

E_8 型単連結コンパクトリー群のランク 8 の極大部分群

五明 智 SATOSHI GOMYO

はじめに

単連結コンパクトリー群 G の極大ランクの極大部分群は A. Borel and J. de Siebenthal ([1]) により、分類されている。これらの部分群は、ある order p ($p = 2, 3, 5$) の automorphism σ により

$$G^\sigma = \{x \in G \mid \sigma(x) = x\}$$

と実現されることが知られている。横田らにより ([6][7][8])、 G_2, F_4, E_6, E_7 型のときは、 G^σ はすべて具体的に実現されている。 E_8 型のときは、それぞれ

$$A_1 \times E_7, \quad D_8, \quad A_8, \quad A_4 \times A_4, \quad A_2 \times E_6,$$

型の部分群が存在すると実現されることが知られている ([1]) が $A_1 \times E_7$ 型と D_8 型は、横田らにより ([2][5][6]) 具体的に実現されている。ここでは残りの G^σ の具体的実現を行なう。

type	$(E_8)^\sigma$	order of σ
A_8	$SU(9)/\mathbf{Z}_3$	3
$A_4 \times A_4$	$(SU(5) \times SU(5))/\mathbf{Z}_5$	5
$A_2 \times E_6$	$(SU(3) \times E_6)/\mathbf{Z}_3$	3

準備

\mathbf{C}^n の標準基を e_1, \dots, e_n 、 (\mathbf{x}, \mathbf{y}) を $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ により定義される対称双線型な内積とする。 \mathbf{C}^n の k 重外積ベキ空間 $\wedge^k(\mathbf{C}^n)$ ($0 \leq k \leq n$) 上に内積を

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_k, \mathbf{y}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{y}_k) &= \det((\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j)), & k \geq 1, \\ (a, b) &= ab, & a, b \in \wedge^0(\mathbf{C}^n) = \mathbf{C}, \end{aligned}$$

により定義する。 $\mathbf{u} \in \wedge^k(\mathbf{C}^n)$ に対して $*(\mathbf{u}) \in \wedge^{n-k}(\mathbf{C}^n)$ を

$$*(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}, e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) \quad \text{for } \mathbf{v} \in \wedge^{n-k}(\mathbf{C}^n),$$

を満たすように定義する。

ρ と $d\rho$ を $SL(n, \mathbf{C})$ と $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$ の $\wedge^k(\mathbf{C}^n)$ ($k = 1, \dots, n$) 上の表現

$$\rho(A)(\mathbf{x}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}_k) = A\mathbf{x}_1 \wedge \cdots \wedge A\mathbf{x}_k,$$

$$d\rho(X)(\mathbf{x}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}_k) = \sum_{j=1}^k \mathbf{x}_1 \wedge \cdots \wedge X\mathbf{x}_j \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}_k,$$

とし、 $\wedge^0(\mathbf{C}^n) = \mathbf{C}$ 上の表現を

$$\rho(A)1 = 1, \quad d\rho(X)1 = 0,$$

とする。以下、記号 ρ と $d\rho$ は省略する。

$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \wedge^k(\mathbf{C}^n)$ ($1 \leq k \leq n$), に対して \mathbf{C}^n 上の変換 $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ を

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} : x \mapsto *(\mathbf{v} \wedge *(\mathbf{u} \wedge x)) + (-1)^{n-k} \frac{n-k}{n} (\mathbf{u}, \mathbf{v})x, \quad (x \in \mathbf{C}^n),$$

と定義する。すると $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ は $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$ の元となる。

§1 Subgroup $SU(9)/\mathbf{Z}_3$.

