は F_G 同変な全単射である。

Proposition 1.7 で $(\mathfrak{t},\Sigma^c)\in\mathcal{P}^L_{\mathfrak{g}}$ に対応する巾零 K 軌道を $\mathcal{O}_{(\mathfrak{t},\Sigma^c)}\in\mathcal{N}^{\mathfrak{g}-pr}_{\mathfrak{s}}/K$ で表す。
$Q=LU$ を θ-stable な Levi factor をもつ θ-stable な G の放物型部分環とする。$\mathfrak{a}_L\subset[\mathfrak{l},\mathfrak{l}]\cap\mathfrak{s}$ を極大可換部分空間として、

$$F_L=\{a\in exp(\mathfrak{a}_L);Ad(a^2)\mid_{\mathfrak{l}}=id_{\mathfrak{l}}\},\quad F^G_L=\{a\in F_L;Ad(a^2)=id_{\mathfrak{g}}\}$$

とおく。このとき、$\mathfrak{q}$ と交わる $\mathfrak{g}$-principal な巾零 K 軌道の集合

$$[\mathcal{N}^{\mathfrak{g}-pr}_{\mathfrak{s}}/K]_{\mathfrak{q}}:=\{\mathcal{O}\in\mathcal{N}^{\mathfrak{g}-pr}_{\mathfrak{s}}/K;\mathcal{O}\cap\mathfrak{q}\neq\emptyset\}$$

は、次のようにパラメーター付けされる。

Proposition 1.8 Proposition 1.7 の全単射 φ、ψ は次の全単射を引き起こす：

$$[\mathcal{N}^{\mathfrak{g}-pr}_{\mathfrak{s}}/K]_{\mathfrak{q}}\simeq\mathcal{B}^L_{\mathfrak{q}}/K\simeq\mathcal{P}^L_{\mathfrak{q}}/K$$

又、この 3 つの集合には F^G_L が作用して、上の全単射は F^G_L 同変である。

1.3 Adams-Vogan, 山下の結果

有限生成な $(\mathfrak{g},K)$ 加群 X に対して、associated variety と呼ばれる $\mathfrak{g}^*$ の閉部分（代数）多様体 $Ass(X)$ が定まる。詳しくは、例えば Vogan [V2] を参照されたい。G 不変な双一次形式 $<,>$ による同一視 $\mathfrak{g}\simeq\mathfrak{g}^*$ $(x\mapsto<x,\cdot>)$ によって $Ass(X)\subset\mathfrak{g}$ とみておく。$Ass(X)$ は K 不変である。更に、X が有限な組成列をもつとき、$Ass(X)\subset\mathcal{N}_{\mathfrak{s}}$ となることが知られている。$Ass(X)^{\mathfrak{g}-pr}:=Ass(X)\cap\mathcal{N}^{\mathfrak{g}-pr}_{\mathfrak{s}}$ とおく。Adams-Vogan [AV] により、以下のことが知られている。

Proposition 1.9 ([AV, Proposition A.9]) $\mathfrak{g}$ は quasisplit と仮定する。1.1 の標準 $(\mathfrak{g},K)$ 加群の data $(\mathfrak{b},T(\mathbb{R}),\delta,\nu)$ において、$\mathfrak{b}$ が large type の θ-stable な Borel 部分環であるとき、$\Sigma^c:=R(\mathfrak{b},\mathfrak{t})_{i\mathbb{R}}$ とすれば $(\mathfrak{t},-\Sigma^c)\in\mathcal{P}^L_{\mathfrak{g}}$ であって、

$$Ass(X_{G(\mathbb{R})}(\mathfrak{b},T(\mathbb{R}),\delta,\nu))=\overline{\mathcal{O}}_{(\mathfrak{t},-\Sigma^c)}$$

が成り立つ。ここに閉包は Zariski 閉包である。

Theorem 1.10 ([AV, Theorem A.10]) $\mathfrak{g}$ は quasisplit と仮定する。Hを θ-stable かつ τ-stable な G の極大トーラスとする。$(\mathfrak{q},H(\mathbb{R}),\delta,\nu)$ $(\mathfrak{q}=\mathfrak{l}+\mathfrak{u},\ \mathfrak{h}\subset\mathfrak{l})$ を標準 $(\mathfrak{g},K)$ 加群の data とし、対応する標準 $(\mathfrak{g},K)$ 加群を $X=X_{G(\mathbb{R})}(\mathfrak{q},H(\mathbb{R}),\delta,\nu)$ とおく。又、

$$\Sigma:=R(\mathfrak{u},\mathfrak{h})_{i\mathbb{R}}=\{\alpha\in R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})_{i\mathbb{R}};<\alpha,\lambda^G>>0\}$$

とおくとき、次が成り立つ。

(i) Σ が large type でなければ $Ass(X)^{\mathfrak{g}-pr} = \emptyset$ である。

(ii) Σ が large type であるとする。このとき、$(\mathfrak{h}, \Sigma)$ に属する任意の $\mathfrak{g}$ の θ-stable な 放物型部分環 $\mathfrak{q}'$ に対して

$$Ass(X)^{\mathfrak{g}-pr}/K = \{\mathcal{O}_{(\mathfrak{t},-\Sigma^c)}; (\mathfrak{t}, \Sigma^c) \in \mathcal{P}^L_{\mathfrak{q}'}\} \simeq \mathcal{P}^L_{(\mathfrak{q}')^-}/K \simeq \mathcal{B}^L_{(\mathfrak{q}')^-}/K$$

が成り立つ。ここに $(\mathfrak{q}')^-$ は $-R(\mathfrak{q}', \mathfrak{h})$ に対応する放物型部分環である。特に、$Ass(X)^{\mathfrak{g}-pr}/K$ は $(\mathfrak{h}, \Sigma)$ にのみ依存する。

Remark 1.11 (i) Proposition 1.8 より Theorem 1.10 の仮定のもとに

(1.3) $$Ass(X)^{\mathfrak{g}-pr}/K = [\mathcal{N}^{\mathfrak{g}-pr}_{\mathfrak{s}}/K]_{\mathfrak{q}^-}$$

が成り立つ。更に Proposition 1.4 より、Σ が large type でないとき、Σ は、いかなる $\mathcal{B} \in \mathcal{B}^L_{\mathfrak{g}}/K$ に関しても special とはならない。Remark 1.4,(ii) より $(\mathfrak{h}, \Sigma)$ に属する θ-stable な 放物型部分環 $\mathfrak{q}$ は、いかなる $\mathcal{B} \in \mathcal{B}^L_{\mathfrak{g}}/K$ に関しても special とはならない。従って、$\mathcal{B}^L_{\mathfrak{q}} = \emptyset$ である。これより $\mathcal{B}^L_{\mathfrak{q}^-} = \emptyset$ であり、Proposition 1.8 から $[\mathcal{N}^{\mathfrak{g}-pr}_{\mathfrak{s}}/K]_{\mathfrak{q}^-} = \emptyset$ が従う。よって (1.3) は Σ が large type でないときも成り立つ。

(ii) 標準 $(\mathfrak{g}, K)$ 加群

$$X = X_{G(\mathbb{R})}(\mathfrak{q}, H(\mathbb{R}), \delta, \nu) = \left(\mathcal{R}^{\mathfrak{g}}_{\mathfrak{q}}\right)^{\dim(\mathfrak{u}\cap\mathfrak{k})}\left(Ind^{L(\mathbb{R})}_{P_L(\mathbb{R})}(\delta \otimes \nu)\right)$$

において、$Y = Ind^{L(\mathbb{R})}_{P_L(\mathbb{R})}(\delta \otimes \nu)$ とおくと、Y は $L(\mathbb{R})$ に対する data $(\mathfrak{l}, H(\mathbb{R}), \delta, \nu)$ に対する標準 $(\mathfrak{l}, L \cap K)$ 加群 である。Theorem 1.10 より $Ass(Y) = \mathcal{N}_{\mathfrak{l}\cap\mathfrak{s}}$ となり F_L は $Ass(Y)$ に作用する。$\Sigma = R(\mathfrak{u}, \mathfrak{h})_{i\mathbb{R}}$ が large type なら F_L の部分群 F^G_L が $Ass(X)^{\mathfrak{g}-pr}/K$ に作用できる。一般に、$Ass(X)$ に作用できる最大の F_L の部分群は何か、又、$Ass(X)$ の generic な K 軌道の集合への、その部分群の作用は推移的か、等の問題がある。

