数理解析研究所講究録
930 巻 1995 年 42-54

ω^ω上のイデアルに関する新しい基数不変量

嘉田 勝 (Masaru KADA)

大阪府立大学総合科学部

Abstract

Baire 空間 ω^ω における null set, meager set および σ-compact set から生成されるイデアルに関する基数不変量についての集合論的結果は, "Cichoń's diagram" としてよく知られている. 本稿では, これらのイデアルについて "shrinkability" という考えを導入し, それによって新たな基数不変量を定義する. さらに, それらの新しい基数の Cichoń's diagram における位置づけや, ω^ω上のイデアルの組合せ論的性質との関連について考察する.

1 はじめに — ω^ω上のイデアルと基数不変量

$\mathcal{I}$ を ω^ω上の σ-イデアル (可算加法的なイデアル) で, 1 点集合をすべて含んでいるものとする. $\mathcal{I}$ に対して, 次の 4 種類の基数を定義する.

- $\mathsf{add}(\mathcal{I})$: $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{I}$ かつ $\bigcup \mathcal{F} \notin \mathcal{I}$ なる $\mathcal{F}$ の最小濃度.
- $\mathsf{cov}(\mathcal{I})$: $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{I}$ かつ $\omega^\omega = \bigcup \mathcal{F}$ なる $\mathcal{F}$ の最小濃度.
- $\mathsf{non}(\mathcal{I})$: $X \subseteq \omega^\omega$ かつ $X \notin \mathcal{I}$ なる X の最小濃度.
- $\mathsf{cof}(\mathcal{I})$: $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{I}$ で, 「すべての $X \in \mathcal{I}$ に対し, $Y \in \mathcal{F}$ で, $X \subseteq Y$ なる Y が存在する」ような $\mathcal{F}$ の最小濃度.

このとき, 明らかに $\mathsf{add}(\mathcal{I}) \leq \mathsf{cov}(\mathcal{I}) \leq \mathsf{cof}(\mathcal{I})$ かつ $\mathsf{add}(\mathcal{I}) \leq \mathsf{non}(\mathcal{I}) \leq \mathsf{cof}(\mathcal{I})$ である. また, $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$ なる 2 つのイデアル $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ について, $\mathsf{cov}(\mathcal{I}) \geq \mathsf{cov}(\mathcal{J})$ かつ $\mathsf{non}(\mathcal{I}) \leq \mathsf{non}(\mathcal{J})$ であることが容易にわかる.

Baire 空間 ω^ω, すなわち, ω に離散位相および各 $n \in \omega$ に $1/2^{n+1}$ の測度を与えた空間の可算直積における null set, meager set および σ-compact set の全体から生成されるイデアルをそれぞれ $\mathcal{N}, \mathcal{M}, \mathcal{K}$ で表す. 本稿では, 主にこれらのイデアルに関する基数不変量を扱うが, 特に $\mathcal{K}$ については, 次のような意味で ω^ω上の組合せ論と関係している.

ω^ω の 2 元 f, g に対して, 有限個を除くすべての $n \in \omega$ について $f(n) \leq g(n)$ であるとき, $f \leq^* g$ と表す. ω^ω の部分集合 $\mathcal{F}$ が *unbounded*(*dominating*) *family*であるとは, すべて

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathsf{cov}(\mathcal{N}) \arrow[r] & \mathsf{non}(\mathcal{M}) \arrow[r] & \mathsf{cof}(\mathcal{M}) \arrow[r] & \mathsf{cof}(\mathcal{N}) \arrow[r] & 2^{\omega} \\
 & & \mathfrak{b} \arrow[r] \arrow[u] & \mathfrak{d} \arrow[u] & & \\
\omega_1 \arrow[r] & \mathsf{add}(\mathcal{N}) \arrow[r] \arrow[uu] & \mathsf{add}(\mathcal{M}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathsf{cov}(\mathcal{M}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathsf{non}(\mathcal{N}) \arrow[uu] &
\end{tikzcd}
$$

図 1: Cichoń's diagram

の $g \in \omega^\omega$ に対して, $f \in \mathcal{F}$ で, $f \not\leq^* g$ ($g \leq^* f$) なる f が存在するときにいう. ω^ω における unbounded family および dominating family の最小濃度をそれぞれ $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{d}$ で表す.

次の事実は, イデアル $\mathcal{K}$ を考えることによって, $\mathfrak{b}$ および $\mathfrak{d}$ も ω^ω上のイデアルから定義される基数として統一的に扱うことができることを示している.

事実 1.1 $\mathcal{K}$ は, 各 $f \in \omega^\omega$ に対する $\{g \in \omega^\omega : g \leq^* f\}$ の形の集合全体から生成されるイデアルに一致する. 特に, $\mathcal{K} \subsetneq \mathcal{M}$ である.

系 1.2 $\mathsf{add}(\mathcal{K}) = \mathsf{non}(\mathcal{K}) = \mathfrak{b}$ および $\mathsf{cov}(\mathcal{K}) = \mathsf{cof}(\mathcal{K}) = \mathfrak{d}$ である.

したがって, $\mathcal{N}$, $\mathcal{M}$ および $\mathcal{K}$ の 3 つのイデアルからは合わせて 10 個の基数が定義されることになる. これらの基数の間には, 図 1 に示されるような大小関係が ZFC から証明されている [1, 2, 4]. (図中の "$\rightarrow$" は "$\leq$" を意味する.) この図は *Cichoń's diagram*の名でよく知られている.

当然ながら, 連続体仮説 (CH) を仮定すると, これらの基数はすべて連続体濃度 $2^\omega (= \omega_1)$ に一致する. また, CH が成り立たない場合でも, Martin's Axiom(MA) のもとでは, 図 1 に現れる基数はすべて 2^ω に一致する ([9, II Theorem 2.21]).

特に, $\mathsf{add}(\mathcal{M})$, $\mathsf{cof}(\mathcal{M})$ の 2 つの位置づけについては, さらに強い結果が知られている.

定理 1.3 $\mathsf{add}(\mathcal{M}) = \min\{\mathsf{cov}(\mathcal{M}), \mathfrak{b}\}$ および $\mathsf{cof}(\mathcal{M}) = \max\{\mathsf{non}(\mathcal{M}), \mathfrak{d}\}$ である.

Cichoń's diagram は, 「ZFC で証明可能」という意味において完全である, すなわち, ZFC で証明可能な大小関係は Cichoń's diagram に表し尽くされているということが証明されている. この証明は [2] によって完結し, [1] に詳しくまとめられている.

