数理解析研究所講究録
930巻 1995年 1-9

On uncountable representability of cBa under $\neg$CH

神戸大発達　高橋　真　(Makoto Takahashi)

ブール代数を集合を用いて表現するということは、Stoneの表現定理としてよく知られている。Stoneの表現定理によれば、任意のブール代数はある集合代数の作るブール代数に同型になる。しかしStoneの表現定理を拡張して、任意のκ-完備なブール代数はあるκ-集合代数（定義を見よ）のなすブール代数に同型であるとすることは一般にはできない。なぜならκ-集合代数のなすブール代数は常に$(\kappa, 2)$-DLをみたすが、$(\kappa, 2)$-DLをみたさない完備ブール代数が存在するからである。Loomis-SierpinskiはStoneの表現定理をこの方向ではなく、表現の方法を変えることでσ-完備なブール代数に対して拡張した。すなわち、任意のσ-完備なブール代数はあるσ-集合代数のなすブール代数をその上のσ-完備なイデアルで割ってできるブール代数に同型になることを示した。それでは、任意のκ-完備なブール代数に対して、Loomis-Sierpinskiの定理と同様のことが成り立つであろうか。答えは再び否である。κ-集合代数のなすブール代数をその上のκ-完備なイデアルで割ってできるブール代数に同型になることをκ-表現可能と呼ぶことにする。このとき、2^{ω}-表現可能なブール代数は$(\omega, 2)$-DLをみたすが、上と同様に$(\omega, 2)$-DLをみたさない完備ブール代数が存在するから、Loomis-Sierpinskiの定理をそのままκ-完備なブール代数に対して拡張することはできない。それでは一体どのようなブール代数がκ-表現可能になるのであろうか。本稿で

は特にω_1-表現可能の場合について、表現可能性と類似の性質との関連を考察することにする。

本稿で用いるブール代数の記号その他は [8] と同じである。不明のことがあればそれを参照して欲しい。またブール代数の性質でκ-何々というときは、特に断らない限り$\leq \kappa$-何々の意味であるとする。

κを非可算の正則基数とする。べき集合代数の部分ブール代数を集合代数と呼ぶことにする。集合代数 $\mathcal{A}$ がκ-集合代数であるとは、$\mathcal{A}$ の濃度がκ以下の部分集合 Xに対し、$\cup X, \cap X \in \mathcal{A}$ をみたすときをいう。κ-完備ブール代数$\mathcal{B}$はあるκ-集合代数 $\mathcal{A}$ とそのうえのκ-完備なイデアル Iが存在して商ブール代数$\mathcal{B}/\mathcal{I}$に同型になるとき、κ-表現可能であるという。κ-表現可能なκ-完備ブール代数についてはいろいろなことが知られている。もし、κ-表現可能なκ-完備ブール代数の完備化したものが再びκ-表現可能になるならば、わざわざ完備ブール代数に制限して考察する意味はないが、完備化により表現可能性のこわれる例がある。

例 1 $B = \mathcal{P}(\omega_2)/[\omega_2]^{<\omega_2}$とする。$B$は明らかに$\omega_1$-表現可能である。一方、$2^{\omega_2} = \omega_3$ならば$B$の完備化$\overline{B}$は $Col(\omega, \omega_3)$ に同型になることが知られている [1] 。下で述べるようにω_1-表現可能な完備ブール代数はω_1を保存するから、$\overline{B}$はω_1-表現可能ではない。

κ-表現可能性に関して次の結果が知られている。

定理 2 (Karp) κ-表現可能であるがκ^+-表現可能ではない完備ブール代数が存在する。

証明は $Col(\kappa, \kappa^+)$ をとればよい。従って、次の系が成立する。

系 3 連続体仮説が成立することと任意のω_1-表現可能な完備ブール代数が2^ω-表現可能になることは同値である。

この系より、連続体仮説の否定のもとではω_1-表現可能性と2^ω-表現可能性に違いがあるが、本稿の主な目的のひとつはその違いを考察することである。κ-表現可能性の同値条件として次のものが知られている。