一方、$G(\mathbb{R})$ が連結かつ半単純で、コンパクト Cartan 部分群 $T(\mathbb{R})$ をもつとき、$T(\mathbb{R})$ を含む標準 $(\mathfrak{g}, K)$ 加群の data は $(\mathfrak{b}, T(\mathbb{R}), \delta)$ となる。ここに、ν は現れず、$\mathfrak{b} = \mathfrak{t} + \mathfrak{u}$ は θ-stable な Borel 部分環 である。対応する標準 $(\mathfrak{g}, K)$ 加群

$$X = X_{G(\mathbb{R})}(\mathfrak{b}, T(\mathbb{R}), \delta) = \left(\mathcal{R}^{\mathfrak{g}}_{\mathfrak{b}}\right)^{\dim(\mathfrak{u}\cap\mathfrak{k})}(\delta)$$

は discrete series（の $(\mathfrak{g}, K)$ 加群）である。又、$\lambda^G = d\delta + \rho_{\mathfrak{u}}$ は regular で

$$R(\mathfrak{b}, \mathfrak{t}) = \{\alpha \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}); < \alpha, \lambda^G >> 0\}$$

である。$\mathfrak{u}^-$ を $\mathfrak{b}^-$ の nilpotent radical とするとき、山下氏により、次のことが知られている。

Theorem 1.12 (Yamashita[Y,Theorem 3.1]) 上の仮定のもとに $Ass(X) = K\cdot(\mathfrak{u}^- \cap \mathfrak{s})$ が成り立つ。これは $\mathfrak{u}^- \cap \mathfrak{s}$ と open dense に交わる唯 1 つの $\mathcal{N}_{\mathfrak{s}}$ の K 軌道の閉包に一致する。

2 巾零軌道の誘導

2.1 θ-stable な 放物型部分環による誘導

$Q = LU$ を θ-stable な Levi factor L をもつθ-stable な G の放物型部分群とし、$\mathfrak{q} = \mathfrak{l} + \mathfrak{u}$ をその Lie 環とする。

$$K_L := L \cap K, \quad \mathfrak{s}_L = \mathfrak{l} \cap \mathfrak{s}$$

とおく。

Definition 2.1 $\mathcal{O} \in \mathcal{N}_{\mathfrak{s}_L}/K_L$ に対して $(\mathcal{O} + \mathfrak{u} \cap \mathfrak{s}) \cap \tilde{\mathcal{O}}$ が $\mathcal{O} + \mathfrak{u} \cap \mathfrak{s}$ で open dense となる $\tilde{\mathcal{O}} \in \mathcal{N}_{\mathfrak{s}}/K$ が唯 1 つ存在する。これを $\tilde{\mathcal{O}} = Ind^{\theta}((\mathfrak{l},\mathfrak{q}) \uparrow \mathfrak{g})(\mathcal{O})$ と表す。

Remark 2.2 (i) $G(\mathbb{R})$ 自身が簡約連結複素代数群、$Q(\mathbb{R}) = L(\mathbb{R})U(\mathbb{R})$ が複素放物型部分群であるとき、次の同一視ができる：

$$G = G(\mathbb{R}) \times G(\mathbb{R}), \quad \theta(g_1, g_2) = (g_2, g_1) \quad (g_1, g_2 \in G(\mathbb{R}))$$
$$K = \{(g,g); g \in G(\mathbb{R})\} \simeq G(\mathbb{R}), \quad \mathfrak{s} = \{(X, -X); X \in \mathfrak{g}(\mathbb{R})\} \simeq \mathfrak{g}(\mathbb{R})$$

$$\mathcal{N}_{\mathfrak{g}(\mathbb{R})}/G(\mathbb{R}) \overset{\alpha}{\simeq} \mathcal{N}_{\mathfrak{s}}/K$$

Lusztig, Spaltenstein [LS] により、巾零軌道の誘導

$$Ind^{\mathfrak{g}(\mathbb{R})}_{(\mathfrak{l}(\mathbb{R}),\mathfrak{q}(\mathbb{R}))} : \mathcal{N}_{\mathfrak{l}(\mathbb{R})}/L(\mathbb{R}) \to \mathcal{N}_{\mathfrak{g}(\mathbb{R})}/G(\mathbb{R})$$

が定義されているが、同一視 α を通じて $Ind^{\mathfrak{g}(\mathbb{R})}_{(\mathfrak{l}(\mathbb{R}),\mathfrak{q}(\mathbb{R}))}$ は $Ind^{\theta}((\mathfrak{l},\mathfrak{q}) \uparrow \mathfrak{g})$ に一致することが判る。従って、Definition 2.1 の誘導は Lusztig, Spaltenstein の誘導の一般化になっている。

(ii)　(i) の $Ind^{\mathfrak{g}(\mathbb{R})}_{(\mathfrak{l}(\mathbb{R}),\mathfrak{q}(\mathbb{R}))}$ は $\mathfrak{q}(\mathbb{R})$ には依存せず、$\mathfrak{l}(\mathbb{R})$ だけで決ることが知られている ([LS]) 。しかし、Definition 2.1 の誘導 $Ind^{\theta}\left((\mathfrak{l},\mathfrak{q})\uparrow\mathfrak{g}\right)$ は $\mathfrak{q}$ のとり方に依存する。

Remark 2.3　Theorem 1.10 は、誘導の言葉を用いて、次のように述べることができる:

$$Ass(\left(\mathcal{R}^{\mathfrak{g}}_{\mathfrak{b}}\right)^{\dim(\mathfrak{u}\cap\mathfrak{k})}(\delta)) = \overline{Ind^{\theta}\left((\mathfrak{t},\mathfrak{b}^{-})\uparrow\mathfrak{g}\right)((0)_{\mathfrak{t}_s})}$$

ここに、$(0)_{\mathfrak{t}_s}$ は $\mathfrak{t}_s=\{0\}$ の 0 だけから成る $T=T_c=T\cap K$-軌道である。

さて、一般に $(\mathfrak{g},K)$ 加群 X の associated variety は X が既約であっても、既約になるとは限らない。そこで、巾零軌道の誘導も軌道の集合に軌道の集合を対応させるものであるべきだと考えられる。そこで本稿では、巾零軌道の誘導を次のように定義しておく。

Definition 2.4　$\mathcal{N}_{\mathfrak{s}_L}/K_L$ の部分集合 $S\in 2^{\mathcal{N}_{\mathfrak{s}_L}/K_L}$ に対して $\{Ind^{\theta}\left((\mathfrak{l},\mathfrak{q})\uparrow\mathfrak{g}\right)(\mathcal{C});\mathcal{C}\in S\}$ の中で、closure relation に関して極大なものの全体を $Ind^{\theta}\left((\mathfrak{l},\mathfrak{q})\uparrow\mathfrak{g}\right)(S)$ と表す。これにより、対応

$$Ind^{\theta}\left((\mathfrak{l},\mathfrak{q})\uparrow\mathfrak{g}\right): 2^{\mathcal{N}_{\mathfrak{s}_L}/K_L}\to 2^{\mathcal{N}_{\mathfrak{s}}/K}$$