Cichoń's diagram に関するイデアルや基数の表記法については多くの流儀があるが, 本稿で採用した表記法は [1] によるものである.

2 新しい基数不変量 $\mathfrak{b}^*$ とその一般化

$\mathfrak{b}$ の定義を強めた概念として, [3] では次のような新しい基数が定義されている.

定義 2.1 $\mathfrak{b}^*$: 「$\mathcal{F} \subseteq \omega^\omega$ について, $\mathcal{F}$ が unbounded ならば, 常に $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ で $|\mathcal{G}| \leq \lambda$ かつ $\mathcal{G}$ が unbounded なるものが存在する」ような基数 λ の最小値.

こうして定義された $\mathfrak{b}^*$ は, 次の意味で $\mathfrak{b}$ と $\mathfrak{d}$ の「真の」中間に位置する基数である.

定理 2.2 ([3, Theorem 1.4])

- $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{b}^* \leq \mathfrak{d}$.
- $\mathfrak{b} < \mathfrak{b}^*$ と $\mathfrak{b}^* < \mathfrak{d}$ はそれぞれ ZFC 上無矛盾である.

ところで, $\mathfrak{b}, \mathfrak{d}$ はイデアル $\mathcal{K}$ を用いることで $\mathfrak{b} = \mathsf{non}(\mathcal{K})$, $\mathfrak{d} = \mathsf{cof}(\mathcal{K})$ と表されるのであった. このことを考えると, $\mathfrak{b}^*$ の定義は, 一般の ω^ω上の σ-イデアルに関する基数として, 自然に次のように一般化することができる.

定義 2.3 $\mathsf{shr}(\mathcal{I})$: 「$X \subseteq \omega^\omega$ について, $X \notin \mathcal{I}$ ならば, 常に $Y \subseteq X$ で $|Y| \leq \lambda$ かつ $Y \notin \mathcal{I}$ なる Y が存在する」ような基数 λ の最小値.

すなわち, $\mathsf{shr}(\mathcal{I})$ は, 「イデアル $\mathcal{I}$ に属さない任意の集合を, $\mathcal{I}$ に属さない範囲でどこまで小さくすることができるか」を表す基数と考えることができる. なお, 記号 shr は "shrinkability"(縮みやすさ) の略である.

言うまでもなく, $\mathsf{shr}(\mathcal{K}) = \mathfrak{b}^*$ である.

以下, この節では, 定理 2.2 に述べられている $\mathfrak{b}^*$ に関する結果が, そのまま $\mathsf{shr}(\mathcal{M})$ および $\mathsf{shr}(\mathcal{N})$ に一般化されることを示す.

定理 2.4 一般の ω^ω上の σ-イデアル $\mathcal{I}$ について, $\mathsf{non}(\mathcal{I}) \leq \mathsf{shr}(\mathcal{I}) \leq \mathsf{cof}(\mathcal{I})$ が成り立つ.

証明. $\mathsf{non}(\mathcal{I}) \leq \mathsf{shr}(\mathcal{I})$ は定義より明らか. $\mathsf{shr}(\mathcal{I}) \leq \mathsf{cof}(\mathcal{I})$ を示そう.

まず, 濃度 $\mathsf{cof}(\mathcal{I})$ のイデアル $\mathcal{I}$ の基底 $\mathcal{A} = \{A_\xi : \xi < \mathsf{cof}(\mathcal{I})\}$ を固定する. $X \notin \mathcal{I}$ なる $X \subseteq \omega^\omega$ が与えられたとせよ. 各 $\xi < \mathsf{cof}(\mathcal{I})$ について, $y_\xi \in X \setminus A_\xi$ なる y_ξ がとれる. $Y = \{y_\xi : \xi < \mathsf{cof}(\mathcal{I})\} \subseteq X$ とすると, $|Y| \leq \mathsf{cof}(\mathcal{I})$ かつ $Y \notin \mathcal{I}$ である. □

無矛盾性証明に移ろう. われわれの目的は, $\mathcal{I} = \mathcal{M}$, $\mathcal{I} = \mathcal{N}$ のそれぞれの場合について, $\mathsf{non}(\mathcal{I}) < \mathsf{shr}(\mathcal{I})$, $\mathsf{shr}(\mathcal{I}) < \mathsf{cof}(\mathcal{I})$ のそれぞれの無矛盾性を示すことである. 実は, これらの証明は, $\mathfrak{b}^*$ に関する無矛盾性結果の証明 ([3]) を一般化することにより, $\mathcal{I} = \mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{K}$ のすべての場合について並行に証明することができる.

所要のモデルは, $\mathcal{I} = \mathcal{M}, \mathcal{K}$ については Cohen forcing, また $\mathcal{I} = \mathcal{N}$ については random forcing を用いて構成される.

無限集合 I について, I を index set とする Cohen forcing notion および random forcing notion をそれぞれ $\mathbb{C}(I)$ および $\mathbb{B}(I)$ で表す ([1, Chapter 3]). $\mathbb{C}(I)$ および $\mathbb{B}(I)$ による forcing 拡大においては, Cichoń's diagram に現れる基数の値は次のようになることが知られている.

補題 2.5 ([10, Theorem 3.19]) $2^\omega \leq |I| = \kappa$ かつ $\mathrm{cf}(\kappa) \geq \omega_1$ とするとき,

(1) $\mathbb{C}(I)$ による forcing モデルにおいて, $\mathsf{non}(\mathcal{M}) = \omega_1$, $\mathsf{cov}(\mathcal{M}) = \kappa = 2^\omega$ が成り立つ.

(2) $\mathbb{B}(I)$ による forcing モデルにおいて, $\mathsf{non}(\mathcal{N}) = \omega_1$, $\mathsf{cov}(\mathcal{N}) = \kappa = 2^\omega$ が成り立つ.

ついでながら, $\mathfrak{b}$ および $\mathfrak{d}$ の値は, random forcing では影響を受けず ground モデルでの値を保つことが知られている.

本題の無矛盾性証明に入る前に, Baire 空間における Borel 集合の「コード化」について注意しておきたい. Baire 空間 ω^ω におけるすべての Borel 部分集合は, 「Borel コード」と呼ばれる ω^ω の元によってコード化することができる. c が Borel コードであるとき, c から再構成される ω^ω の Borel 部分集合を $\hat{c}$ で表すことにする.

