数理解析研究所講究録
930 巻 1995 年 59-67

REFINEMENT OF CARR AND JOHNSON'S RESULTS ON $\mathcal{P}_\kappa\lambda$-COMBINATORICS

神奈川大学工学部　阿部　吉弘　(Yoshihiro Abe)

$\mathcal{P}_\kappa\lambda$ 上の combinatorics における Carr の定理を改善し，Johnson の問題に部分的な回答を与える．必要な概念の定義はその都度述べることにする．ただし，本文では，κ は regular uncountable で，λ は κ より大きい cardinal とする．また，$\mathcal{P}_\kappa\lambda = \{x \subset \lambda : |x| < \kappa\}$ で，$|x|$ は x の cardinality である．

1. Carr の定理について．

Carr は [2] において次の定理を述べている．

Theorem. (Carr) *If* $\mathcal{P}_\kappa\lambda \to (SNS^+_{\kappa\lambda})^2$, *then* κ *is almost* λ*-ineffable.*

ここで用いられていて，本文で必要ないくつかの定義を述べる．

Definition. (1) $x \in \mathcal{P}_\kappa\lambda$ に対して，$\hat{x} = \{y \in \mathcal{P}_\kappa\lambda : x \subset y\}$.
(2) $X \subset \mathcal{P}_\kappa\lambda$ が **unbounded** とは次のことである．

$$\forall x \in \mathcal{P}_\kappa\lambda \ (X \cap \hat{x} \neq \emptyset)$$

(3) $I_{\kappa\lambda} = \{X \subset \mathcal{P}_\kappa\lambda : X \text{ is not unbounded }\}$.
(4) X 上の function f が **regressive** とは，次のことである．

$$\forall x \in X \ (f(x) \in x)$$

(5) $SNS_{\kappa\lambda} = \{X \subset \mathcal{P}_\kappa\lambda : \exists f : X \to \lambda(f \text{ is regressive and } f|Y \text{ is not constant for any unbounded } Y \subset X)\}$.
(6) $I \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}_\kappa\lambda)$ に対し，$I^+ = \mathcal{P}(\mathcal{P}_\kappa\lambda) - I$, $I^* = \{X \subset \mathcal{P}_\kappa\lambda : \mathcal{P}_\kappa\lambda - X \in I\}$.
(7) $X \subset \mathcal{P}_\kappa\lambda$ に対し，$[X]^2 = \{(x,y) \in X \times X : x \subsetneq y\}$.
(8) $X \subset \mathcal{P}_\kappa\lambda$ と $I \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}_\kappa\lambda)$ に対し，$X \to (I^+)^2$ とは以下のことである．

$$\forall F : [X]^2 \to 2 \ \exists H \in \mathcal{P}(X) \cap I^+ \ (F|[H]^2 \text{ is constant})$$

(9) X 上の function f が **set regressive** とは，次のことである．

$$\forall x \in X \ (f(x) \subset x)$$

(10) $X \subset \mathcal{P}_\kappa\lambda$ が **almost λ-ineffable** とは，次のことである．

$$\forall f : X \to \mathcal{P}_\kappa\lambda \left[(f \textit{ is set regressive}) \longrightarrow \exists A \subset \lambda \left(\{x \in X : f(x) = x \cap A\} \in I^+_{\kappa\lambda} \right) \right]$$

我々は，Carr と同じ仮定から始めて，もう少し強い結論を導こう．そのための準備として，いくつかの定義とよく知られた事実を述べる．

Definition. (1) $I \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}_\kappa\lambda)$ が **ideal** であるとは，次の条件 (a)~(d) を満たすことである．

(a) $\emptyset \in I \wedge \mathcal{P}_\kappa\lambda \notin I$.
(b) $X \subset Y \wedge Y \in I \longrightarrow X \in I$.
(c) $\delta < \kappa \wedge \{X_\alpha : \alpha < \delta\} \subset I \longrightarrow \cup_{\alpha<\delta} X_\alpha \in I$.
(d) $\forall \alpha < \lambda \ (\{x \in \mathcal{P}_\kappa\lambda : \alpha \notin x\} \in I)$.

(2) $NP(I) = \{X \subset \mathcal{P}_\kappa\lambda : X \not\to (I^+)^2\}$.
(3) I が **normal** とは次のことである．

$$\forall X \in I^+ \ \forall f : X \to \lambda \left[(f \textit{ is regressive}) \longrightarrow \exists Y \in \mathcal{P}(X) \cap I^+ \ (f|Y \textit{ is constant}) \right].$$

(4) $X \subset \mathcal{P}_\kappa\lambda$ が **closed** とは次のことである．

$$\forall \delta < \kappa \ \forall \{x_\alpha : \alpha < \delta\} \subset X \left[\forall \alpha < \forall \beta < \delta \ (x_\alpha \subset x_\beta) \longrightarrow \cup_{\alpha<\delta} x_\alpha \in X \right]$$

(5) $X \subset \mathcal{P}_\kappa\lambda$ が **club** とは，X が closed and unbounded であること．
(6)$NS_{\kappa\lambda} = \{X \subset \mathcal{P}_\kappa\lambda : \exists C \ (C \text{ is club and } C \cap X = \emptyset)\}$.