が定まる。

Proposition 2.5　$Q=LU$ を θ-stable な Levi factor L をもつθ-stable な G の放物型部分群とする。このとき、$Ind^{\theta}\left((\mathfrak{l},\mathfrak{q})\uparrow\mathfrak{g}\right)(\mathcal{N}^{\mathfrak{l}-pr}_{\mathfrak{s}_L}/K_L)$ に含まれる $\mathfrak{g}$-principal な K 軌道の集合 $[Ind^{\theta}\left((\mathfrak{l},\mathfrak{q})\uparrow\mathfrak{g}\right)(\mathcal{N}^{\mathfrak{l}-pr}_{\mathfrak{s}_L}/K_L)]^{\mathfrak{g}-pr}$ は $[\mathcal{N}^{\mathfrak{g}-pr}_{\mathfrak{s}}/K]_{\mathfrak{q}}$ に一致する:

$$[Ind^{\theta}\left((\mathfrak{l},\mathfrak{q})\uparrow\mathfrak{g}\right)(\mathcal{N}^{\mathfrak{l}-pr}_{\mathfrak{s}_L}/K_L)]^{\mathfrak{g}-pr} = [\mathcal{N}^{\mathfrak{g}-pr}_{\mathfrak{s}}/K]_{\mathfrak{q}}$$

Proof.　誘導の定義より、明かに

$$[Ind^{\theta}\left((\mathfrak{l},\mathfrak{q})\uparrow\mathfrak{g}\right)(\mathcal{N}^{\mathfrak{l}-pr}_{\mathfrak{s}_L}/K_L)]^{\mathfrak{g}-pr} \subset [\mathcal{N}^{\mathfrak{g}-pr}_{\mathfrak{s}}/K]_{\mathfrak{q}}$$

である。

$\mathcal{O}\in[\mathcal{N}^{\mathfrak{g}-pr}_{\mathfrak{s}}/K]_{\mathfrak{q}}$ とし $x\in\mathfrak{q}\cap\mathcal{O}$ とする。x を含む normal S-triple $(h,x,y)(h\in\mathfrak{k},x,y\in\mathfrak{s})$ (c.f.,[KR]) 及び、x を含む Borel 部分環 $\mathfrak{b}\subset\mathfrak{q}$ をとる。一方、$x,h\in\mathfrak{b}'$ となる $\mathfrak{g}$ の Borel 部分環 $\mathfrak{b}'$ も存在するが、x が $\mathfrak{g}$-principal であることから x を含む Borel 部分環は唯 1 つである。従って

$$x,h\in\mathfrak{b}\subset\mathfrak{q}.$$

h は $\mathfrak{g}$ で regular かつ $h \in \mathfrak{k}$ であるから $\mathfrak{t} := \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(h) \subset \mathfrak{b}$ は $\mathfrak{g}$ の fundamental な Cartan 部分環である。$\mathfrak{t}'$ を $\mathfrak{l}$ の fundamental な Cartan 部分環とする。$\mathfrak{u}$ は θ-stable より $R(\mathfrak{u},\mathfrak{t}')$ は実ルートをもたず、又 $\mathfrak{t}'$ は $\mathfrak{l}$ で fundamental であることから $R(\mathfrak{l},\mathfrak{t}')$ も実ルートをもたない。よって $R(\mathfrak{g},\mathfrak{t}')$ は実ルートをもたず、$\mathfrak{t}'$ は $\mathfrak{g}$ でも fundamental である。$\mathfrak{t}_c = \mathfrak{t} \cap \mathfrak{k}, \mathfrak{t}'_c = \mathfrak{t}' \cap \mathfrak{k}$ は共に $\mathfrak{q} \cap \mathfrak{k}$ の Cartan 部分環であるから $\mathfrak{t}'_c = k \cdot \mathfrak{t}_c$ となる $k \in Q \cap K$ が存在する。$\mathfrak{l} \supset \mathfrak{t}' = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}'_c) = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(k \cdot \mathfrak{t}_c) = k \cdot \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}_c) = k \cdot \mathfrak{t} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(k \cdot h)$ より x の代わりに $k \cdot x \in \mathfrak{q} \cap \mathcal{O}$ を考えることにより $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{l}$ と仮定してよい。

Δ を $R(\mathfrak{b},\mathfrak{t})$ の base とし、

$$\Delta_{\mathfrak{l}} := \Delta \cap R(\mathfrak{l},\mathfrak{t}), \quad \Delta_{\mathfrak{u}} := \Delta \cap R(\mathfrak{u},\mathfrak{t})$$

とおく。$[h,x] = 2x$ より x はルートベクトル $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\} (\alpha \in \Delta)$ を用いて $x = \sum_{\alpha \in \Delta} X_\alpha$ と書ける。

$$x_{\mathfrak{l}} := \sum_{\alpha \in \Delta_{\mathfrak{l}}} X_\alpha \in \mathfrak{l}, \quad x_{\mathfrak{u}} := \sum_{\beta \in \Delta_{\mathfrak{u}}} X_\beta \in \mathfrak{u}$$

とおけば $x = x_{\mathfrak{l}} + x_{\mathfrak{u}}$ である。$\mathfrak{l}$、及び $\mathfrak{u}$ がθ-stable であることと、$\theta(x) = -x$ であることから、$x_{\mathfrak{l}} \in \mathfrak{s}_L, x_{\mathfrak{u}} \in \mathfrak{u} \cap \mathfrak{s}$ を得る。明かに $x \in \mathcal{N}^{\mathfrak{l}-pr}_{\mathfrak{s}_L}$ であり、また $\mathcal{O}$ は $\mathfrak{g}$-principal であるから $\mathcal{O} \cap (K_L \cdot x_{\mathfrak{l}} + \mathfrak{u} \cap \mathfrak{s}) (\ni x)$ は $K_L \cdot x_{\mathfrak{l}} + \mathfrak{u} \cap \mathfrak{s}$ で open dense である。従って、

$$\mathcal{O} = K \cdot x \in Ind^\theta\left((\mathfrak{l},\mathfrak{q}) \uparrow \mathfrak{g}\right)(\{K_L \cdot x_{\mathfrak{l}}\}) \subset Ind^\theta\left((\mathfrak{l},\mathfrak{q}) \uparrow \mathfrak{g}\right)(\mathcal{N}^{\mathfrak{l}-pr}_{\mathfrak{s}_L}/K_L)$$

q.e.d

Remark 2.6 G は quasisplit とし、$Q = LU$ は Proposition 2.5 の通りとする。

(i) $\mathcal{N}^{\mathfrak{l}-pr}_{\mathfrak{s}_L}/K_L$ には F_L が推移的に作用しているにも拘らず、$Ind^\theta\left((\mathfrak{l},\mathfrak{q}) \uparrow \mathfrak{g}\right)(\mathcal{O})$ は $\mathcal{O} \in \mathcal{N}^{\mathfrak{l}-pr}_{\mathfrak{s}_L}/K_L$ のとり方により、$\mathfrak{g}$-principal になったり、ならなかったりすることがあり得る。

(ii) $[Ind^\theta\left((\mathfrak{l},\mathfrak{q}) \uparrow \mathfrak{g}\right)(\mathcal{N}^{\mathfrak{l}-pr}_{\mathfrak{s}_L}/K_L)]^{\mathfrak{g}-pr} \neq \emptyset$ のとき、$\tilde{\mathcal{O}} = Ind^\theta\left((\mathfrak{l},\mathfrak{q}) \uparrow \mathfrak{g}\right)(\mathcal{O})$ が $\mathfrak{g}$-principal にならない $\mathcal{O} \in \mathcal{N}^{\mathfrak{l}-pr}_{\mathfrak{s}_L}/K_L$ に対して、$\tilde{\mathcal{O}}' = Ind^\theta\left((\mathfrak{l},\mathfrak{q}) \uparrow \mathfrak{g}\right)(\mathcal{O}')$ が $\mathfrak{g}$-principal となる $\mathcal{O}' \in \mathcal{N}^{\mathfrak{l}-pr}_{\mathfrak{s}_L}/K_L$ が存在して $\tilde{\mathcal{O}} \subset \overline{\tilde{\mathcal{O}}'}$ となるか？　換言すれば、

$$[Ind^\theta\left((\mathfrak{l},\mathfrak{q}) \uparrow \mathfrak{g}\right)(\mathcal{N}^{\mathfrak{l}-pr}_{\mathfrak{s}_L}/K_L)]^{\mathfrak{g}-pr} = Ind^\theta\left((\mathfrak{l},\mathfrak{q}) \uparrow \mathfrak{g}\right)(\mathcal{N}^{\mathfrak{l}-pr}_{\mathfrak{s}_L}/K_L)$$