一般に, ω^ω の部分集合そのものについては, null, meager, σ-compact といった概念は absolute ではない. しかしながら,

- $\mathcal{N}, \mathcal{M}, \mathcal{K}$ のいずれも, Borel 集合だけから生成することができる.
- Borel コード c を固定したとき, $\hat{c}$ について, null, meager, σ-compact という性質は, c を Borel コードとして含むような任意の ZFC のモデルに関して absolute である.

という理由から, イデアル $\mathcal{N}$, $\mathcal{M}$ および $\mathcal{K}$ は, 「Borel コードの意味で absolute である」ということができる. (Borel コードの詳細については [6, 10] を参照されたい.)

次の定義のような形で述べられる, 個々の forcing notion に関する性質は, 一般に「forcing に関する保存定理」と総称される. こういった「保存定理」は, 以下の議論において重要な役割を果たす.

定義 2.6 $\mathcal{I}$ は Borel コードの意味で absolute な ω^ω上の σ-イデアルを表すとする. forcing notion $\mathbb{P}$ が $\mathcal{I}$-positive な集合を保存するとは, $A \notin \mathcal{I}$ なる ω^ω の部分集合 A に対して常に $\Vdash_{\mathbb{P}}$ "$A \notin \mathcal{I}$" なるときにいう.

言うまでもなく, $\mathcal{N}$-positive とは "外測度が正", $\mathcal{M}$-positive とは "nonmeager", そして $\mathcal{K}$-positive とは "unbounded" の意味である.

Cohen forcing および random forcing に関しては, 次の保存定理が成り立つ. (証明は [1, Section 6] を参照されたい.)

補題 2.7 任意の無限集合 I について,

(1) $\mathbb{C}(I)$ は nonmeager および unbounded な集合を保存する.

(2) $\mathbb{B}(I)$ は外測度正の集合を保存する.

定義 2.8 $\mathbb{P}$ を forcing notion とする. 次の性質を満たす $\{A_{mn} : m, n < \omega\}$ によって一意に決定される $\mathbb{P}$-name $\dot{f}$ を, ω^ω の元を表す standard $\mathbb{P}$-name という.

(1) $A_{mn} \subseteq \mathbb{P}$ は $\mathbb{P}$ の antichain であって, $n \neq n'$ ならば $A_{mn} \cap A_{mn'} = \emptyset$ である.

(2) $\bigcup_{n<\omega} A_{mn}$ は $\mathbb{P}$ の maximal antichain である.

(3) 各 $p \in A_{mn}$ に対し, $p \Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\dot{f}(m) = n$" である.

上の定義より, $\Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\dot{g} \in \omega^\omega$" なる任意の $\mathbb{P}$-name $\dot{g}$ に対して, $\Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\dot{f} = \dot{g}$" なる standard $\mathbb{P}$-name $\dot{f}$ が存在することが容易にわかる. また, standard $\mathbb{P}$-name をこのような形に定めておくことで, その総数を $\mathbb{P}$ の chain condition を用いて評価することができる.

定理 2.9 $2^\omega = \lambda$ を仮定する. κ を無限基数とする.

(1) $\mathbb{P} = \mathbb{C}(\kappa)$ かつ, $\mathcal{I} = \mathcal{K}$ または $\mathcal{I} = \mathcal{M}$, あるいは

(2) $\mathbb{P} = \mathbb{B}(\kappa)$ かつ $\mathcal{I} = \mathcal{N}$

とするとき, $\mathbb{P}$ による forcing 拡大において次が成立する: $A \notin \mathcal{I}$ なる任意の ω^ω の部分集合 A に対し, その部分集合 $B \subseteq A$ で, $|B| \leq \lambda$ かつ $B \notin \mathcal{I}$ なるものが存在する.

証明. $\kappa \leq \lambda$ の場合は, $\mathbb{P}(\kappa)$ による forcing モデルで $2^\omega = \lambda$ が成り立つので, $\kappa > \lambda$ の場合のみ考えれば十分である.

前述の通り, (1), (2) の両方の場合について, 並行に証明することができる. $\mathbb{P} = \mathbb{C}(\kappa)$ の場合は $\mathbb{C}(I)$, また, $\mathbb{P} = \mathbb{B}(\kappa)$ の場合は $\mathbb{B}(I)$ を, $\mathbb{P}(I)$ で表すことにする.

$\mathbb{P}(I)$ の condition は 2^I (または ω^I) の Borel subset と考えられるので, I のある可算部分集合 J の上だけで決定されている. すなわち, 任意の $p \in \mathbb{P}(I)$ について, 適当な可算集合 $J \subseteq I$ および $p' \in \mathbb{P}(J)$ を, $p = p' \times \mathbf{1}_{\mathbb{P}(\kappa \setminus J)}$ をみたすようにとれる. このような可算集合 J を p の *support* と呼び, $\mathrm{supp}(p)$ で表すことにする. さらに, ω^ω の元を表す任意の standard $\mathbb{P}(I)$-name $\dot{f}$ は, $\mathbb{P}(I)$ が c.c.c. であることを考えると, 実際には I のある可算部分集合 J についての $\mathbb{P}(J)$-name となっている.

無限集合 I に対し, ω^ω の元を表す standard $\mathbb{P}(I)$-name 全体の集合を $X(I)$ で表す. $\mathcal{X} = X(\kappa)$ とおく.

定理が成り立たないとせよ. このとき, condition $p_0 \in \mathbb{P}(\kappa)$ および, ω^ω の元を表す standard $\mathbb{P}(\kappa)$-name の集合 $\dot{A}$ (これ自体が ω^ω の部分集合を表す $\mathbb{P}(\kappa)$-name であると考えてさしつかえない) で,

$$p_0 \Vdash_{\mathbb{P}(\kappa)} \text{“}\dot{A} \notin \mathcal{I} \wedge \forall B \subseteq \dot{A}\,(|B| \leq \lambda \rightarrow B \in \mathcal{I})\text{”}$$

をみたすものがとれる.