ベクトル空間

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(9, \mathbf{C}) \oplus \wedge^3(\mathbf{C}^9) \oplus \wedge^3(\mathbf{C}^9)$$

に、積を

$$(X, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = [(X_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1), (X_2, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2)]$$

ここで

$$\begin{cases} X = [X_1, X_2] + \mathbf{u}_1 \times \mathbf{v}_2 - \mathbf{u}_2 \times \mathbf{v}_1, \\ \mathbf{u} = X_1 \mathbf{u}_2 - X_2 \mathbf{u}_1 + *(\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2), \\ \mathbf{v} = -{}^t X_1 \mathbf{v}_2 + {}^t X_2 \mathbf{v}_1 - *(\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2), \end{cases}$$

により定義すると、 \mathfrak{g} は複素リー環になる。さらに、次の定理が成り立つ。

Theorem 1.1. *The Lie algebra \mathfrak{g} is a complex simple Lie algebra of type E_8 .*

\mathfrak{g} 上に共役線型写像 γ と内積 $\langle R_1, R_2 \rangle$ を

$$\begin{aligned} \gamma(X, \mathbf{u}, \mathbf{v}) &= (-X^*, -\bar{\mathbf{v}}, -\bar{\mathbf{u}}), \\ \langle R_1, R_2 \rangle &= -B(R_1, \gamma R_2), \end{aligned}$$

により定義する。ここで B は \mathfrak{g} の Killing form である。 \mathfrak{g} の Killing form は

$$B((X_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1), (X_2, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2)) = 60\text{tr}X_1X_2 + 60(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2) + 60(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1),$$

となり、従って

$$\langle (X_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1), (X_2, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2) \rangle = 60\text{tr}X_1X_2^* + 60(\mathbf{u}_1, \overline{\mathbf{u}_2}) + 60(\mathbf{v}_1, \overline{\mathbf{v}_2}),$$

は正定値 Hermite 内積となる。

すると [3] の Theorem 23 と同様に、群

$$E_8 = \{\alpha \in \text{Aut}(\mathfrak{g}) \mid \langle \alpha R_1, \alpha R_2 \rangle = \langle R_1, R_2 \rangle\}$$

は E_8 型単連結コンパクトリー群となる。

1 の三乗根 $\omega = \exp(2\pi i/3)$ を用いて E_8 の元 w を

$$w(X, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = (X, \omega\mathbf{u}, \omega^2\mathbf{v})$$

と定義し ($w^3 = 1$)、さらに部分群 $(E_8)^w$ を

$$(E_8)^w = \{\alpha \in E_8 \mid \alpha w = w\alpha\}$$

とする。

Theorem 1.2. *The subgroup $(E_8)^w$ of E_8 is isomorphic to the group $SU(9)/\mathbf{Z}_3$.*

Proof. 写像 $\varphi : SU(9) \rightarrow GL(\mathfrak{g})$ を、

$$\varphi(A)(X, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\text{Ad}(A)X, A\mathbf{u}, {}^tA^{-1}\mathbf{v})$$

と定義する。明らかに、 φ は準同型写像である。任意の $Y \in \mathfrak{su}(9)$ に対し、

$$\exp(\text{ad}(Y, 0, 0)) = \varphi(\exp Y)$$

が成立するので、 $\varphi(A)$ は \mathfrak{g} の自己同型写像であり、更に

$$\langle \varphi(A)R_1, \varphi(A)R_2 \rangle = \langle R_1, R_2 \rangle$$

が成立するので、 $\varphi(A) \in E_8$ となる。また $w = \varphi(\zeta I)$ ($\zeta = \exp(2\pi i/9)$) より、 $\varphi(A) \in (E_8)^w$ も明らかである。

$(E_8)^w$ のリー環は、

$$\{R \in \mathfrak{g} \mid \gamma R = R, wR = R\} = \{(X, 0, 0) \in \mathfrak{g} \mid X \in \mathfrak{su}(9)\} \cong \mathfrak{su}(9),$$

と同型になり、また $(E_8)^w$ は連結 ([4]) だから、 φ は全射である。

最後に、

$$\text{Ker}\varphi = \{I, \omega I, \omega^2 I\} \cong \mathbf{Z}_3$$

は明らかなので、

$$SU(9)/Z_3 \cong (E_8)^w$$

が得られる。

□

§2 Subgroup $(SU(5) \times SU(5))/Z_5$.