が成立するか、否かは現在の筆者には判らない。

2.2 実放物型部分環による誘導

$P = MN$ を τ-stable な Levi factor M、unipotent radical N をもつ τ-stable な G の放物型部分群とし、$\mathfrak{p} = \mathfrak{m} + \mathfrak{n}$ をその Lie 環とする。

Definition 2.7 $\mathcal{O} \in \mathcal{N}_{\mathfrak{m}(\mathbb{R})}/M(\mathbb{R})$ に対して、$\{\mathcal{C} \in \mathcal{N}_{\mathfrak{g}(\mathbb{R})}/G(\mathbb{R}); (\mathcal{O} + \mathfrak{n}(\mathbb{R})) \cap \mathcal{C} \neq \emptyset\}$ の中で closure relation に関して極大である $G(\mathbb{R})$ 軌道の集合を $Ind^{\mathbb{R}}((\mathfrak{m}, \mathfrak{p}) \uparrow \mathfrak{g})(\mathcal{O})$ と表す。

Remark 2.8 $G(\mathbb{R})$ 自身が簡約連結複素代数群、$P(\mathbb{R}) = M(\mathbb{R})N(\mathbb{R})$ が複素放物型部分群であるとき、次の同一視ができる：

$$G = G(\mathbb{R}) \times G(\mathbb{R}), \quad \tau(g_1, g_2) = (\bar{g_2}, \bar{g_1}), (g_1, g_2 \in G(\mathbb{R}))$$

$$G(\mathbb{R}) \simeq \{(g, \bar{g}); g \in G(\mathbb{R})\}(g \mapsto (g, \bar{g})), \quad \mathfrak{g}(\mathbb{R}) \simeq \{(X, \bar{X}); X \in \mathfrak{g}(\mathbb{R})\}(X \mapsto (X, \bar{X}))$$

ここに、$g \mapsto \bar{g}$ は $G(\mathbb{R})$ のコンパクト実型に対応する複素共役である。$\mathfrak{p} = \mathfrak{m} + \mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}(\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{g}(\mathbb{R}) = \mathfrak{g}$ を $\mathfrak{p}(\mathbb{R})$ の複素化とする。$\mathcal{O} \in \mathcal{N}_{\mathfrak{m}(\mathbb{R})}/M(\mathbb{R})$、$\tilde{\mathcal{O}} \in \mathcal{N}_{\mathfrak{g}(\mathbb{R})}/G(\mathbb{R})$ に対して、$\mathcal{O}+\mathfrak{n}(\mathbb{R})$ は $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}(\mathbb{R})}$ の既約な部分代数多様体であるから、$\tilde{\mathcal{O}}$ が $\{\mathcal{C} \in \mathcal{N}_{\mathfrak{g}(\mathbb{R})}/G(\mathbb{R}); (\mathcal{O}+\mathfrak{n}(\mathbb{R})) \cap \mathcal{C} \neq \emptyset\}$ の中で、closure relation に関して極大であるための必要十分条件は $(\mathcal{O} + \mathfrak{n}(\mathbb{R})) \cap \tilde{\mathcal{O}}$ が $\mathcal{O} + \mathfrak{n}(\mathbb{R})$ で open dense になることである。これより、

$$Ind^{\mathfrak{g}(\mathbb{R})}_{(\mathfrak{m}(\mathbb{R}), \mathfrak{p}(\mathbb{R}))} : \mathcal{N}_{\mathfrak{m}(\mathbb{R})}/m(\mathbb{R}) \to \mathcal{N}_{\mathfrak{g}(\mathbb{R})}/G(\mathbb{R})$$

を Lusztig, Spaltenstein の誘導とするとき、

$$Ind^{\mathbb{R}}((\mathfrak{m}, \mathfrak{p}) \uparrow \mathfrak{g})(\mathcal{O}) = \{Ind^{\mathfrak{g}(\mathbb{R})}_{(\mathfrak{m}(\mathbb{R}), \mathfrak{p}(\mathbb{R}))}(\mathcal{O})\}$$

を得る。従って、$Ind^{\mathfrak{g}(\mathbb{R})}_{(\mathfrak{m}(\mathbb{R}), \mathfrak{p}(\mathbb{R}))}$ も Lusztig, Spaltenstein の誘導の一般化になっていると考えられる。

以下、M は θ-stable であると仮定する。$\mathfrak{p}(\mathbb{R}) = \mathfrak{m}(\mathbb{R}) + \mathfrak{n}(\mathbb{R})$ は $\mathfrak{g}(\mathbb{R})$ の実放物型部分環であるから、$\mathfrak{g}(\mathbb{R})$ の極小放物型部分環を含む。これより、$\mathfrak{s} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ で $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}$ となるものが存在する。1.1 のように

$$F_G = \{a \in exp(\mathfrak{a}); Ad(a^2) = id\}$$

とおくとき、次が成り立つ。

Remark 2.9 (i) $F_G \subset N_M(\mathfrak{m}(\mathbb{R}))$、$F_G \subset N_G(\mathfrak{g}(\mathbb{R}))$

(ii) $Ad(N_G(\mathfrak{g}(\mathbb{R}))) = Ad(F_G G(\mathbb{R})) = Ad(G(\mathbb{R})F_G)$

(iii) $\mathcal{O} \in \mathcal{N}_{\mathfrak{m}(\mathbb{R})}/M(\mathbb{R})$ に対して、$F_G(\mathcal{O}) := \{a \in F_G; a \cdot \mathcal{O} = \mathcal{O}\}$ とおく。このとき、$\tilde{\mathcal{O}} \in \mathcal{N}_{\mathfrak{g}(\mathbb{R})}/G(\mathbb{R})$ に対して、

$$(\mathcal{O} + \mathfrak{n}(\mathbb{R})) \cap \tilde{\mathcal{O}} \neq \emptyset \Longleftrightarrow (\mathcal{O} + \mathfrak{n}(\mathbb{R})) \cap (a \cdot \tilde{\mathcal{O}}) \neq \emptyset$$

であることから、$G(\mathbb{R})$ 軌道の集合 $Ind^{\mathbb{R}}((\mathfrak{m},\mathfrak{p})\uparrow\mathfrak{g})(\mathcal{O})$ は $F_G(\mathcal{O})$-stable である。

軌道の集合 $S\in 2^{\mathcal{N}_{\mathfrak{m}(\mathbb{R})}/M(\mathbb{R})}$ に対して $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}(\mathbb{R})}$ の $G(\mathbb{R})$ 軌道の集合 $\cup_{\mathcal{O}\in S}Ind^{\mathbb{R}}((\mathfrak{m},\mathfrak{p})\uparrow\mathfrak{g})(\mathcal{O})$ の中で、closure relation に関して極大であるものの全体を $Ind^{\mathbb{R}}((\mathfrak{m},\mathfrak{p})\uparrow\mathfrak{g})(S)$ と表す。これは写像

$$Ind^{\mathbb{R}}((\mathfrak{m},\mathfrak{p})\uparrow\mathfrak{g}): 2^{\mathcal{N}_{\mathfrak{m}(\mathbb{R})}/M(\mathbb{R})}\to 2^{\mathcal{N}_{\mathfrak{g}(\mathbb{R})}/G(\mathbb{R})}$$

を定める。更に、関口 [S] により、自然な全単射

$$S_G:\mathcal{N}_{\mathfrak{s}}/K\tilde{\to}\mathcal{N}_{\mathfrak{g}(\mathbb{R})}/G(\mathbb{R})$$

が存在する。これを関口対応と呼ぶ（3.1 参照)。S_G が F_G 同変であることは容易に判る。S_G を通じて誘導 $Ind^{\mathbb{R}}((\mathfrak{m},\mathfrak{p})\uparrow\mathfrak{g})$ を写像

$$Ind^{\mathbb{R}}((\mathfrak{m},\mathfrak{p})\uparrow\mathfrak{g}): 2^{\mathcal{N}_{\mathfrak{s}_M}/K_M}\to 2^{\mathcal{N}_{\mathfrak{s}}/K}$$