$S = \{X(I) : I \in [\kappa]^{\leq\lambda} \wedge \mathrm{supp}(p_0) \subseteq I\}$ とおくと, S は $[\mathcal{X}]^{\leq\lambda} (= \mathcal{P}_{\lambda^+}(\mathcal{X}))$ における stationary set となる. なんとなれば, 明らかに S は unbounded で, しかも S は ω_1-上昇列に関して閉じているからである. $X = X(I) \in S$ を任意にとって固定せよ. このとき $|X| \leq \lambda$ であるから, 仮定により, Borel コードを表す standard $\mathbb{P}(\kappa)$-name $\dot{c}_X$ で,

$$p_0 \Vdash_{\mathbb{P}(\kappa)} \text{“}\dot{A} \cap X \subseteq \hat{\dot{c}_X} \wedge \hat{\dot{c}_X} \in \mathcal{I}.\text{”}$$

なるものがとれるが, $\mathbb{P}(\kappa\setminus I)$ は $\mathcal{I}$-positive な集合を保存するので, $\dot{c}_X$ は standard $\mathbb{P}(I)$-name であるとしてよい. すると, $\dot{c}_X\in X=X(I)$ であるから, $X\in[\mathcal{X}]^{\leq\lambda}$ から $\dot{c}_X$ への対応は regressive となる. そこで, Fodor's lemma([5, Theorem 3.2]) により, stationary な集合 $S'\subseteq S$ と, Borel コードを表す standard $\mathbb{P}(\kappa)$-name $\dot{c}$ で, すべての $X\in S'$ について $\dot{c}_X=\dot{c}$ なるものがとれる. もちろん, このとき $p_0\Vdash_{\mathbb{P}(\kappa)}$ "$\hat{\dot{c}}\in\mathcal{I}$" である. S' は $[\mathcal{X}]^{\leq\lambda}$ において unbounded なので, 各 $\dot{x}\in\dot{A}$ について, $\dot{x}\in X$ なる $X\in S'$ が存在する. ゆえに, $p_0\Vdash_{\mathbb{P}(\kappa)}$ "$\dot{A}\subseteq\hat{\dot{c}}$" である. これは, $p_0\Vdash_{\mathbb{P}(\kappa)}$ "$\dot{A}\in\mathcal{I}$" を意味するので, 矛盾である. □

系 2.10 CH を仮定する. κ を $\mathrm{cf}(\kappa)\geq\omega_1$ なる基数とすると,

(1) $\mathbb{C}(\kappa)$ による forcing モデルにおいて, $\mathfrak{b}=\mathfrak{b}^*=\mathsf{non}(\mathcal{M})=\mathsf{shr}(\mathcal{M})=\omega_1$ および $\mathfrak{d}=\mathsf{cof}(\mathcal{M})=\kappa$ が成り立つ.

(2) $\mathbb{B}(\kappa)$ による forcing モデルにおいて, $\mathsf{non}(\mathcal{N})=\mathsf{shr}(\mathcal{N})=\omega_1$ および $\mathsf{cof}(\mathcal{N})=\kappa$ が成り立つ.

残る無矛盾性証明は, 補題 2.7 および定理 2.9 を用いて容易に遂行できる.

補題 2.11 $\mathcal{I}$ は Borel コードの意味で absolute な ω^ω上の σ-イデアルを表すとする. $\mathbb{P}$ が c.c.c. で, かつ $\mathcal{I}$-positive な集合を保存するとき, $\mathbb{P}$ による forcing モデルにおいて $(\mathsf{shr}(\mathcal{I}))^{\mathbf{V}}\leq(\mathsf{shr}(\mathcal{I}))$ が成り立つ. ($\mathbf{V}$ は ground モデルを表す.)

証明. $\lambda<\mathsf{shr}(\mathcal{I})$ なる λ を任意にとる. このとき, $A\notin\mathcal{I}$ かつ, $|B|\leq\lambda$ なる任意の $B\subseteq A$ について $B\in\mathcal{I}$ となる $A\subseteq\omega^\omega$ が存在する. この A が, そのまま forcing 拡大において $\lambda<\mathsf{shr}(\mathcal{I})$ を示す集合になっていることを示す.

$\mathbb{P}$ は $\mathcal{I}$-positive な集合を保存するから, $\Vdash_{\mathbb{P}}$ "$A\notin\mathcal{I}$" である. $\Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\dot{B}\subseteq A\wedge|\dot{B}|\leq\lambda$" なる $\mathbb{P}$-name $\dot{B}$ を任意にとる. $\mathbb{P}$ は c.c.c. だから, $B'\subseteq A$ で, $|B'|\leq\lambda$ かつ $\Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\dot{B}\subseteq B'$" なるものがとれる. 仮定により, $B'\subseteq\hat{c}\in\mathcal{I}$ なる Borel コード c が存在する. $\mathcal{I}$ の absoluteness により,

$$\Vdash_{\mathbb{P}} \text{“}\dot{B}\subseteq B'\subseteq(\hat{c})^{\mathbf{V}}=\hat{c}\cap\mathbf{V}\subseteq\hat{c}\in\mathcal{I}\text{”}$$

すなわち $\Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\dot{B}\in\mathcal{I}$" となる. □

系 2.12 MA および $\omega_1<2^\omega=\lambda$ を仮定する. κ を $\lambda\leq\kappa$ かつ $\mathrm{cf}(\kappa)\geq\omega_1$ なる基数とする. このとき,

(1) $\mathbb{C}(\kappa)$ による forcing モデルにおいて, $\mathfrak{b}=\mathsf{non}(\mathcal{M})=\omega_1$, $\mathfrak{b}^*=\mathsf{shr}(\mathcal{M})=\lambda$ かつ $\mathfrak{d}=\mathsf{cof}(\mathcal{M})=\kappa$ が成立する.

(2) $\mathbb{B}(\kappa)$ による forcing モデルにおいて, $\mathsf{non}(\mathcal{N})=\omega_1$, $\mathsf{shr}(\mathcal{N})=\lambda$ かつ $\mathsf{cof}(\mathcal{N})=\kappa$ が成立する.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathsf{cov}(\mathcal{N}) \arrow[r] & \mathsf{non}(\mathcal{M}) \arrow[r] & \mathsf{shr}(\mathcal{M}) \arrow[r] & \mathsf{cof}(\mathcal{M}) \arrow[r] & \mathsf{cof}(\mathcal{N}) \arrow[r] & 2^{\omega} \\
 & & \mathfrak{b} \arrow[u] \arrow[r] & \mathfrak{b}^{*} \arrow[u] \arrow[r] & \mathfrak{d} \arrow[u] & \mathsf{shr}(\mathcal{N}) \arrow[u] & \\
\omega_1 \arrow[r] & \mathsf{add}(\mathcal{N}) \arrow[uu] \arrow[r] & \mathsf{add}(\mathcal{M}) \arrow[u] \arrow[rr] & & \mathsf{cov}(\mathcal{M}) \arrow[u] \arrow[r] & \mathsf{non}(\mathcal{N}) \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

図 2: 拡張された Cichoń's diagram

3 Cichoń's diagram の拡張

前節の無矛盾性証明によって, $\mathfrak{b}^*$, $\mathsf{shr}(\mathcal{M})$ および $\mathsf{shr}(\mathcal{N})$ は, 既に知られている基数不変量とは異なる新しい基数であることが確かめられた.