ベクトル空間

$$\mathfrak{l} = g_0 \oplus g_1 \oplus g_2 \oplus g_3 \oplus g_4$$

ここで

$$\begin{aligned} g_0 &= \mathfrak{sl}(5, \mathbf{C}) \oplus \mathfrak{sl}(5, \mathbf{C}), \\ g_1 &= \Lambda^1(\mathbf{C}^5) \otimes \Lambda^2(\mathbf{C}^5), & g_2 &= \Lambda^2(\mathbf{C}^5) \otimes \Lambda^1(\mathbf{C}^5), \\ g_3 &= \Lambda^2(\mathbf{C}^5) \otimes \Lambda^1(\mathbf{C}^5), & g_4 &= \Lambda^1(\mathbf{C}^5) \otimes \Lambda^2(\mathbf{C}^5), \end{aligned}$$

に、anti-symmetric な積を以下の様に定義する。

$$\begin{aligned} [g_0, g_0] &\subset g_0, & [(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)] &= ([X_1, X_2], [Y_1, Y_2]), \\ [g_0, g_1] &\subset g_1, & [(X, Y), \mathbf{a} \otimes \mathbf{x}] &= (X\mathbf{a}) \otimes \mathbf{x} + \mathbf{a} \otimes (Y\mathbf{x}), \\ [g_0, g_2] &\subset g_2, & [(X, Y), \mathbf{y} \otimes \mathbf{b}] &= (X\mathbf{y}) \otimes \mathbf{b} + \mathbf{y} \otimes (-{}^t Y\mathbf{b}), \\ [g_0, g_3] &\subset g_3, & [(X, Y), \mathbf{z} \otimes \mathbf{c}] &= (-{}^t X\mathbf{z}) \otimes \mathbf{c} + \mathbf{z} \otimes (Y\mathbf{c}), \\ [g_0, g_4] &\subset g_4, & [(X, Y), \mathbf{d} \otimes \mathbf{w}] &= (-{}^t X\mathbf{d}) \otimes \mathbf{w} + \mathbf{d} \otimes (-{}^t Y\mathbf{w}), \\ [g_1, g_4] &\subset g_0, & [\mathbf{a} \otimes \mathbf{x}, \mathbf{d} \otimes \mathbf{w}] &= (-\langle \mathbf{x}, \mathbf{w} \rangle \mathbf{a} \times \mathbf{d}, (\mathbf{a}, \mathbf{d})\mathbf{x} \times \mathbf{w}), \\ [g_2, g_3] &\subset g_0, & [\mathbf{y} \otimes \mathbf{b}, \mathbf{z} \otimes \mathbf{c}] &= ((\mathbf{b}, \mathbf{c})\mathbf{y} \times \mathbf{z}, (\mathbf{y}, \mathbf{z})\mathbf{c} \times \mathbf{b}), \\ [g_1, g_1] &\subset g_2 \quad \text{and} \quad [g_4, g_4] \subset g_3, \\ & & [\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{x}_1, \mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{x}_2] &= (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2) \otimes *(\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2), \\ [g_2, g_2] &\subset g_4 \quad \text{and} \quad [g_3, g_3] \subset g_1, \\ & & [\mathbf{y}_1 \otimes \mathbf{b}_1, \mathbf{y}_2 \otimes \mathbf{b}_2] &= *(\mathbf{y}_1 \wedge \mathbf{y}_2) \otimes (\mathbf{b}_1 \wedge \mathbf{b}_2), \\ [g_1, g_2] &\subset g_3 \quad \text{and} \quad [g_4, g_3] \subset g_2, \\ & & [\mathbf{a} \otimes \mathbf{x}, \mathbf{y} \otimes \mathbf{b}] &= *(\mathbf{y} \wedge \mathbf{a}) \otimes *(\mathbf{x} \wedge \mathbf{b}), \\ [g_2, g_4] &\subset g_1 \quad \text{and} \quad [g_3, g_1] \subset g_4, \\ & & [\mathbf{y} \otimes \mathbf{b}, \mathbf{d} \otimes \mathbf{w}] &= *(\mathbf{y} \wedge \mathbf{d}) \otimes *(\mathbf{w} \wedge \mathbf{b}). \end{aligned}$$