定理 4 (Sikorski-Chang) κ-完備ブール代数 Bがκ-表現可能になるための必要十分条件は

$$\forall a \in B^{+} \forall \{a_{\alpha\beta} \mid \alpha, \beta < \kappa\}[\forall \alpha < \kappa \{a_{\alpha\beta} \mid \beta < \kappa\} \in Part(B\lceil a)$$

$$\Longrightarrow \exists f : \kappa \to \kappa[\{a_{\alpha f(\alpha)} \mid \alpha < \kappa\} \text{ は } fip \text{ をもつ}]] \qquad \text{である。}$$

従って、predense set を用いて表すと次の系を得る。

系 5 κ-完備ブール代数 Bがκ-表現可能になるための必要十分条件は

$$\forall a \in B^{+} \forall \{P_\alpha \mid \alpha < \kappa\}[\forall \alpha < \kappa |P_\alpha| \leq \kappa \text{かつ } P_\alpha \text{は predense below } a$$

$$\Longrightarrow \exists G \ni a[G \text{ はフィルターかつ } G \cap P_\alpha \neq \emptyset]] \qquad \text{である。}$$

この系より Matin's Axiom (MA) は

$$MA \equiv \forall \lambda < 2^\omega \forall B : ccc[B\text{は}\lambda-\text{表現可能}]$$

と表されることがわかる。さらに、次の命題が成り立つ。

命題 6 Bをκ-表現可能な完備ブール代数とする。このとき、Bはκ以下の基数を保存する。さらに、κの *stationary* な部分集合も保存する。

証明は [5] の証明と同様にできる。

κ, λ, μを非可算正則基数とする。完備ブール代数 Bが $P(\kappa, \lambda, \mu)$ をみたすとは、

$$\forall a \in B^{+} \forall \{a_{\alpha\beta} \mid \alpha < \kappa, \beta < \lambda\}[\forall \alpha < \kappa \{a_{\alpha\beta} \mid \beta < \lambda\} \in Part(B\lceil a)$$

$$\Longrightarrow \exists f : \kappa \to \lambda \forall X \subset \kappa[|X| < \mu \Longrightarrow \wedge\{a_{\alpha f(\alpha)} \alpha \in X\} > 0]]$$

となるときをいう。条件からすぐわかるように、$P(\kappa, \kappa, \omega)$ はκ-表現可能性である。また、$P(\omega_1, \omega_1, \omega_1)$ は Smith の条件と呼ばれているものであり、$P(\omega, \lambda, \omega_1)$ は (ω, λ)-分配法則（(ω, λ)-DL）である。さらに、$P(\omega_1, \infty, \omega_1)$ は Levinski が [7] で定義した strongly ω_1-distributivity に同値となる。2^{ω}-表現可能性に関しては、次の Chang の結果がある。

定理 7 (Chang) $P(2^{\omega}, 2^{\omega}, \omega) \Longrightarrow P(2^{\omega}, 2^{\omega}, \omega_1)$

また、$P(\omega_1, \omega_1, \omega_1)$ と $P(\omega_1, \infty, \omega_1)$ に関しては次の結果がある。

定理 8 (Takahashi) *1.* $P(\omega_1, \omega_1, \omega_1) \Longleftrightarrow (\omega, 2) - DL$ かつ $P(\omega_1, 2^{\omega}, \omega)$

2. $P(\omega_1, \infty, \omega_1) \Longleftrightarrow (\omega, \infty) - DL$ かつ $P(\omega_1, \infty, \omega)$

Goldstern-Shelah は [3] で Bが表現可能であることを BFA(B, κ) で表している。これは Bが κ-表現可能というときは、どちらかというと real world で Bがκ-表現可能であると考えるのに対し、BFA(B, κ) は記号を見てもわかるようにκ-表現可能かどうかは ZFC で決定できないようなものに対する forcing axiom ととらえているという違いがある。