さらに, これらの新しい基数に関して, 次のような大小関係が ZFC から証明される.

定理 3.1 (湯浅 [12]) $\mathfrak{b}^* \leq \mathsf{shr}(\mathcal{M})$.

以上の結果により, Cichoń's diagram に $\mathfrak{b}^*$, $\mathsf{shr}(\mathcal{M})$ および $\mathsf{shr}(\mathcal{N})$ を加えて, 図 2 のように拡張することができる.

それでは, 拡張された Cichoń's diagram は「完全」なのだろうか. 図 2 における位置関係から, まず疑うべきは「$\mathfrak{d} \leq \mathsf{shr}(\mathcal{N})$ は ZFC で証明可能か?」という問題であるが, この答えは「否」である.

$\mathsf{shr}(\mathcal{N}) < \mathfrak{d}$ を満たすモデルは, Laver forcing によって構成される. (Laver forcing の定義は [11] または [1, Definition 7.3.24] を参照せよ.) この構成においても, forcing に関する保存定理が重要な役割を果たす.

以下, この節では特に断らない限り CH を仮定する.

Laver forcing に関する基本的な事実を次に述べる. $\mathbb{LT}$ を Laver forcing notion とし, $\mathbb{LT}$ の α-stage countable-support iteration を $\mathbb{LT}_\alpha$ で表す.

補題 3.2 (1) $\mathbb{LT}$ は axiom A ([1, Definition 7.2.1]) をみたす.

(2) ([11, Lemma 9]) 各 $\alpha < \omega_2$ について, 濃度 ω_1 の, $\mathbb{LT}_\alpha$ の dense な部分集合 D_α が存在する. 特に, $\alpha < \omega_2$ について, $\mathbb{LT}_\alpha$ は ω_2-c.c. である.

(3) 各 $\alpha < \omega_2$ について, $\mathbb{LT}_\alpha$ による forcing 拡大において CH が成り立つ.

(4) $\mathbb{LT}_{\omega_2}$ による forcing 拡大において, $\mathfrak{b} = \omega_2 = 2^\omega$ である.

証明の要となるのは, 次の保存定理である.

補題 3.3 ([1, Theorem 7.3.37]) 任意の α について, $\mathbb{LT}_\alpha$ は外測度正の集合を保存する.

定理 3.4 $\mathbb{LT}_{\omega_2}$ による forcing モデルにおいて, $\mathsf{shr}(\mathcal{N}) = \omega_1$ が成り立つ.

証明. そうでないとすると, $p \in \mathbb{LT}_{\omega_2}$ および ω^ω の元を表す standard $\mathbb{LT}_{\omega_2}$-name の集合 $\dot{A} = \{\dot{f}_\xi : \xi < \omega_2\}$ で,

$$p \Vdash_{\omega_2} \text{“}\dot{A} \notin \mathcal{I} \wedge \forall \delta < \omega_2 (\{\dot{f}_\xi : \xi < \delta\} \in \mathcal{I})\text{”}$$

なるものが存在する.

$S_0 = \{\delta < \omega_2 : \forall \xi < \delta (\dot{f}_\xi \text{ is an } \mathbb{LT}_\delta\text{-name}) \wedge \mathrm{cf}(\delta) = \omega_1\}$ とすると, S_0 は ω_2 において stationary な集合となる. $\delta \in S_0$ を固定せよ. 仮定および補題 3.3 より, Borel コードを表す standard $\mathbb{LT}_\delta$-name $\dot{c}'_\delta$ で,

$$p \Vdash_\delta \text{“}\{\dot{f}_\xi : \xi < \delta\} \subseteq \hat{c}'_\delta \wedge \hat{c}'_\delta \in \mathcal{I}\text{”}$$

なるものが存在する. $\mathbb{LT}$ は axiom A をみたすので, fusion argument により, $q_\delta \in D_{\varphi(\delta)}$ および Borel コードを表す standard $\mathbb{LT}_{\varphi(\delta)}$-name $\dot{c}_\delta$ を,

(1) $q_\delta \Vdash_\delta \text{“}\dot{c}_\delta = \dot{c}'_\delta\text{”}$

(2) $\dot{c}_\delta$ を構成する antichain はすべて可算

なるように構成できる. ところで, $\mathrm{cf}(\delta) = \omega_1$ であるから, $\varphi(\delta) < \delta$ を, $q_\delta \in \mathbb{LT}_{\varphi(\delta)}$ かつ, $\dot{c}_\delta$ が $\mathbb{LT}_{\varphi(\delta)}$-name となるようにとることができる.

φ は S_0 から ω_2 への regressive function となる. ω_2 上の Fodor's lemma([9, Lemma 6.15]) によって, $\gamma < \omega_2$ および ω_2上の stationary set $S_1 \subseteq S_0$ で, 任意の $\delta \in S_1$ に対して $\varphi(\delta) = \gamma$ なるものがとれる. さらに, $|D_\gamma| = \omega_1$ より, 濃度 ω_2 の $S_2 \subseteq S_1$, $q \in D_\gamma$, Borel コードを表す standard $\mathbb{LT}_\gamma$-name $\dot{c}$ で, 任意の $\delta \in S_2$ について $\Vdash_\gamma \text{“}\dot{c} = \dot{c}_\delta\text{”}$ かつ $q = q_\delta$ なるものがとれる.

ここで, $q \Vdash_{\omega_2} \text{“}\hat{c} \in \mathcal{I}\text{”}$ である. 仮定により, $p \Vdash_{\omega_2} \text{“}\dot{A} \notin \mathcal{I}\text{”}$ であるから, $r \leq q$ および $\eta < \omega_2$ を, $r \Vdash_{\omega_2} \text{“}\dot{f}_\eta \notin \hat{c}\text{”}$ なるようにとれる. ところが, S_2 は ω_2 において unbounded なので, $\delta \in S_2$ で, $\delta > \eta$, $r \in \mathbb{LT}_\delta$ かつ $\dot{f}_\eta$ が $\mathbb{LT}_\delta$-name となるような δ が存在する. この δ について,

$$q \Vdash_\delta \text{“}\{\dot{f}_\xi : \xi < \delta\} \subseteq \hat{c}\text{”}$$

であるが, これは $q \Vdash_\delta \text{“}\dot{f}_\eta \in \hat{c}\text{”}$ を意味するので, 矛盾である. □

系 3.5 $\mathsf{shr}(\mathcal{N}) < \mathfrak{d}$ は ZFC 上無矛盾である.