すると \mathfrak{l} は複素 graded (i.e., $[g_k, g_l] \subset g_m$ ここで $m \equiv k+l \pmod{5}$) リー環になる。さらに、次が成り立つ。

Theorem 2.1. *The Lie algebra \mathfrak{l} is a complex simple Lie algebra of type E_8 .*

\mathfrak{l} の Killing form は

$$B(R_1, R_2) = 60\text{tr}X_1X_2 + 60\text{tr}Y_1Y_2 - 60(\mathbf{x}_1, \mathbf{w}_2)(\mathbf{a}_1, \mathbf{d}_2) \\ - 60(\mathbf{x}_2, \mathbf{w}_1)(\mathbf{a}_2, \mathbf{d}_1) - 60(\mathbf{y}_1, \mathbf{z}_2)(\mathbf{b}_1, \mathbf{c}_2) - 60(\mathbf{y}_2, \mathbf{z}_1)(\mathbf{b}_2, \mathbf{c}_1),$$

となる。(ここで $R_i = (X, Y, \mathbf{a} \otimes \mathbf{x}, \mathbf{y} \otimes \mathbf{b}, \mathbf{z} \otimes \mathbf{c}, \mathbf{d} \otimes \mathbf{w})$ 。) \mathfrak{g} 上に共役線型写像 γ と正定値 Hermite 内積 $\langle R_1, R_2 \rangle$ を

$$\begin{aligned} \gamma(X, Y, \mathbf{a} \otimes \mathbf{x}, \mathbf{y} \otimes \mathbf{b}, \mathbf{z} \otimes \mathbf{c}, \mathbf{d} \otimes \mathbf{w}) \\ = (-X^*, -Y^*, \bar{\mathbf{d}} \otimes \bar{\mathbf{w}}, \bar{\mathbf{z}} \otimes \bar{\mathbf{c}}, \bar{\mathbf{y}} \otimes \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}} \otimes \bar{\mathbf{x}}), \\ \langle R_1, R_2 \rangle = -B(R_1, \gamma R_2) \\ = 60\text{tr}X_1X_2^* + 60\text{tr}Y_1Y_2^* + 60(\mathbf{x}_1, \bar{\mathbf{x}}_2)(\mathbf{a}_1, \bar{\mathbf{a}}_2) + 60(\mathbf{y}_1, \bar{\mathbf{y}}_2)(\mathbf{b}_1, \bar{\mathbf{b}}_2) \\ + 60(\mathbf{z}_1, \bar{\mathbf{z}}_2)(\mathbf{c}_1, \bar{\mathbf{c}}_2) + 60(\mathbf{w}_1, \bar{\mathbf{w}}_2)(\mathbf{d}_1, \bar{\mathbf{d}}_2) \end{aligned}$$

により定義する。

§1 と同様に、1 の五乗根 $\eta = \exp(2\pi i/5)$ を用いて、 E_8 型単連結コンパクトリー群

$$E_8 = \{\alpha \in \text{Aut}(\mathfrak{l}) \mid \langle \alpha R_1, \alpha R_2 \rangle = \langle R_1, R_2 \rangle\}$$

の元 ι を

$$\begin{aligned} \iota(X, Y, \mathbf{a} \otimes \mathbf{x}, \mathbf{y} \otimes \mathbf{b}, \mathbf{z} \otimes \mathbf{c}, \mathbf{d} \otimes \mathbf{w}) \\ = (X, Y, \eta(\mathbf{a} \otimes \mathbf{x}), \eta^2(\mathbf{y} \otimes \mathbf{b}), \eta^3(\mathbf{z} \otimes \mathbf{c}), \eta^4(\mathbf{d} \otimes \mathbf{w})). \end{aligned}$$

と定義し ($\iota^5 = 1$)、部分群 $(E_8)^\iota$ を

$$(E_8)^\iota = \{\alpha \in E_8 \mid \alpha \iota = \iota \alpha\}$$

とする。§1 Theorem 1.2 と同様に、次の定理が得られる。

Theorem 2.2. *The subgroup $(E_8)^\iota$ of E_8 is isomorphic to the group $(SU(5) \times SU(5))/\mathbf{Z}_5$.*

§3 Subgroup $(SU(3) \times E_6)/\mathbf{Z}_3$.