上で定義した性質の関係を図に表すと次ページのようになる。以下図で番号をふった矢印の逆向きは（何らかの仮定の下で）反例のあることを示す。

[1 の反例]

命題 9 (MA+¬CH) ω_1-表現可能であるが $P(\omega_1, \omega_1, \omega_1)$ をみたさない完備ブール代数が存在する。

$$
\begin{tikzcd}
 & P(2^\omega, 2^\omega, \omega) \arrow[d, "2"] & & \text{dense } \sigma\text{-closed subset をもつ} \arrow[d, "5"] \\
(\omega\ ,2)\text{-DL} \arrow[ddr, "/" marking] & P(\omega_1, \omega_1, \omega_1) \arrow[l] \arrow[d, "1"] & & P(\omega_1, \infty, \omega_1) \arrow[ll, "3"'] \arrow[d, "4"] \\
 & \omega_1\text{-表現可能} \arrow[d, shift right] & & P(\omega_1, \infty, \omega) \arrow[ll, "6"'] \\
 & \omega_1\text{-statitionary subset を保存する} \arrow[u, shift right, "\text{CH },\neg\text{SH etc.}"'] & &
\end{tikzcd}
$$

MA+¬CH を仮定すると、前に述べたように

$$MA \equiv \forall\lambda < 2^\omega \forall B : ccc[B\text{は}\lambda-\text{表現可能}]$$

であるから、ccc をみたす完備ブール代数 Bはω_1-表現可能である。しかし、MA+¬CH のもとでは ccc をみたす完備ブール代数は $(\omega, 2)$-DL をみたさない。よって Bは $P(\omega_1, \omega_1, \omega_1)$ をみたさない。しかし、これはあまりに trivial である。しかし、MA を仮定しないと話はかなり難しくなる。もし、ω_2上の$< \omega_2$-完備なイデアル Iで商ブール代数 $\mathcal{P}(\omega_2)/I$が完備になるものが存在するならば、$\mathcal{P}(\omega_2)/I$が $(\omega, 2)$-DL をみたすことと Iが 2^ω-完備であること（従って $\mathcal{P}(\omega_2)/I$が 2^ω-表現可能であること）は同値であるので、上の命題はそのようなイデアルの存在と¬CH のもとでも正しい。ω_1-表現可能性と $P(\omega_1, \omega_1, \omega_1)$ の関係に関しては Smith が次のことを示している。

定理 10 (Smith) ω_1-表現可能なω_1-完備ブール代数はすべて $P(\omega_1, \omega_1, \omega_1)$ をみたすことと CH は同値である。

この Smith の定理を完備ブール代数に制限できるか、すなわち¬CH のもとでω_1-表現可

であるが $P(\omega_1,\omega_1,\omega_1)$ をみたさない完備ブール代数が存在するかは open problem である。

[2 の反例]　次のような長さがω_1の cut&choose ゲーム $G(B,a)$ を考える。ここで Bは完備ブール代数で $a\in B^+$である。プレーヤ I は最初に a の 2-partition P_0を選び、各 $2\alpha+2$stage で stage$2\alpha+1$ でプレーヤ II の選んだ元の 2-partition $P_{\alpha+1}$を選ぶ。プレーヤ II は stage $2\alpha+1$ において、stage 2αで I が選んだ 2-partition P_αから元 a_αを選ぶ。limit stage αでは、I が$\wedge\{a_\beta|\beta<\alpha\}$ の 2-partition を選ぶ。ここで a の 2-partition とは $a_1\wedge a_2=0$ かつ $a_1\vee a_2=a$ をみたす元 a_1と a_2の集合 $\{a_1,a_2\}$ を意味する。従って、a から始まって cut & choose の繰り返しでゲームが進む。ゲームの勝敗は次のように決める。プレーヤ I は $\exists\alpha<\omega_1[\wedge\{a_\beta|\beta<\alpha\}=0]$ となるとき勝つとする。