4 ω^ω上の組合せ論的性質との関連

Baire 空間における σ-イデアル $\mathcal{K}$ が, $\mathfrak{b}$ および $\mathfrak{d}$ という組合せ論的な基数と関係していることは, 既に述べた通りである. これと同様に, meager イデアル $\mathcal{M}$ から定義される基数のうち, $\mathsf{non}(\mathcal{M})$ および $\mathsf{shr}(\mathcal{M})$ の 2 つについても, 次の定理によって ω^ω上の組合せ論と関連づけられている.

定理 4.1 (Miller-Bartoszyński [1, Theorems 2.4.1 and 2.4.7])

(1) $\mathsf{non}(\mathcal{M})$ は, $\mathcal{F} \subseteq \omega^\omega$ で「任意の $f \in \omega^\omega$ に対し, $g \in \mathcal{F}$ で, 無限個の $n < \omega$ に対して $f(n) = g(n)$ なる g が存在する」ような $\mathcal{F}$ の最小濃度に一致する.

(2) $\mathsf{cov}(\mathcal{M})$ は, $\mathcal{F} \subseteq \omega^\omega$ で「任意の $f \in \omega^\omega$ に対し, $g \in \mathcal{F}$ で, 有限個を除くすべての $n < \omega$ に対して $f(n) \neq g(n)$ なる g が存在する」ような $\mathcal{F}$ の最小濃度に一致する.

この定理を見ると, $\mathsf{non}(\mathcal{M})$ および $\mathsf{cov}(\mathcal{M})$ の組合せ論的な特徴づけが, それぞれ $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{d}$ の定義によく似ていることに気付く. $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{d}$ については, 事実 1.1 により, イデアル $\mathcal{K}$ を用いて表されるのであった. そこで, $\mathsf{non}(\mathcal{M})$, $\mathsf{cov}(\mathcal{M})$ についても, $\mathcal{M}$ とは別の, 組合せ論的に定義されるイデアルによって表現可能であることが自然に予想される.

定義 4.2 $f \in \omega^\omega$ に対し,

$$E_f = \{g \in \omega^\omega : \text{有限個を除くすべての } n < \omega \text{ に対して } f(n) \neq g(n)\}$$

とおく. 各 $f \in \omega^\omega$ に対する E_f の形の ω^ω の部分集合の可算和全体で生成される σ-イデアルを $\mathcal{ED}$ で表す.

E_f の形の集合をそのまま集めたのでは, ω^ω上のイデアルの基底をなさない. 実際, E_f の形の集合全体は, 可算和はもとより 2 つの和ですら閉じていないことが容易に確かめられる.

記号 $\mathcal{ED}$ は “eventually different ideal” の略である.

補題 4.3 (1) $\mathcal{K} \subsetneq \mathcal{ED} \subsetneq \mathcal{M}$.

(2) $\mathsf{non}(\mathcal{ED}) = \mathsf{non}(\mathcal{M})$.

(3) $\mathsf{cov}(\mathcal{ED}) = \mathsf{cov}(\mathcal{M})$.

証明. (1) $\mathcal{K} \subsetneq \mathcal{ED}$ は明らか. 任意の $f \in \omega^\omega$ について $E_f \in \mathcal{M}$ であるから, $\mathcal{ED} \subseteq \mathcal{M}$ である. また,

$$H = \{g \in \omega^\omega : \forall n \in \omega\, (g(2n) = 0)\}$$

とおくと, $H \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{ED}$ である.

(2) $\mathcal{ED} \subseteq \mathcal{M}$ より $\mathsf{non}(\mathcal{ED}) \leq \mathsf{non}(\mathcal{M})$ は明らか. また, $F \notin \mathcal{ED}$ なる任意の F は定理 4.1(1) の要件をみたすので, $\mathsf{non}(\mathcal{M}) \leq \mathsf{non}(\mathcal{ED})$ である.

(3) $\mathcal{ED} \subseteq \mathcal{M}$ より $\mathsf{cov}(\mathcal{M}) \leq \mathsf{cov}(\mathcal{ED})$ は明らか. また, $F \subseteq \omega^\omega$ が定理 4.1(2) の要件をみたすならば, $\bigcup\{E_f : f \in F\} = \omega^\omega$ となるので, $\mathsf{cov}(\mathcal{ED}) \leq \mathsf{cov}(\mathcal{M})$ である. □

残念ながら, $\mathsf{add}(\mathcal{ED})$ や $\mathsf{cof}(\mathcal{ED})$ については, 意味のある結果は得られない.

命題 4.4 $\mathsf{add}(\mathcal{ED}) = \omega_1$ かつ $\mathsf{cof}(\mathcal{ED}) = 2^\omega$ である.

証明. これらの証明においては, 次の補題が本質的である.

補題 4.5 $\lambda \geq \omega_1$ とする. $\{f_\alpha : \alpha < \lambda\} \subseteq \omega^\omega$ は, $\alpha \neq \beta$ なる任意の $\alpha, \beta < \lambda$ に対して, 無限個の n について $f_\alpha(n) \neq f_\beta(n)$ であるとする. このとき, 任意の ω^ω の元の可算列 $\{g_i : i < \omega\}$ に対して, 次をみたす $h \in \omega^\omega$ が存在する:

(1) 有限個を除くすべての $n < \omega$ について $h(n) \neq f_\alpha(n)$ なる $\alpha < \lambda$ が存在する.

(2) すべての $i < \omega$ について, $h(n) = g_i(n)$ なる $n < \omega$ が無限個存在する.

証明. まず,「各 $i < \omega$ に対して, $f_\alpha(n) \neq g_i(n)$ なる $n < \omega$ が無限個存在する」ような $\alpha < \lambda$ が存在することを示そう. そうでないとすると, 各 α について, $i_\alpha < \omega$ が存在して, 有限個を除くすべての $n < \omega$ について $f_\alpha(n) = g_{i_\alpha}(n)$ となる. このとき, $\alpha < \beta < \lambda$ で, $i_\alpha = i_\beta$ なるものが存在するが, これは有限個を除くすべての $n < \omega$ について $f_\alpha(n) = f_\beta(n)$ なることを意味するので, 矛盾である.

