数理解析研究所講究録
930 巻 1995 年 55-58

Shrinkability of Unbounded Sets in the Cohen Extention

湯浅 能史
(Yuasa, Yoshifumi)

早稲田大学理工学部数学科
Email: yuasa@logic.info.waseda.ac.jp

1 はじめに

基数不変量 $\mathbf{b}^*$ は論文 [1] において Sequential fan の tightness の特徴づけを目的に導入されたもので、以下のように定義される。

$$\mathbf{b}^* = \min\{\kappa; \forall X \subseteq {}^\omega\omega\ [X : \mathrm{ubd} \Rightarrow \exists Y \subseteq X\ \ (|Y| \leq \kappa \,\&\, Y : \mathrm{ubd})]\}$$

一方、bounded set 全体は無理数の中で σ-コンパクト集合のなすイデアルと対応しており、$\mathbf{b}^*$ はこのイデアルの特性を表すものともとらえることができる。では、逆にこの $\mathbf{b}^*$ のアイデアを一般のイデアル $\mathcal{I}$ にも拡張したらどのような基数不変量が得られるだろうか？自然な拡張としては次の二つが考えられる。

$$\begin{aligned}\mathsf{add}^*(\mathcal{I}) &= \min\{\kappa; \forall \mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}\ [\bigcup\mathcal{A} \notin \mathcal{I} \Rightarrow \exists \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}\ \ (|\mathcal{B}| \leq \kappa \,\&\, \bigcup\mathcal{B} \notin \mathcal{I})]\} \\ \mathsf{non}^*(\mathcal{I}) &= \min\{\kappa; \forall A \subseteq \mathbb{R}\ [A \notin \mathcal{I} \Rightarrow \exists B \subseteq A\ \ (|B| \leq \kappa \,\&\, B \notin \mathcal{I})]\}\end{aligned}$$

ところがこれらは実は同じものになってしまう。実際、$\lambda \leq \mathsf{add}^*(\mathcal{I})$ の witness $\mathcal{A}$ があれば $\bigcup\mathcal{A}$ は $\lambda \leq \mathsf{non}^*(\mathcal{I})$ の witness となるし、逆に $\lambda \leq \mathsf{non}^*(\mathcal{I})$ の witness A があれば $\{\{x\}; x \in A\}$ は $\lambda \leq \mathsf{add}^*(\mathcal{I})$ の witness となることが分る。そこでこの二つの同値な定義を持つ基数不変量を $\mathsf{shr}(\mathcal{I})$ と名付けることにする。$\mathcal{I}$ として零集合のイデアル $\mathcal{N}$ や第一類集合のイデアル $\mathcal{M}$ 等々をとった時にこの不変量が Cichoń の図式のどこに位置付けられるかは、この講究録中の嘉田氏の論文に詳しく述べられているので、興味のある方はそちらを参照して頂きたい。ここでは、特に第一類集合のイデアルと $\mathbf{b}^*$ の関係だけを扱い、最近得た次の結果の証明を紹介することにする。但し以下で、 M は基底モデル を $\mathbb{P}$ は Cohen の強制概念 $({}^{<\omega}2, \supseteq)$ を意味する。

Theorem 1.1 (I) $\mathbf{b}^* \leq \mathsf{shr}(\mathcal{M})$,

(II) $\Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\mathsf{shr}(\mathcal{M})^M \leq \mathbf{b}^*$",

(III) $\mathsf{shr}(\mathcal{M}) < \mathsf{cov}(\mathcal{M}) \Rightarrow \mathbf{b}^* = \mathsf{shr}(\mathcal{M})$.

以下この定理の証明を行なうが、その前に用語や記号の説明をしておく。本稿での実数とは $[\omega]^\omega$ の元、即ち ω の無限部分集合のことをいう。実数 x はその特徴関数と同一視して、${}^\omega 2$ の元であるとも考えよう。${}^\omega 2$ には通常の位相を考える。つまり、${}^{<\omega}2$ の元 s に対し基本開集合 $[s]$ を $\{x \in {}^\omega 2; s \subseteq x\}$ で定めこれらで生成される位相を入れることにする。二実数 x, y の和 $x+y$ は通常のように対称差で定義するが、これを ${}^{\leq\omega}2$ 上の演算に拡張するために以下で定義し直すことにする。

$$\begin{aligned}&\mathrm{dom}\,(x+y) = \mathrm{dom}\,x \cap \mathrm{dom}\,y \,\& \\ &\forall k \in \mathrm{dom}\,(x+y)\ \ [(x+y)(k) = x(k) + y(k) \bmod 2]\end{aligned}$$