この section では、複素共役を τ で表わす。

\mathfrak{C} を、実 Cayley algebra として、 \mathfrak{C} の共役を \bar{x} で表わす。

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{J}(3, \mathfrak{C}) = \{X \in M(3, \mathfrak{C}) \mid X = X^*\}$$

は、積

$$X \circ Y = \frac{1}{2}(XY + YX)$$

により、実 Jordan algebra になる。複素 Jordan algebra $\mathfrak{J}^{\mathbb{C}}$ 上に、内積 (X, Y) 、正定値 Hermite 内積 $\langle X, Y \rangle$ 、cross product $X \times Y$ 、cubic form (X, Y, Z) と determination $\det X$ を、以下の様に定義する。

$$\begin{aligned}(X, Y) &= \text{tr}(X \circ Y), \\ \langle X, Y \rangle &= (\tau X, Y), \\ X \times Y &= X \circ Y - \frac{1}{2}(\text{tr}(X)Y + \text{tr}(Y)X) + \frac{1}{2}\{\text{tr}(X)\text{tr}(Y) - (X, Y)\}I, \\ (X, Y, Z) &= (X, Y \times Z) = (X \times Y, Z), \\ \det X &= (X, X, X).\end{aligned}$$

横田 ([6]) により、複素 E_6 型リー環は

$$\mathfrak{e}_6^{\mathbb{C}} = \{\phi \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{J}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{J}^{\mathbb{C}}) \mid (\phi X, X, X) = 0\}$$

と実現され、また群

$$E_6 = \left\{ \alpha \in \text{Iso}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{J}^{\mathbb{C}}) \mid \begin{array}{l} \det \alpha X = \det X \\ \langle \alpha X, \alpha Y \rangle = \langle X, Y \rangle \end{array} \right\}$$

は E_6 型単連結コンパクトリー群であり、そのリー環は

$$\mathfrak{e}_6 = \{\phi \in \mathfrak{e}_6^{\mathbb{C}} \mid \langle \phi X, Y \rangle + \langle X, \phi Y \rangle = 0\}.$$

となることが知られている。

8 次元ベクトル空間 $\mathbb{C}^3 \otimes \mathfrak{J}^{\mathbb{C}}$ の元を

$$\mathbf{Y} = (Y_i) = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix}, \quad (Y_i \in \mathfrak{J}^{\mathbb{C}})$$

と書く。 $\phi \in \text{Hom}(\mathfrak{J}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{J}^{\mathbb{C}})$, $X = (x_{ij}) \in M(3, \mathbb{C})$ 及び $\mathbf{Y} = (Y_i) \in \mathbb{C}^3 \otimes \mathfrak{J}^{\mathbb{C}}$ に対して、 $\phi \mathbf{Y}, X \mathbf{Y} \in \mathbb{C}^3 \otimes \mathfrak{J}^{\mathbb{C}}$ を

$$\circ \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \phi Y_1 \\ \phi Y_2 \\ \phi Y_3 \end{bmatrix}, \quad X \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} x_{11}Y_1 + x_{12}Y_2 + x_{13}Y_3 \\ x_{21}Y_1 + x_{22}Y_2 + x_{23}Y_3 \\ x_{31}Y_1 + x_{32}Y_2 + x_{33}Y_3 \end{bmatrix}.$$