このような α を選んで固定する. このとき, 互いに素な ω の無限部分集合の可算列 $\{X_i : i < \omega\}$ で,「各 $i < \omega$ に対して, すべての $n \in X_i$ について $f_\alpha(n) \neq g_i(n)$」なるものがとれる. $h \in \omega^\omega$ を,

$$h(n) = \begin{cases} g_i(n) & \text{ある } i < \omega \text{ について } n \in A_i \text{ なるとき} \\ f_\alpha(n) + 1 & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

によって定めれば, h は補題の条件 (1)(2) をみたす. □

$\{f_\alpha : \alpha < 2^\omega\} \subseteq \omega^\omega$ を, 上の補題の仮定をみたすように選ぶことができる. 補題により, $\bigcup\{E_{f_\alpha} : \alpha < \omega_1\} \notin \mathcal{ED}$ であるから, $\mathsf{add}(\mathcal{ED}) = \omega_1$ である. また, 補題により, $\mathcal{ED}$ の 1 つの元では, $\{E_{f_\alpha} : \alpha < 2^\omega\}$ の元のうち可算個しか覆うことができない. したがって, $\mathcal{ED}$ の基底の濃度は 2^ω でなければならない. すなわち $\mathsf{cof}(\mathcal{ED}) = 2^\omega$ である. □

イデアル $\mathcal{ED}$ についても, $\mathsf{shr}(\mathcal{ED})$ なる基数を考えることができる. 定理 2.4 により, $\mathsf{non}(\mathcal{ED}) \leq \mathsf{shr}(\mathcal{ED}) \leq 2^\omega$ であるが, $\mathsf{non}(\mathcal{ED}) < \mathsf{shr}(\mathcal{ED})$ および $\mathsf{shr}(\mathcal{ED}) < 2^\omega$ は無矛盾だろうか. $\mathcal{ED}$ が Borel コードの意味で absolute であることは容易にわかるので, 次の補題によって両方の無矛盾性が示される.

補題 4.6 任意の無限集合 I について, $\mathbb{C}(I)$ は $\mathcal{ED}$-positive な集合を保存する.

証明. $\mathbb{C} = \mathbb{C}(\omega)$ が $\mathcal{ED}$-positive な集合を保存することを示せば十分. そうでないとせよ. すると, $p_0 \in \mathbb{C}$, $\mathcal{ED}$ に含まれない ω^ω の部分集合 $\mathcal{F}$ および ω^ω の元を表す $\mathbb{C}$-name の列 $\{\dot{g}_i : i < \omega\}$ で,

$$p_0 \Vdash_{\mathbb{C}} \text{“}\mathcal{F} \subseteq \bigcup\{E_{\dot{g}_i} : i < \omega\}\text{”}$$

なるものが存在する. 各 $p \le p_0$, $i < \omega$, $n < \omega$ に対し, $\mathcal{F}^p_{i,n} \subseteq \mathcal{F}$ および $g^p_i \in \omega^\omega$ を

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^p_{i,n} &= \{f \in \mathcal{F} : p \Vdash_{\mathbb{C}} \forall m \ge n\,(f(m) \ne \dot{g}_i(m))\},\\ g^p_i(m) &= \min\{k \in \omega : \exists q \le p\,(q \Vdash_{\mathbb{C}} \dot{g}_i(m) = k)\}\end{aligned}$$

により定義する. このとき, 各 $p \le p_0$, $i < \omega$, $n < \omega$ について $\mathcal{F}^p_{i,n} \subseteq E_{g^p_i}$ が成り立つので,

$$\mathcal{F} = \bigcup\{\mathcal{F}^p_{i,n} : p \le p_0 \wedge i < \omega \wedge n < \omega\} \subseteq \bigcup\{E_{g^p_i} : p \le p_0 \wedge i < \omega\}$$

となる. $\mathbb{C}$ は可算なので, $\mathcal{F}$ は $\mathcal{ED}$ の元となり, 矛盾である. □

系 4.7 MA および $2^\omega = \lambda$ を仮定する. κ を $\lambda \le \kappa$ かつ $\mathrm{cf}(\kappa) \ge \omega_1$ なる基数とする. このとき, $\mathbb{C}(\kappa)$ による forcing モデルにおいて, $\mathsf{non}(\mathcal{ED}) = \mathsf{non}(\mathcal{M}) = \omega_1$, $\mathsf{shr}(\mathcal{ED}) = \lambda$ かつ $\mathsf{cof}(\mathcal{M}) = 2^\omega = \kappa$ が成立する.

ところで, $\mathsf{non}(\mathcal{I})$ および $\mathsf{shr}(\mathcal{I})$ の定義においては, 実は $\mathcal{I}$ がイデアルであることは本質的でない. そこで, イデアル $\mathcal{ED}$ を用いる代わりに, 次のような基数を考えることもできる.

- $\mathfrak{ie}$: $\mathcal{F} \subseteq \omega^\omega$ で, すべての $f \in \omega^\omega$ について $\mathcal{F} \not\subseteq E_f$ なる $\mathcal{F}$ の最小濃度.
- $\mathfrak{ie}^*$: 「$\mathcal{F} \subseteq \omega^\omega$ について, 任意のの $f \in \omega^\omega$ に対して $\mathcal{F} \not\subseteq E_f$ ならば, 常に $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ で, $|\mathcal{G}| \le \lambda$ かつ, 任意の $f \in \omega^\omega$ に対して $\mathcal{G} \not\subseteq E_f$ なるものが存在する」ような基数 λ の最小値

もちろん, 定理 4.1 によって $\mathfrak{ie} = \mathsf{non}(\mathcal{M})$ であるから, $\mathfrak{ie}$ の定義そのものに意味はなく, $\mathfrak{b}^*$ のアナロジーで $\mathfrak{ie}^*$ を定義するために, 形式的に $\mathfrak{ie}$ という記号を導入したまでである.

ところが, こうして定義された基数 $\mathfrak{ie}^*$ は, 次に示すように, 自明なものになってしまう. したがって, $\mathcal{ED}$ を単に E_f たちの集まりとするのでなく, σ-イデアルになるように拡張して定義したことが, 実は本質的だったということになる. 次の命題は湯浅氏の指摘による.

命題 4.8 $\mathfrak{ie}^* = 2^\omega$.