2 便利な補題

Theorem 1.1 の三つの命題はすべて次の補題から導くことができる。のみならず、Cichoń の図式にも表現されている有名な関係式：

$$\mathsf{add}(\mathcal{M}) = \min\{\mathbf{b}, \mathsf{cov}(\mathcal{M})\} \ \ \& \ \ \max\{\mathsf{non}(\mathcal{M}), \mathbf{d}\} = \mathsf{cof}(\mathcal{M})$$

もこの補題から導くことができる。大変使い道の多い補題である。

Lemma 2.1 実数の疎集合 X に対し、${}^{<\omega}2$ の極大反鎖の可算族 $\{E_n; n \in \omega\}$ が存在して以下の条件を満たす。

$$\forall x \in X \ \ \forall n \in \omega \ \ \forall s \in E_n \ \ n < |(x+s)^{-1}``\{1\}|$$

この補題の証明にとって重要なのは以下の事実である。

[Fact] 任意の ${}^{<\omega}2$ の元 t に対し、その延長 s が存在して次の条件を満たす。

$$\forall x \in X \ \ (x+t)^{-1}``\{1\} \neq (x+s)^{-1}``\{1\}$$

この事実の証明は難しくはないが多少ややこしいのでここでは省略する。文献 [2] の Lemma 12 または [3] の Lemma 3.3 を参照して頂きたい。

Fact を繰り返し用いれば Lemma 2.1 を得ることができる。具体的には E_n が定まったときに、次のように E_{n+1} を構成する。まず E_n の各元 t に対し D^t を次で定める。

$$D^t = \{s \supseteq t; \forall x \in X \ \ (x+t)^{-1}``\{1\} \neq (x+s)^{-1}``\{1\}\}$$

Fact の主張によれば D^t が t の下で dense だということである。よって D^t の部分集合で t 下に極大反鎖をなすもの E^t をとることができる。そこで $E_{n+1} = \bigcup\{E^t; t \in E_n\}$ とすればこれは条件を満たす。

3 (I) の証明

ω の無限部分集合 x を小さい方から順に数え挙げていく関数は ω から ω への（狭義）単調増加関数である。これを $\overline{x}$ と書くことにする。単調増加関数 f に対し $\mathrm{ran}\, f \subseteq x$ なら $\overline{x} \leq^* f$ であることに注意する。

さて、(I) を証明するためには次の補題を用いる。

Lemma 3.1 ${}^\omega\omega$ から $\mathcal{M}$ への写像 $\mathcal{F}$ と $\mathcal{M}$ から ${}^\omega\omega$ への写像 $\mathcal{G}$ で次の条件を満たすものが存在する。

$$\forall f \in {}^\omega\omega\ \forall A \in \mathcal{M}\ \ (\mathcal{F}(f) \subseteq A \Rightarrow f \leq^* \mathcal{G}(A))$$

これは表面的には、文献 [2] で $\mathsf{add}(\mathcal{M})$ が $\mathbf{b}$ 以下であることや $\mathsf{cof}(\mathcal{M})$ が $\mathbf{d}$ 以上であることを示すのに使われている補題と全く同じである。しかし、そこでの $\mathcal{F}$ の定義は (I) の証明にマッチしないのでそのままでは使えない。ここでは f として単調増加なものだけを扱うことにして、$\mathcal{F}(f) = \{x \in [\omega]^\omega; \overline{x} \leq^* f\}$ としよう。このようにすれば、$\lambda \leq \mathbf{b}^*$ の witness が $\mathcal{F}$ によって $\lambda \leq \mathsf{add}^*(\mathcal{M})$ のそれに変換されることは容易に分る。

残るは $\mathcal{G}$ の定義である。まず A を覆うような疎集合族 $\{X_m; m \in \omega\}$ を決め、各 m に対して Lemma 2.1 のように $\{E^m_n; n \in \omega\}$ を取る。$\bigcup\{[s]; s \in E^m_n\}$ は稠密開集合なので Baire のカテゴリ定理を用いて、各 E^m_n と一点 s^m_n のみで交わるような ${}^{<\omega}2$ の無限枝が b_A を選べる。y_A は $\bigcup b_A$ を特徴関数として持つ無限集合としよう。そこで $\mathcal{G}(A)$ を次で定義すればよい。