と定義する。さらに $\mathbf{Y} = (Y_i), \mathbf{Z} = (Z_i) \in \mathbb{C}^3 \otimes \mathfrak{J}^{\mathbb{C}}$ に対し、内積 (\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) 、正定値 Hermite 内積 $\langle \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \rangle$ 、cross product $\mathbf{Y} \times \mathbf{Z}$ 、 $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ の元 $\mathbf{Y} * \mathbf{Z}$ 及び $\mathfrak{e}_6^{\mathbb{C}}$ の元 $\mathbf{Y} \vee \mathbf{Z}$ を、以下の様に定義する。

$$(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = (Y_1, Z_1) + (Y_2, Z_2) + (Y_3, Z_3),$$

$$\langle \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \rangle = \langle Y_1, Z_1 \rangle + \langle Y_2, Z_2 \rangle + \langle Y_3, Z_3 \rangle,$$

$$\mathbf{Y} \times \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Y_2 \times Z_3 - Z_2 \times Y_3 \\ Y_3 \times Z_1 - Z_3 \times Y_1 \\ Y_1 \times Z_2 - Z_1 \times Y_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Y} * \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} (Y_1, Z_1) & (Y_1, Z_2) & (Y_1, Z_3) \\ (Y_2, Z_1) & (Y_2, Z_2) & (Y_2, Z_3) \\ (Y_3, Z_1) & (Y_3, Z_2) & (Y_3, Z_3) \end{bmatrix} - \frac{1}{3}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})I,$$

$$\mathbf{Y} \vee \mathbf{Z} = Y_1 \vee Z_1 + Y_2 \vee Z_2 + Y_3 \vee Z_3.$$

ベクトル空間

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{sl}(3, \mathbf{C}) \oplus \mathfrak{e}_6^{\mathbf{C}} \oplus \mathbf{C}^3 \otimes \mathfrak{J}^{\mathbf{C}} \oplus \mathbf{C}^3 \otimes \mathfrak{J}^{\mathbf{C}}$$

に、積を

$$(X, \phi, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = [(X_1, \phi_1, \mathbf{Y}_1, \mathbf{Z}_1), (X_2, \phi_2, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Z}_2)]$$

ここで

$$\begin{cases} X = [X_1, X_2] + \frac{1}{4}\mathbf{Y}_1 \circ \mathbf{Z}_2 - \frac{1}{4}\mathbf{Y}_2 \circ \mathbf{Z}_1, \\ \phi = [\phi_1, \phi_2] + \frac{1}{2}\mathbf{Y}_1 \vee \mathbf{Z}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{Y}_2 \vee \mathbf{Z}_1, \\ \mathbf{Y} = \phi_1 \mathbf{Y}_2 - \phi_2 \mathbf{Y}_1 + X_1 \mathbf{Y}_2 - X_2 \mathbf{Y}_1 - \mathbf{Z}_1 \times \mathbf{Z}_2, \\ \mathbf{Z} = -{}^t\phi_1 \mathbf{Z}_2 + {}^t\phi_2 \mathbf{Z}_1 - {}^tX_1 \mathbf{Z}_2 + {}^tX_2 \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Y}_1 \times \mathbf{Y}_2. \end{cases}$$

により定義する。

この環 \mathfrak{m} は、[3] で述べられている複素 E_8 型リー環 $\mathfrak{e}_8^{\mathbf{C}}$ と、写像

$$(\Phi(\phi, U, V, \nu), (X, Y, \xi, \eta), (Z, W, \zeta, \omega), r, s, t)$$

$$\rightarrow \left(\begin{bmatrix} \frac{2}{3}\nu & -\frac{1}{2}\xi & \frac{1}{2}\zeta \\ \frac{1}{2}\omega & -\frac{1}{3}\nu - r & t \\ \frac{1}{2}\eta & s & -\frac{1}{3}\nu + r \end{bmatrix}, \phi, \begin{bmatrix} -2U \\ Z \\ X \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2V \\ Y \\ -W \end{bmatrix} \right).$$

により同型となる。従って次が成り立つ。

Theorem 3.1. *The Lie algebra \mathfrak{m} is a complex simple Lie algebra of type E_8 .*

\mathfrak{l} の Killing form は

$$B(R_1, R_2) = 60\text{tr}(X_1 X_2) + \frac{5}{2}B_{\mathfrak{e}_6^{\mathbf{C}}}(\phi_1, \phi_2) + 15(\mathbf{Y}_1, \mathbf{Z}_2) + 15(\mathbf{Y}_2, \mathbf{Z}_1),$$