とみておく。ここに $K_M:=M\cap K,\ \ \mathfrak{s}_M=\mathfrak{m}\cap\mathfrak{s}$ である。

Proposition 2.10 H を τ-stable かつ θ-stable な G の極大トーラスとし、$P=HN$ は H を Levi factor に、N を unipotent radical にもつ τ-stable な G の Borel 部分群とする（従って G は quasisplit)。このとき、

$$Ind^{\mathbb{R}}((\mathfrak{h},\mathfrak{p})\uparrow\mathfrak{g})(\{(0)_{\mathfrak{h}_s}\})=\mathcal{N}_{\mathfrak{s}}^{\mathfrak{g}-pr}/K$$

が成り立つ。

Proof. Δ を $R(\mathfrak{p},\mathfrak{h})$ の base とし $\Delta_{\mathbb{R}},\Delta_c$ をそれぞれ Δ の実ルート、complex ルートの集合とする：

$$\Delta_{\mathbb{R}}:=\{\alpha\in\Delta;\tau(\alpha)=\alpha\},\Delta_c=\{\alpha\in\Delta;\tau(\alpha)\neq\alpha\}.$$

(ここに $\tau(\alpha)(h):=\overline{\alpha(\tau(h))}\ \ (h\in\mathfrak{h})$ であって、$\tau(\alpha)=-\theta(\alpha)(\alpha\in R(\mathfrak{g},\mathfrak{h}))$ である。) $R(\mathfrak{p},\mathfrak{h})$ は τ-stable より Δ は虚ルートをもたず、$\Delta=\Delta_{\mathbb{R}}\cup\Delta_c$ である。ルートベクトル $X_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha\setminus\{0\}(\alpha\in\Delta)$ を $\alpha\in\Delta_{\mathbb{R}}$ に対しては $\tau(X_\alpha)=X_\alpha$ が、又 $\alpha\in\Delta_c$ に対しては $\tau(X_\alpha)=X_{\tau(\alpha)}$ が成り立つようにとり、$x=\sum_{\alpha\in\Delta}X_\alpha$ とおく。$x\in\mathfrak{n}(\mathbb{R})=(0)_{\mathfrak{h}(\mathbb{R})}+\mathfrak{n}(\mathbb{R})$ であり、また明かに x は $\mathfrak{g}$-principal であるから、実 Lie 環での誘導で

$$G(\mathbb{R})\cdot x\in Ind^{\mathbb{R}}((\mathfrak{h},\mathfrak{p})\uparrow\mathfrak{g})(\{(0)_{\mathfrak{h}(\mathbb{R})}\})$$

である。$F_G = F_G((0)_{\mathfrak{h}(\mathbb{R})})$ は Remark 2.9 により $Ind^{\mathbb{R}}((\mathfrak{h},\mathfrak{p})\uparrow\mathfrak{g})(\{(0)_{\mathfrak{h}(\mathbb{R})}\})$ に作用する。また、F_G は $\mathcal{N}^{\mathfrak{g}-pr}_{\mathfrak{g}(\mathbb{R})}/G(\mathbb{R})$ に推移的に作用するから

$$\mathcal{N}^{\mathfrak{g}-pr}_{\mathfrak{g}(\mathbb{R})}/G(\mathbb{R}) \subset Ind^{\mathbb{R}}((\mathfrak{h},\mathfrak{p})\uparrow\mathfrak{g})(\{(0)_{\mathfrak{h}(\mathbb{R})}\})$$

である。$\mathcal{N}^{\mathfrak{g}-pr}_{\mathfrak{g}}, \mathcal{N}_{\mathfrak{g}}$ は $\mathbb{R}$ 上定義されていること、$\mathcal{N}^{\mathfrak{g}-pr}_{\mathfrak{g}}$ は $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}$ で open dense であること、及び $\mathcal{N}^{\mathfrak{g}-pr}_{\mathfrak{g}(\mathbb{R})} = \mathcal{N}^{\mathfrak{g}-pr}_{\mathfrak{g}} \cap \mathfrak{g}(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ であることより $\mathcal{N}^{\mathfrak{g}-pr}_{\mathfrak{g}(\mathbb{R})}$ も $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}(\mathbb{R})} = \mathcal{N}_{\mathfrak{g}} \cap \mathfrak{g}(\mathbb{R})$ で open dense である。従って

$$\mathcal{N}^{\mathfrak{g}-pr}_{\mathfrak{g}(\mathbb{R})}/G(\mathbb{R}) = Ind^{\mathbb{R}}((\mathfrak{h},\mathfrak{p})\uparrow\mathfrak{g})(\{(0)_{\mathfrak{h}(\mathbb{R})}\})$$

関口対応を通じて

$$Ind^{\mathbb{R}}((\mathfrak{h},\mathfrak{p})\uparrow\mathfrak{g})(\{(0)_{\mathfrak{h}_s}\}) = \mathcal{N}^{\mathfrak{g}-pr}_{\mathfrak{s}}/K$$

q.e.d

Theorem 1.10 、Remark 1.11,(i) 、Proposition 2.5 及び Proposition 2.10 により、次を得る。

Theorem 2.11 $(\mathfrak{q}, H(\mathbb{R}), \delta, \nu)$ $(\mathfrak{q} = \mathfrak{l} + \mathfrak{u})$ 及び $P_L = HN_L$ は 1.1 の data とし

$$X = X_{G(\mathbb{R})}(\mathfrak{q}, H(\mathbb{R}), \delta, \nu) = \left(\mathcal{R}^{\mathfrak{g}}_{\mathfrak{q}}\right)^{\dim(\mathfrak{u}\cap\mathfrak{k})}\left(Ind^{L(\mathbb{R})}_{P_L(\mathbb{R})}(\delta\otimes\nu)\right)$$

を対応する標準 $(\mathfrak{g},K)$ 加群とする。このとき、$Ass(X)$ の $\mathfrak{g}$-principal な K 軌道の集合 $Ass(X)^{\mathfrak{g}-pr}/K$ は次のように記述される。

$$Ass(X)^{\mathfrak{g}-pr}/K = [Ind^{\theta}\left((\mathfrak{l},\mathfrak{q}^-)\uparrow\mathfrak{g}\right)\circ Ind^{\mathbb{R}}((\mathfrak{h},\mathfrak{p}_L)\uparrow\mathfrak{l})(\{(0)_{\mathfrak{h}_s}\})]^{\mathfrak{g}-pr}$$

3 Large type の Borel 部分環の構成

この節では H τ-stable かつ θ-stable な G の極大トーラス、Σ は $R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})_{i\mathbb{R}}$ の正系、$\mathfrak{q} = \mathfrak{l} + \mathfrak{u}$ $(\mathfrak{h} \subset \mathfrak{l})$ は対 $(\mathfrak{h},\Sigma)$ に属する θ-stable な 放物型部分環とする。1.1 のように $\mathfrak{q}$ を含む標準 $(\mathfrak{g},K)$ 加群の data $(\mathfrak{q}, H(\mathbb{R}), \delta, \nu)$ 、及び $L = exp(\mathfrak{l})$ の τ-stable な Borel 部分群 $P_L = HN_L$ をとるとき、第 1 節、第 2 節の結果より

$$(3.1) Ass(X_{G(\mathbb{R})}(\mathfrak{q}, H(\mathbb{R}), \delta, \nu))^{\mathfrak{g}-pr}/K = [Ind^{\theta}\left((\mathfrak{l},\mathfrak{q}^-)\uparrow\mathfrak{g}\right)\circ Ind^{\mathbb{R}}((\mathfrak{h},\mathfrak{p}_L)\uparrow\mathfrak{l})(\{(0)_{\mathfrak{h}_s}\})]^{\mathfrak{g}-pr}$$

$$= [Ind^{\theta}\left((\mathfrak{l},\mathfrak{q}^-)\uparrow\mathfrak{g}\right)(\mathcal{N}_{\mathfrak{s}_L}^{\mathfrak{l}-pr}/K_L)]^{\mathfrak{g}-pr} = [\mathcal{N}_{\mathfrak{s}}^{\mathfrak{g}-pr}/K]_{\mathfrak{q}^-} \simeq \mathcal{B}_{\mathfrak{q}^-}^L/K \simeq \mathcal{P}_{\mathfrak{q}^-}^L/K$$