$$\mathcal{G}(A)(n) = \max\{|s^m_n|; m \leq n\}$$

以下これらが条件を満たすことを示そう。$\mathcal{F}(f) \subseteq A$ を仮定する。$x = \mathrm{ran}\, f \cup y_A$ とおけば $x \leq^* f$ だから、これは $\mathcal{F}(f)$ の元であり従って A の元でもある。よって $x \in X_m$ となる m が存在するので、これを固定する。各 n に対し E^m_n のとり方より次がいえる。

$$n < |(x + s^m_n)^{-1}``\{1\}| \leq |(\mathrm{ran}\, f \cap |s^m_n|)|$$

従って、$f(n) < |s^m_n|$ であり、特に $m \leq n$ の時は $f(n) < \mathcal{G}(A)(n)$ となる。

4 (II) と (III) の証明

(II) を証明するには次の補題を示せば良い。但しここで $\dot{c}$ は Cohen 実数の name である。また、$\overline{A+c}$ は $\{\overline{x+c}; x \in A\}$ を意味する。

Lemma 4.1 A が第一類集合であれば次が成り立つ。

$$\Vdash_{\mathbb{P}} \text{“}\overline{A+\dot{c}} : \mathrm{bdd}\text{”}$$

これにより基底モデルにおける $\lambda \leq \mathsf{non}^*(\mathcal{M})$ の witness B が Cohen 拡大モデルにおける $\lambda \leq \mathbf{b}^*$ の witness $\overline{B+c}$ に変換できることが分り、(II) が示される[1]。

[1] Cohen 拡大では non-meagerness が保存されることを使う。

Lemma 4.1 自体を示すには、まず A を覆うような疎集合の可算族 $\{X_m; m \in \omega\}$ を決め、各 m に対し ω から ω への関数を表す name $\dot{g}_m$ を次のように定める。

$$\Vdash_{\mathbb{P}} \text{“}\dot{g}_m(n) = |s| \Leftrightarrow E_n^m \cap \dot{G} = \{s\}\text{”}$$

ここで $\{E_n^m; n \in \omega\}$ は Lemma 2.1 によって X_m から定まる極大反鎖である。この時、各 m に対して

$$\Vdash_{\mathbb{P}} \text{“}\forall x \in X_m \ \forall n \in \omega \ \overline{x + \dot{c}}(n) \leq \dot{g}_m(n)\text{”}$$

が成り立つので、あとは $\dot{g}_m$ 全てを dominate する $\dot{g}$ をとれば、これが $\overline{A + \dot{c}}$ を bound する。

最後に (III) を示そう。B を $\lambda \leq \mathsf{non}^*(\mathcal{M})$ の witness とする。必要なら λ を多少大きくとり直すことにより、B の濃度は λ であると仮定して良い。B を $\{x_\xi; \xi < \lambda\}$ のように枚挙しておき $A_\alpha = \{x_\xi; \xi < \alpha\}$ とする。λ 未満の各 α につき A_α は第一類集合となるから、(I) や (II) の証明と同じように Lemma 2.1 を使って $\{E_n^m; m, n \in \omega\}$ をとることができる。これらを使って補第一類集合 H_α を以下のように定める。

$$H_\alpha = \bigcap_{m,n \in \omega} \bigcup \{[s]; s \in E_n^m\}$$

この時、H_α の元 x に対しては $\overline{A_\alpha + x}$ が bounded になることが確認できる。従って $\lambda \leq \mathsf{non}^*(\mathcal{M}) < \mathsf{cov}(\mathcal{M})$ の時には、全ての H_α に共通に含まれる x を使って $\lambda \leq \mathbf{b}^*$ の witness $\overline{A + x}$ を得ることができる。

$\kappa < \mathsf{cov}(\mathcal{M})$ なる基数 κ に対しては $\mathbf{MA}_\kappa$(Cohen) が成り立つという事実を踏まえるなら、この命題は (II) の内部強制法版ということができよう。

参考文献

[1] Eda, K., Kada, M. and Yuasa, Y.: The tightness about sequential fans and combinatorial properties, Journal of Mathematical Society of Japan (to appear)

[2] Fremlin, D. H.: Cichoń's diagram, Sem. initiation à l'analyse G.Choquet, M. Rogalski, J. Saint-Raymond, Université Pierre et Marie Curie Paris, 1983/84 pp. 5.01-5.13.

[3] Kada, M. and Yuasa, Y.: Cardinal invariants about shrinkability of unbounded set, Topology and Its applications, (to appear)