証明. $\mathcal{A}$ を, ω 上の maximal almost disjoint family で, $\bigcup\mathcal{A} = \omega$ なるものとする. ([9, Theorem 1.3] により, このような $\mathcal{A}$ は存在する.) $\mathcal{F} = \{f \in \omega^\omega : \exists A \in \mathcal{A}(\mathrm{ran}(f) \subseteq A)\}$ とおく. この $\mathcal{F}$ が $\mathfrak{ie}^* = 2^\omega$ を示す集合であることを確かめる.

まず, 任意の $g \in \omega^\omega$ に対し, $f \in \mathcal{F}$ で, $f \notin E_g$ なるものが存在することを示す. $\mathrm{ran}(g)$ が有限の場合は, ある $k < \omega$ について $g^{-1}(\{k\})$ が無限集合となるので, $\bigcup\mathcal{A} = \omega$ より明らか. $\mathrm{ran}(g)$ が無限の場合は, $A \in \mathcal{A}$ で, $A \cap \mathrm{ran}(g)$ が無限集合となるものが存在するので, やはり求める f を $\mathcal{F}$ の中から選べる.

次に, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ で, $|\mathcal{G}| < 2^\omega$ なるものを任意にとる. このとき, $\mathcal{A}$ が maximal almost disjoint family であることから, ω の無限部分集合 B で, すべての $f \in \mathcal{G}$ について $B \cap \mathrm{ran}(f)$ が有限になるものが存在する. h を ω から B への 1 対 1 関数とすると, $\mathcal{G} \subseteq E_h$ となる. □

5 問題

系 3.5 により, 拡張された Cichoń's diagram(図 2) に現れる基数の間の大小関係のうち, 2 項間の関係については, すべての可能性が調べられたことになる. しかしながら, 次の意味で, 拡張された Cichoń's diagram は「完全」であるか, という問題はまだ残っている.

問題 5.1 $2^\omega = \omega_2$ のもとで, 拡張された Cichoń's diagram に矛盾しないような, 基数の値のあらゆる可能な組み合わせについて, それをみたすような ZFC のモデルは構成できるか?

$\mathfrak{b}^*$, $\mathsf{shr}(\mathcal{M})$ および $\mathsf{shr}(\mathcal{N})$ も含めた基数の値の可能な組み合わせで, [2] の結果から直ちにモデルが得られないものは 38 通りある. これらのうち, およそ半分については, 定理 2.9 および定理 3.4 の手法を一般化することにより, すでに知られている forcing に関する保存定理を利用してモデルを構成することができる. しかし, 残りの組み合わせについては, ZFC に矛盾する可能性もあるし, モデルが存在するにしても, その構成には本稿で述べたものとは異なる新たな手法が必要になると思われる.

次に, イデアル $\mathcal{ED}$ に関する問題を示す. $\mathsf{shr}(\mathcal{ED})$ が $\mathsf{non}(\mathcal{ED})$, $\mathsf{cof}(\mathcal{ED})(= 2^\omega)$ のどちらとも異なることは系 4.7 によって示されているが, この結果を見ると, Cohen forcing に関しては $\mathsf{shr}(\mathcal{ED})$ は $\mathsf{shr}(\mathcal{M})$ と同じような挙動を示していることに気づく. そこで, 次のような問題が考えられる.

問題 5.2 $\mathsf{shr}(\mathcal{ED}) = \mathsf{shr}(\mathcal{M})$ であるか?

あるいは, 一歩譲って,

問題 5.3 $\mathfrak{b}^* \leq \mathsf{shr}(\mathcal{ED})$ であるか?

これは, $\mathsf{non}(\mathcal{ED}) = \mathsf{non}(\mathcal{M})$ や $\mathfrak{b}^* \leq \mathsf{shr}(\mathcal{M})$ を考えると, 自然な予想であるようにも思えるが, 実はそれほど自明ではない. $\mathsf{shr}(\mathcal{I})$ については, イデアルの包含関係と基数の大小との間には直接の関係がないからである.

ともかく, $\mathcal{ED}$ と $\mathcal{M}$ の関係を調べることは, $\mathcal{M}$ の組合せ論的な性質を明らかにすることにつながるので, 大いに興味深い問題である.

$\mathfrak{b}^*$ の性質については, 本稿に述べた結果以外にもいくつかの結果が明らかになっているほか, 未解決の問題も残っている. それらについては [8] および [12] を参照されたい.

謝辞. 本研究全般にわたって多くの有益な助言をくださった加茂静夫先生, 湯浅能史氏, [1] の草稿を提供してくださった Tomek Bartoszyński 氏に, この場をお借りして御礼申し上げます.

参考文献

[1] T. Bartoszyński and H. Judah. *Set Theory: On the Structure of the Real Line*. A. K. Peters, 1995. to appear.

[2] T. Bartoszyński, H. Judah, and S. Shelah. The Cichoń diagram. *J. Symbolic Logic*, Vol. 58, pp. 401–423, 1993.

[3] K. Eda, M. Kada, and Y. Yuasa. The tightness about sequential fans and combinatorial properties. to appear in J. Math. Soc. Japan.

[4] D. H. Fremlin. Cichoń's diagram. In G. Choquet, M. Rogalski, and J. Saint-Raymond, editors, *Séminaire Initiation à l'Analyse*, pp. (5–01)–(5–13). Univ. Pierre et Marie Curie, 1983/84.

[5] T. Jech. Some combinatorial problems concerning uncountable cardinals. *Ann. Math. Logic*, Vol. 5, pp. 165–198, 1973.

[6] T. Jech. *Set theory.* Academic Press, 1978.

[7] M. Kada. Tightness and combinatorial properties concerning sequential fans. Master's thesis, Univ. of Tsukuba, 1995.

[8] M. Kada and Y. Yuasa. Cardinal invariants about shrinkability of unbounded sets. to appear in Topology Appl.

[9] K. Kunen. *Set Theory.* North Holland, 1980.

[10] K. Kunen. Random and Cohen reals. In K. Kunen and J. E. Vaughan, editors, *Handbook of set-theoretic topology*, pp. 887–911. North Holland, 1984.

[11] R. Laver. On the consistency of Borel's conjecture. *Acta Math.*, Vol. 137, pp. 151–169, 1976.

[12] 湯浅能史. Shrinkability of unbounded sets in the Cohen extension. 「数学基礎論およびその応用」研究集会講究録. 京都大学数理解析研究所, 1995.

大阪府立大学総合科学部 (理学系研究科) / 593 大阪府堺市学園町 1-1
E-mail: `kada@center.osakafu-u.ac.jp`