となるのであった。ここでは Σ が large type のとき、$\mathcal{N}_{\mathfrak{s}_L}^{\mathfrak{l}-pr}/K_L$ の元の適当な choice に対して $\mathcal{B}_{\mathfrak{q}}^L$ の元が、この K_L 軌道をもとに構成され、これが対応

$$[Ind^{\theta}((\mathfrak{l},\mathfrak{q})\uparrow\mathfrak{g})(\mathcal{N}_{\mathfrak{s}_L}^{\mathfrak{l}-pr}/K_L)]^{\mathfrak{g}-pr} \simeq \mathcal{B}_{\mathfrak{q}}^L/K$$

を与えること、及び、これに関連して得られる結果について解説する。
先ず、関口対応について復習しておく（[S],[O] を参照)。

Theorem 3.1(Sekiguchi [S]) $\mathcal{O}_\theta \in \mathcal{N}_{\mathfrak{s}}/K$ に対して、次の条件を満たす $\mathfrak{g}$ の S-triple (h,x,y) をとることができる：

(3.2.a) $h \in \mathfrak{k}$, $x, y \in \mathfrak{s}$
(3.2.b) $\tau(h) = -h$, $\tau(x) = y$
(3.2.c) $x \in \mathcal{O}_\theta$

((3.2.a,b) を満たす S-triple を strictly normal S-triple という。)
(h,x,y) に対して、

$$h_{\mathbb{R}} = i(x-y), x_{\mathbb{R}} = (x+y+ih)/2, y_{\mathbb{R}} = (x+y-ih)/2$$

とおくと $(h_{\mathbb{R}}, x_{\mathbb{R}}, y_{\mathbb{R}})$ は $\mathfrak{g}(\mathbb{R})$ の S-triple であって、

$$\theta(h_{\mathbb{R}}) = -h_{\mathbb{R}}, \theta(x_{\mathbb{R}}) = -y_{\mathbb{R}}$$

を満たす。$\mathcal{O}_{\mathbb{R}} := G(\mathbb{R})\cdot x_{\mathbb{R}} \in \mathcal{N}_{\mathfrak{g}(\mathbb{R})}/G(\mathbb{R})$ とおけば対応 $\mathcal{O}_\theta \mapsto \mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ が (h,x,y) のとり方によらず定義されて、全単射

$$S_G : \mathcal{N}_{\mathfrak{s}}/K \tilde{\to} \mathcal{N}_{\mathfrak{g}(\mathbb{R})}/G(\mathbb{R})$$

を定める。この全単射を関口対応という。

さて、$P_L = HN_L$ を L の τ-stable な Borel 部分群とする。$\mathfrak{b} := \mathfrak{p}_L + \mathfrak{u}$ は $\mathfrak{g}$ の Borel 部分環となる。$[\mathfrak{l},\mathfrak{l}]\cap\mathfrak{h}_s$ は $[\mathfrak{l},\mathfrak{l}]\cap\mathfrak{s}$ の極大可換部分空間より L に付随した有限群 F_L として

$$F_L = \{a \in exp([\mathfrak{l},\mathfrak{l}]\cap\mathfrak{h}_s); Ad(a^2)\mid_{\mathfrak{l}} = id_{\mathfrak{l}}\}$$

をとる。[S] により $\mathfrak{l}(\mathbb{R})$ の S-triple $(h_{\mathbb{R}}^0, x_{\mathbb{R}}^0, y_{\mathbb{R}}^0)$ を次の条件を満たすようにとることができる。

(3.3.a) $h^0_{\mathbb{R}} \in \mathfrak{h}$
(3.3.b) $\theta(h^0_{\mathbb{R}}) = -h^0_{\mathbb{R}},\ \ \theta(x^0_{\mathbb{R}}) = -y^0_{\mathbb{R}}$
(3.3.c) $x^0_{\mathbb{R}} \in \mathfrak{n}_L(\mathbb{R}) \cap \mathcal{N}^{\mathfrak{l}-pr}_{\mathfrak{l}(\mathbb{R})}$

Proposition 1.7 と関口対応 S_L が F_L 同変であることから、$\mathcal{C} := F_L \cdot x^0_{\mathbb{R}} \subset \mathfrak{n}_L(\mathbb{R})$ は $\mathcal{N}^{\mathfrak{l}-pr}_{\mathfrak{l}(\mathbb{R})}/L(\mathbb{R})$ の代表系を含む。$a \in F_L$ を1つとり

$$(h_{\mathbb{R}}, x_{\mathbb{R}}, y_{\mathbb{R}}) = (a \cdot h^0_{\mathbb{R}}, a \cdot x^0_{\mathbb{R}}, a \cdot y^0_{\mathbb{R}})$$

とおくと $(h_{\mathbb{R}}, x_{\mathbb{R}}, y_{\mathbb{R}})$ も (3.3.a-c) を満たす $\mathfrak{l}(\mathbb{R})$ の S-triple である。この S-triple に対応した L の元 $s_{x_{\mathbb{R}}}, \sigma_{x_{\mathbb{R}}}$ を

$$s_{x_{\mathbb{R}}} := exp\,(\pi i(x_{\mathbb{R}} + y_{\mathbb{R}})/4)\,,\quad \sigma_{x_{\mathbb{R}}} := s^2_{x_{\mathbb{R}}} \tag{3.4}$$

により定める。また、S-triple $(h_\theta, x_\theta, y_\theta)$ を

$$h_\theta := s_{x_{\mathbb{R}}} \cdot h_{\mathbb{R}},\quad x_\theta := s_{x_{\mathbb{R}}} \cdot x_{\mathbb{R}},\quad y_\theta := s_{x_{\mathbb{R}}} \cdot y_{\mathbb{R}} \tag{3.5}$$

により定める。このとき、次が成り立つ。

Proposition 3.2 (i) $(h_\theta, x_\theta, y_\theta)$ は strictly normal S-triple であって、

$$h_{\mathbb{R}} = i(x_\theta - y_\theta),\quad x_{\mathbb{R}} = (x_\theta + y_\theta + ih_\theta)/2,\quad y_{\mathbb{R}} = (x_\theta + y_\theta - ih_\theta)/2$$

が成り立つ。従って、$K_L \cdot x_\theta \in \mathcal{N}^{\mathfrak{l}-pr}_{\mathfrak{s}_L}/K_L$ は関口対応 $S_L : \mathcal{N}_{\mathfrak{s}_L}/K_L \tilde{\to} \mathcal{N}_{\mathfrak{l}(\mathbb{R})}/L(\mathbb{R})$ で $L(\mathbb{R}) \cdot x_{\mathbb{R}}$ に対応する巾零 K_L 軌道である。

(ii) $F_L \cdot x_\theta$ は $\mathcal{N}^{\mathfrak{l}-pr}_{\mathfrak{s}_L}/K_L$ の代表系を含む。

(iii) $s_{x_{\mathbb{R}}} \cdot \mathfrak{p}_L$ は large type の $\mathfrak{l}$ の Borel 部分環である。

(iv) $\sigma_{x_{\mathbb{R}}} \cdot \mathfrak{h} = \mathfrak{h}$ である。従って、$\sigma_{x_{\mathbb{R}}}$ は Weyl 群 $W_G = N_G(H)/H$ の元を定めるが、その作用に関して$\sigma_{x_{\mathbb{R}}} \cdot R(\mathfrak{p}_L, \mathfrak{h}) = -R(\mathfrak{p}_L, \mathfrak{h})$ が成り立つ。特に、$\sigma_{x_{\mathbb{R}}}$ の定める $W_L = N_L(H)/H$ の元は、W_L の最長元に一致する。