となる。(ここで $R_i = (X_i, \phi_i, \mathbf{Y}_i, \mathbf{Z}_i)$ 、また $B_{\mathfrak{e}_6^{\mathbf{C}}}$ は $\mathfrak{e}_6^{\mathbf{C}}$ の Killing form である。)

\mathfrak{m} 上に共役線型写像 γ と正定値 Hermite 内積 $\langle R_1, R_2 \rangle$ を

$$\begin{aligned} \gamma(X, \phi, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) &= (-\tau^t X, -\tau^t \phi \tau, -\tau \mathbf{Z}, -\tau \mathbf{Y}), \\ \langle R_1, R_2 \rangle &= -B(R_1, \gamma R_2) \\ &= 60 \operatorname{tr}(\tau^t X_1) X_2 + \frac{5}{2} B_{e_6}(\tau^t \phi_1 \tau, \phi_2) + 15 \langle \mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2 \rangle + 15 \langle \mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2 \rangle \end{aligned}$$

により定義する。

§1 と同様に、 E_8 型単連結コンパクトリー群

$$E_8 = \{ \alpha \in \operatorname{Aut}(\mathfrak{m}) \mid \langle \alpha R_1, \alpha R_2 \rangle = \langle R_1, R_2 \rangle \}$$

の元 δ を

$$\delta(X, \phi, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = (X, \phi, \omega \mathbf{Y}, \omega^2 \mathbf{Z})$$

と定義し ($\delta^3 = 1$)、部分群 $(E_8)^\delta$ を

$$(E_8)^\delta = \{ \alpha \in E_8 \mid \alpha \delta = \delta \alpha \}$$

とすると、§1 Theorem 1.2 と同様に、次の定理が得られる。

Theorem 3.2. *The subgroup $(E_8)^\delta$ is isomorphic to the group $(SU(3) \times E_6)/\mathbf{Z}_3$*

REFERENCES

1. A. Borel and J. de Siebenthal, *Les sous-groupes fermes de rang maximum des groupes de Lie rang*, Comment. Math. Helv. **23** (1949), 200–221.
2. T. Imai and I. Yokota, *Non-compact simple Lie group $G = E_{8(-24)}$ of type E_8* , J. Fac. Sci. Shinshu Univ. **15** (1980), 53–76.
3. T. Imai and I. Yokota, *Simply connected compact simple Lie group $G = E_{8(-248)}$ of type E_8* , J. Math. Kyoto Univ. **21** (1981), 741–762.
4. P. K. Rasevskii, *A theorem on the connectedness of a subgroup of a simply connected Lie group commuting with any of its automorphisms*, Trans. Moscow Math. Soc. **30** (1974), 3–22.
5. I. Yokota and O. Yasukura, *Non-compact simple Lie group $G = E_{8(8)}$* , Tukuba J. Math. **10** (1986), 331–349.
6. I. Yokota, *Realizations of involutive automorphisms σ and G^σ of exceptional linear Lie groups G , part I, $G = G_2, F_4$ and E_6 , part II, $G = E_7$, part III, $G = E_8$* , Tukuba J. Math. **14** (1990), 185–223, 379–404; **15** (1991), 301–314.
7. I. Yokota, *Realization of automorphisms σ of order 3 and G^σ of compact exceptional Lie groups G , I, $G = G_2, F_4, E_6$* , J. Fac. Sci. Shinshu Univ. **20** (1985), 131–144.
8. I. Yokota, T. Ishihara and O. Yasukura, *Subgroup $((SU(3) \times SU(6))/\mathbf{Z}_3) \cdot \mathbf{Z}_2$ of the simply connected simple Lie group E_7* , J. Math. Kyoto Univ. **23** (1983), 715–737.
9. S. Gomyo, *Realizations of maximal subgroups of rank 8 of the simply connected compact simple Lie group of type E_8* , (preprint).

Department of Mathematical Sciences,
Yokohama City University
22-2 Seto Kanazawaku
Yokohama 236 Japan

236 横浜市金沢区瀬戸 22-2
横浜市立大学 数理科学教室