ゲーム $G(B,a)$ を用いて $P(\omega_1,\omega_1,\omega_1)$ の特徴付けができる。

定理 11 完備ブール代数 Bに対し次の条件はすべて同値である。

1. Bは $P(\omega_1,\omega_1,\omega_1)$ をみたす
2. Bは $P(\omega_1,3,\omega_1)$ をみたす
3. 濃度が 2^ω以下の ccc をみたす完備ブール代数 Cに対し、$\|\check{C}$は完備である $\|^B=1$ である
4. $\forall a\in B^+\forall\dot{f}\in V^{(B)}[\|\dot{f}:\omega_1\to\omega_1\|=a\Longrightarrow\exists f:\omega_1\to\omega_1\forall\alpha<\omega_1\|\dot{f}\lceil\check{\alpha}=\check{f}\lceil\check{\alpha}\|\cdot a>0]$
5. $\forall a\in B^+[I$は $G(B,a)$ で winning strategy をもたない$]$

(1) と (2) (3) の同値性の証明は [8] にある。(1) と (4) の同値性の証明は容易である。(1) と (5) の同値性を示す。

(5)⇒(1): Bは $P(\omega_1,\omega_1,\omega_1)$ をみたさないとする。(1) と (2) の同値性より、B は $P(\omega_1,3,\omega_1)$ をみたさない。よって、ある $a \in B^+$と $2-partition$ の集合 $\{P_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$が存在して、

$\forall f \in \prod_{\alpha<\omega_1} P_\alpha \, \exists\alpha < \omega_1[\wedge\{f(\alpha)|\beta < \alpha\} = 0]$ となる。I が G(B,a) において P_αに従ってプレーを行うと、必ず勝つから I は winning strategy を持つことになる。よって Bは $P(\omega_1,\omega_1,\omega_1)$ をみたす。

(1)⇒(5): ある $a \in B^+$が存在して、G(B,a) で I が winning strategy σを持つとする。partition の集合 $\{P_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$を次のように帰納的に定義する。

$P_1 = \sigma(<>), P_2 = \cup\{\sigma(<x_1>)|x_1 \in \sigma(<>)\}\cdots$

$P_\alpha = \cup\{\sigma(<x_\beta>_{\beta<\alpha})| <x_\beta>_{\beta<\alpha}$ はσに従うプレーの列 $\}\cdots$

Bは $(\omega,2)$-DL をみたすから、各 P_αは a の partition であり、また $|P_\alpha| \leq 2^\omega$となる。$P(\omega_1,\omega_1,\omega_1)$ ならば $P(\omega_1,2^\omega,\omega_1)$ であるので、ある $f \in \prod_{\alpha<\omega_1} P_\alpha$が存在して、任意の$\alpha$に対し、$\wedge\{f(\alpha)|\beta < \alpha\} > 0$ となる。各αに対し、$f(\alpha) \in \sigma(<f(\beta)>_{\beta<\alpha})$ であるから、これはσに従う G(B,a) のプレーである。しかし、このプレーで I は負けである。これはσが I の winning strategy であることに反する。

系 12 Bが $P(\omega_1,\omega_1,\omega_1)$ をみたし、$\|\dot{C}$は $P(\omega_1,\omega_1,\omega_1)\|^{(B)} = 1$ とする。このとき、Bと$\dot{C}$ の *forcing product* $B\otimes\dot{C}$も $P(\omega_1,\omega_1,\omega_1)$ をみたす。

命題 13 (¬CH) $B = Col(\omega_1,2^\omega), \|\dot{C}$は $P(\omega_1,\omega_1,\omega_1)\|^{(B)} = 1$ とする。このとき $B\otimes\dot{C}$は $P(\omega_1,\omega_1,\omega_1)$ をみたすが、$P(2^\omega,2^\omega,\omega)$ はみたさない。すなわち、2^ω-表現可能ではない。