(v) $s_{x_{\mathbb{R}}} \cdot \mathfrak{b} = s_{x_{\mathbb{R}}} \cdot (\mathfrak{p}_L + \mathfrak{u}) \subset \mathfrak{q}$ は θ-stable な $\mathfrak{g}$ の Borel 部分環である。また、$s_{x_{\mathbb{R}}} \cdot \mathfrak{h}$ は θ-stable な $s_{x_{\mathbb{R}}} \cdot \mathfrak{b}$ の Cartan 部分環である。

$\Delta(\mathfrak{b}, \mathfrak{h})$ を $R(\mathfrak{b}, \mathfrak{h})$ の base とする。また、$\alpha \in \Delta(\mathfrak{b}, \mathfrak{h}) \cap R(\mathfrak{u}, \mathfrak{h})$ に対して $\mathfrak{g}_\alpha$ が生成する $\mathfrak{u}$ の既約部分 $\mathfrak{l}$ 加群を $\mathfrak{u}(\alpha)$ とおく。次の条件を満たす $a \in F_L$ の成す F_L の部分群を $F_L(\mathfrak{q})$ とおく：

(3.6) $\theta(\mathfrak{u}(\alpha)) = \mathfrak{u}(\alpha)$ なる任意の $\alpha \in \Delta(\mathfrak{b},\mathfrak{h}) \cap R(\mathfrak{u},\mathfrak{h})$ に対して $\alpha(a) = \pm 1$ が成り立つ。

このとき、次が成り立つ。

Theorem 3.3 Σ は large type と仮定する。

(i) $x^1_{\mathbb{R}} \in \mathcal{C} = F_L \cdot x^0_{\mathbb{R}}$ を $s_{x^1_{\mathbb{R}}} \cdot \mathfrak{b} \in \mathcal{B}^L_{\mathfrak{g}}$ となるようにとることができる。特に、$\mathcal{B}^L_{\mathfrak{q}}/K \neq \emptyset$ である。従って、Proposition 1.5,(i) の逆が成り立つ。

(ii) $F_L(\mathfrak{q}) \cdot \{s_{x^1_{\mathbb{R}}} \cdot \mathfrak{b}\} = \{a \cdot (s_{x^1_{\mathbb{R}}} \cdot \mathfrak{b}); a \in F_L(\mathfrak{q})\}$ は $\mathcal{B}^L_{\mathfrak{q}}/K$ の代表系を含む。従って、全単射

$$F_L(\mathfrak{q}) \cdot \{s_{x^1_{\mathbb{R}}} \cdot \mathfrak{b}\}/\overset{K}{\sim} \ \tilde{\to} \ \mathcal{B}^L_{\mathfrak{q}}/K$$

が定まる。ここに、$\mathfrak{b}^c_1, \mathfrak{b}^c_2 \in F_L(\mathfrak{q}) \cdot \{s_{x^1_{\mathbb{R}}} \cdot \mathfrak{b}\}$ について、

$$\mathfrak{b}^c_1 \overset{K}{\sim} \mathfrak{b}^c_2 \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \mathfrak{b}^c_2 = k \cdot \mathfrak{b}^c_1 ({}^{\exists}k \in K)$$

である。

(iii) $F_L(\mathfrak{q})$ は商集合 $F_L(\mathfrak{q}) \cdot \{s_{x^1_{\mathbb{R}}} \cdot \mathfrak{b}\}/\overset{K}{\sim}$ に自然に推移的に作用する。従って、対応

$$F_L(\mathfrak{q}) \cdot \{s_{x^1_{\mathbb{R}}} \cdot \mathfrak{b}\}/\overset{K}{\sim} \ \tilde{\to} \ \mathcal{B}^L_{\mathfrak{q}}/K \tilde{\to} [\mathcal{N}^{\mathfrak{g}-pr}_{\mathfrak{s}}/K]_{\mathfrak{q}}$$

を通じて $F_L(\mathfrak{q})$ は $[\mathcal{N}^{\mathfrak{g}-pr}_{\mathfrak{s}}/K]_{\mathfrak{q}}$ に推移的に作用する。

(iv) θ が inner type のとき、$F_L(\mathfrak{q}) = F^G_L$ が成り立つ。したがって、F^G_L は $[\mathcal{N}^{\mathfrak{g}-pr}_{\mathfrak{s}}/K]_{\mathfrak{q}}$ に自然に、推移的に作用する。

結果として、(3.1) の仮定で、

$$\mathcal{B}^L_{\mathfrak{q}^-}/K \simeq Ass(X_{G(\mathbb{R})}(\mathfrak{q}, H(\mathbb{R}), \delta, \nu))^{\mathfrak{g}-pr}/K$$

を通じて、$F_L(\mathfrak{q}) = F_L(\mathfrak{q}^-)$ を推移的に $Ass(X_{G(\mathbb{R})}(\mathfrak{q}, H(\mathbb{R}), \delta, \nu))^{\mathfrak{g}-pr}/K$ に作用させることができる。

以下、Theorem 3.3 の証明の方針について大雑把に解説する。

$\Delta(\mathfrak{b},\mathfrak{h})$ を $R(\mathfrak{b},\mathfrak{h})$ の base とする。$s_{x_{\mathbb{R}}} \cdot \mathfrak{b}$ の θ-stable な Cartan 部分環 $s_{x_{\mathbb{R}}} \cdot \mathfrak{h}$ について、$s_{x_{\mathbb{R}}} \cdot \mathfrak{b}$ は θ-stable であるから $R(\mathfrak{g}, s_{x_{\mathbb{R}}} \cdot \mathfrak{h})$ は実ルートをもたない。ルート系の対応

$$R(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \tilde{\to} R(\mathfrak{g}, s_{x_{\mathbb{R}}} \cdot \mathfrak{h}) \ \ (\alpha \mapsto s_{x_{\mathbb{R}}} \cdot \alpha = \alpha \circ s^{-1}_{x_{\mathbb{R}}})$$

を考えるとき、次が成り立つ。

Proposition 3.4　(i) $s_{x_{\mathbb{R}}}\cdot\alpha$ $(\alpha\in\Delta(\mathfrak{p}_L,\mathfrak{h}))$ は complex ルート、又は非コンパクトな虚ルートである (c.f, Proposition 3.2,(ii)) 。
(ii) $\alpha\in\Delta(\mathfrak{b},\mathfrak{h})\cap R(\mathfrak{u},\mathfrak{h})$ について、
(a) $s_{x_{\mathbb{R}}}\cdot\alpha$ が虚ルート $\Longleftrightarrow$ $\theta(\mathfrak{u}(\alpha))=\mathfrak{u}(\alpha)$
(b) $\theta(\mathfrak{u}(\alpha))=\mathfrak{u}(\alpha)$ のとき、$C_\alpha(x_{\mathbb{R}})\in\{\pm1\}$ が定まり、

$$\theta(s_{x_{\mathbb{R}}}\cdot X_\alpha)=C_\alpha(x_{\mathbb{R}})(s_{x_{\mathbb{R}}}\cdot X_\alpha)$$

(c) $a\in F_L$ について、$C_\alpha(a\cdot x_{\mathbb{R}})=\alpha(a^2)C_\alpha(x_{\mathbb{R}})$
(d) $R(\mathfrak{u}(\alpha),\mathfrak{h})_{i\mathbb{R}}\neq\emptyset$ なら常に $C_\alpha(x_{\mathbb{R}})=-1({}^\forall x_{\mathbb{R}}\in\mathcal{C})$ である。従って、このとき (b) より、$s_{x_{\mathbb{R}}}\cdot\alpha$ は非コンパクトである。又、任意の $a\in F_L$ について、$\alpha(a^2)=1$ である。
(iii) $a_1\in F_L$ を $\theta(\mathfrak{u}(\alpha))=\mathfrak{u}(\alpha), R(\mathfrak{u}(\alpha),\mathfrak{h})_{i\mathbb{R}}=\emptyset$ なる任意の $\alpha\in\Delta(\mathfrak{b},\mathfrak{h})\cap R(\mathfrak{u},\mathfrak{h})$ に対して $C_\alpha(a_1\cdot x^0_{\mathbb{R}})=-1$ となるように選ぶことができる。

$x^1_{\mathbb{R}}:=a_1\cdot x^0_{\mathbb{R}}\in\mathcal{C}$ とおく。このとき、Proposition 3.4 より

$$\Delta(s_{x^1_{\mathbb{R}}}\cdot\mathfrak{b},s_{x^1_{\mathbb{R}}}\cdot\mathfrak{h})=s_{x^1_{\mathbb{R}}}\cdot\Delta(\mathfrak{p}_L,\mathfrak{h})\cup s_{x^1_{\mathbb{R}}}\cdot\{\Delta(\mathfrak{b},\mathfrak{h})\cap R(\mathfrak{u},\mathfrak{h})\}$$

は complex ルートと非コンパクトな虚ルートから成ることが判り $\mathfrak{b}^c:=s_{x^1_{\mathbb{R}}}\cdot\mathfrak{b}$ は large type である。又、Proposition 3.4 (ii,c,d) と $\theta(\mathfrak{u}(\alpha))=\mathfrak{u}(\alpha)$ なる任意の $\alpha\in\Delta(\mathfrak{b},\mathfrak{h})\cap R(\mathfrak{u},\mathfrak{h})$ に対して $C_\alpha(x^1_{\mathbb{R}})=-1$ であることに注目すると $a\in F_L$ について

$a\cdot\mathfrak{b}^c=s_{a\cdot x^1_{\mathbb{R}}}\cdot\mathfrak{b}\in\mathcal{B}^L_{\mathfrak{g}}$
$\Longleftrightarrow C_\alpha(a\cdot x^1_{\mathbb{R}})=-1$ for all $\alpha\in\Delta(\mathfrak{b},\mathfrak{h})\cap R(\mathfrak{u},\mathfrak{h})$ s.t. $\theta(\mathfrak{u}(\alpha))=\mathfrak{u}(\alpha)$
$\Longleftrightarrow \alpha(a^2)=1$ for all $\alpha\in\Delta(\mathfrak{b},\mathfrak{h})\cap R(\mathfrak{u},\mathfrak{h})$ s.t. $\theta(\mathfrak{u}(\alpha))=\mathfrak{u}(\alpha)$
$\Longleftrightarrow a\in F_L(\mathfrak{q})$

これより

$$F_L(\mathfrak{q})\cdot\{\mathfrak{b}^c\}=\{s_{x_{\mathbb{R}}}\cdot\mathfrak{b};x_{\mathbb{R}}\in\mathcal{C},s_{x_{\mathbb{R}}}\cdot\mathfrak{b}\in\mathcal{B}^L_{\mathfrak{g}}\}$$

を得る。 $x^1_\theta:=s_{x^1_{\mathbb{R}}}\cdot x^1_{\mathbb{R}}\in\mathcal{N}^{\mathfrak{l}-pr}_{\mathfrak{s}_L}$ とおくとき、 $F_L\cdot x^1_\theta$ が $\mathcal{N}^{\mathfrak{l}-pr}_{\mathfrak{s}_L}/K_L$ の代表系を含むから $\{Ind^\theta\left((\mathfrak{l},\mathfrak{q})\uparrow\mathfrak{g}\right)(K_L\cdot x_\theta);x_\theta\in F_L\cdot x^1_\theta\}$ は

$$[Ind^\theta\left((\mathfrak{l},\mathfrak{q})\uparrow\mathfrak{g}\right)(\mathcal{N}^{\mathfrak{l}-pr}_{\mathfrak{s}_L}/K_L)]^{\mathfrak{g}-pr}=[\mathcal{N}^{\mathfrak{g}-pr}_{\mathfrak{s}}/K]_{\mathfrak{q}}$$

の代表系を含む。これより対応 $\mathcal{B}^L_{\mathfrak{q}}/K\overset{\sim}{\to}[\mathcal{N}^{\mathfrak{g}-pr}_{\mathfrak{s}}/K]_{\mathfrak{q}}$ を考えて、$\{s_{x_{\mathbb{R}}}\cdot\mathfrak{b};x_{\mathbb{R}}\in\mathcal{C}\}$ は $\mathcal{B}^L_{\mathfrak{q}}/K$ の代表系を含むことが判る。従って $F_L(\mathfrak{q})\cdot\{\mathfrak{b}^c\}$ も $\mathcal{B}^L_{\mathfrak{q}}/K$ の代表系を含む。又、$\mathfrak{b}^c_1,\mathfrak{b}^c_2\in F_L(\mathfrak{q})\cdot\{\mathfrak{b}^c\}$ と $a\in F_L(\mathfrak{q})$ について、

$$\mathfrak{b}_1^c \overset{K}{\sim} \mathfrak{b}_2^c \Longrightarrow a\cdot\mathfrak{b}_1^c \overset{K}{\sim} a\cdot\mathfrak{b}_2^c$$

が確かめられ、$F_L(\mathfrak{q})$ は商集合 $F_L(\mathfrak{q})\cdot\{\mathfrak{b}^c\}/\overset{K}{\sim}$ に自然に推移的に作用する。

更に、θ の base $\Delta^c := \Delta(s_{x^1_{\mathbb{R}}}\cdot\mathfrak{b}, s_{x^1_{\mathbb{R}}}\cdot\mathfrak{h})$ への作用が θ の graph automorphism に一致する。θ が inner なら Δ^c は complex ルートをもたないことになる。これより任意の $\alpha\in\Delta(\mathfrak{b},\mathfrak{h})\cap R(\mathfrak{u},\mathfrak{h})$ について $\theta(\mathfrak{u}(\alpha))=\mathfrak{u}(\alpha)$ (c.f., Proposition 3.4,(ii,a)) である。$a\in F_L$ について $\beta\in\Delta(\mathfrak{p}_L,\mathfrak{h})$ なら F_L の定義より $\beta(a)=\pm1$ であるから

$$\begin{aligned}
&a\in F_L(\mathfrak{q})\\
\Longleftrightarrow\quad &\alpha(a^2)=1 \text{ for all } \alpha\in\Delta(\mathfrak{b},\mathfrak{h})\cap R(\mathfrak{u},\mathfrak{h})\\
\Longleftrightarrow\quad &\alpha(a^2)=1 \text{ for all } \alpha\in\Delta(\mathfrak{b},\mathfrak{h})\\
\Longleftrightarrow\quad &Ad(a^2)=id_{\mathfrak{g}}
\end{aligned}$$

これより $F_L(\mathfrak{q})=F_L^G$ を得る。

文献

[AV] J. Adams and D. Vogan, L-groups, projective representations, and the Langlands classification, Amer. J. Math. 113(1991), 45-138.

[BV] D. Barbasch and D. Vogan, Unipotent representations of complex semisimple groups, Ann. of Math. 121(1985), 41-110.

[KR] B. Kostant and S. Rallis, Orbits and representations associated with symmetric spaces, Amer. J. Math. 93(1971),753-809.

[LS] G. Lusztig and N. Spaltenstein, Induced unipotent classes, J. London Math. Soc. (2),19(1979),41-52.

[O] T. Ohta, The closure of nilpotent orbits in the classical symmetric pairs and their singularities, Tohoku Math. J. 43(1991),161-211.

[S] J. Sekiguchi, Remarks on real nilpotent orbits of a symmetric pair, J. Math. Soc. Japan 39(1987), 127-138.

[V1] D. Vogan, Representations of real reductive Lie groups, Birkhauser, Boston-Basel-Stuttgart, 1981.

[V2] D. Vogan, Associated varieties and unipotent representations, in "Harmonic Analysis on reductive groups(W. Barker and P. Sally eds.)", Birkhauser, 1991, 315-388.

[Y] H. Yamashita, Associated variety and Gelfand-Kirillov dimension for discrete series of a semisimple Lie group, preprint.