[3 の反例] κを可測基数,Dをκ上の normal 測度とし、Dより作られる Prikry forcing を P とする。このとき

命題 14 $r.o.(P)$ は 2^ω-表現可能であるが、$P(\omega_1,\infty,\omega_1)$ はみたさない。

従って、特に $P(\omega_1,\omega_1,\omega_1) \not\Rightarrow P(\omega_1,\infty,\omega_1)$ であるが、前述の系よりもう少し強いことが言える。すなわち、可測基数の存在と$\neg$CH のもとで、$P(\omega_1,\omega_1,\omega_1)$ をみたすが、2^ω-表現可能でもなく $P(\omega_1,\infty,\omega_1)$ もみたさない完備ブール代数が存在する。

また MM を仮定すると Namba forcing Nm はω_1の stationary subset を保存するから $r.o.(Nm)$ は $P(\omega_1,\infty,\omega)$ をみたす。また $r.o.(Nm)$ は $(\omega,2)$-DL をみたす。よって、定理 8 より Nm は $P(\omega_1,\omega_1,\omega_1)$ をみたす。一方、Nm は (ω,∞)-DL をみたさないから、$P(\omega_1,\infty,\omega_1)$ もみたさない。よって MM を仮定しても反例を作ることができる。

[4 の反例]　この反例は MA+$\neg$CH のもとで作る。MA を仮定しない場合の反例は open problem である。

[5 の反例]　この反例は次の Devlin の結果を用いることでできる。

定理 15 (MA+$\neg$CH) (ω,∞)-*DL* と ω_2-*cc* をみたす完備ブール代数は $P(\omega_1,\infty,\omega)$ もみたす。

よって

系 16 (MA+$\neg$CH) (ω,∞)-*DL* と ω_2-*cc* をみたす完備ブール代数は $P(\omega_1,\infty,\omega_1)$ をみたす。

一方、Bが dense σ-closed subset をもつ完備ブール代数ならば、Bは 2^ω-cc をみたさない。よって、MA+$\neg$CH のもとで、(ω,∞)-DL と ω_2-cc をみたす完備ブール代数が反例を与える。ここでも MA 仮定しない場合の反例は open problem である。

[6 の反例]　BPFA(Bounded Proper Forcing Axiom) は任意の proper な完備ブール代数はω_1-表現可能であるという公理である。Goldstern-Shelah は [3] で BPFA の consistency strength は Σ_1-reflecting cardinal の存在と同等であることをしめした。PFA の consistency strength は

それよりも大きいから、間接的ではあるけれども６の逆向きが言えないことの証になっている。

参考文献

[1] B. Bacar and F. Franěk, Completion of factor algebras of ideals, Proc. of AMS 100 (1987), 205−−212.

[2] K. Devlin, An alternative to Martin's axiom, in: Set Theory and Hierarchy Theory , Bierutowice ,Poland , Lecture Notes in Mathematics 537, Springer-Verlag, Heidelberg,65−−76.

[3] M. Goldstern and S. Shelah, The Bounded Proper Forcing Axiom, J. of Symbolic Logic 60 (1995), 58−−73.

[4] T. Jech, Set Theory, Academic Press, 1978

[5] T. Jech, More game-theoretic properties of Boolean algebras, Annals of Pure and Appl. Logic 26 (1984), 11−−29.

[6] A. Kanamori and S. Shelah, Complete quotient Boolean Algebras, preprint

[7] J. P. Levinski, Filters and large cardinals, Annals of Pure and Appl. Logic 72 (1995), 177−−212.

[8] M. Takahashi, Completeness of Boolean powers of Boolean algebras, J. of Math. Soc. Japan 40(1988), 445−−456.