Fact 1. (1) *$NP(I)$ is an ideal on $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ for any ideal I on $\mathcal{P}_\kappa\lambda$.*
(2) *$NS_{\kappa\lambda}$ is the minimal normal ideal on $\mathcal{P}_\kappa\lambda$.*
(3) $I_{\kappa\lambda} \subsetneq SNS_{\kappa\lambda} \subsetneq NS_{\kappa\lambda}$.
(4) *If any regressive function on X is constant on some $Y \in \mathcal{P}(X) \cap SNS^+_{\kappa\lambda}$, then $X \in NS^+_{\kappa\lambda}$.*

Lemma 1. $NS_{\kappa\lambda} \subset NP(SNS_{\kappa\lambda})$.

Proof. $X \in NP(SNS_{\kappa\lambda})^+$ で，$f : X \to \lambda$ は regressive とする．
$F : [X]^2 \to 2$ を次のように定める．

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad f(x) > f(y) \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

仮定により，ある $H \in \mathcal{P}(X) \cap SNS^+_{\kappa\lambda}$ が存在して，$F|[H]^2$ は constant であるが，明らかに $F''[H]^2 = \{1\}$ である．すなわち，任意の $x, y \in H$ に対し，

$$x \subset y \longrightarrow f(x) \leq f(y)$$

ここで，$H \in SNS^+_{\kappa\lambda}$ だから，$T \in \mathcal{P}(H) \cap I^+_{\kappa\lambda}$ があって，

$$f|T \textit{ is constant}$$

になっている．ゆえに，

$$H \cap \hat{x} \text{ 上で } f \text{ が } constant$$

であるような $x \in H$ が存在することが分かる．

$H \cap \hat{x} \in SNS^+_{\kappa\lambda}$ だから，Fact 1-(4) により，$X \in NS^+_{\kappa\lambda}$ である． □

Definition. (1) $h : \lambda \times \lambda \to \lambda$ に対し，

$$C_h = \{x \in \mathcal{P}_\kappa\lambda : h''x \times x \subset x\}$$

(2) $X \subset \mathcal{P}_\kappa\lambda$ のとき，$f : X \to \lambda \times \lambda$ が **regressive** とは，

$$\forall x \in X \ (f(x) \in x \times x)$$

Fact 2. (1) *C_h is club for any $h : \lambda \times \lambda \to \lambda$.*
(2) *If any regressive function $f : X \to \lambda \times \lambda$ is constant on some unbounded subset of X, then $X \in NS^+_{\kappa\lambda}$.*

Lemma 2 (1) *Let $h : \lambda \times \lambda \to \lambda$ be a bijection. If $X \cap C_h \in SNS^+_{\kappa\lambda}$, then $X \in NS^+_{\kappa\lambda}$.*

Proof. $g : X \cap C_h \to \lambda \times \lambda$ は regressive とする．

$h \circ g : X \cap C_h \to \lambda$ は $X \cap C_h$ 上の regressive function となり，$X \cap C_h \in SNS^+_{\kappa\lambda}$ の仮定から，

$$\exists Y \in I^+_{\kappa\lambda} \ (Y \subset X \cap C_h \wedge (h \circ g)|Y \ is \ constant)$$

となるが，h は bijection だから，

$$g|Y \ is \ constant$$

従って，Fact 2-(2) より，$X \cap C_h \in NS^+_{\kappa\lambda}$． □

Lemma 3. $NP(SNS_{\kappa\lambda}) = NP(NS_{\kappa\lambda})$.

Proof. Lemma 1 と定義から，$NS_{\kappa\lambda} \subset NP(SNS_{\kappa\lambda}) \subset NP(NS_{\kappa\lambda})$ である．

$X \in NP(SNS_{\kappa\lambda})^+$ とする．

任意の bijection $h : \lambda \times \lambda \to \lambda$ に対し，Lemma 1 と Fact 2-(1) から，$C_h \in NS^*_{\kappa\lambda} \subset NP(SNS_{\kappa\lambda})^*$ であるから，

$$X \cap C_h \in NP(SNS_{\kappa\lambda})^+$$

つまり，

$$\forall F : [X \cap C_h]^2 \to 2 \ \exists H \in SNS^+_{\kappa\lambda} \ (F|[H]^2 \ is \ constant)$$

ここで，$H = H \cap C_h \in SNS^+_{\kappa\lambda}$ だから，Lemma 2 により，$H \in NS^+_{\kappa\lambda}$ を得る．すなわち，

$$\forall F : [X]^2 \to 2 \ \exists H \in NS^+_{\kappa\lambda} \ (F|[H]^2 \ is \ constant)$$

だから，$X \in NP(NS_{\kappa\lambda})^+$．よって，

$$NP(SNS_{\kappa\lambda}) \supset NP(NS_{\kappa\lambda}) \quad \square$$

以上から，次の定理が得られた．

Theorem 1. $\mathcal{P}_\kappa\lambda \to (SNS^+_{\kappa\lambda})^2$ *if and only if* $\mathcal{P}_\kappa\lambda \to (NS^+_{\kappa\lambda})^2$.

$\mathcal{P}_\kappa\lambda \to (NS^+_{\kappa\lambda})^2$ からは，κ が **λ-ineffable** であることが導かれる．

Definition. (1) $X \subset \mathcal{P}_\kappa\lambda$ が **λ-ineffable** とは次のことである．

$$\forall f : X \to \mathcal{P}_\kappa\lambda \left[(f \text{ is set regressive}) \longrightarrow \exists A \subset \lambda \; (\{x \in \mathcal{P}_\kappa\lambda : f(x) = x \cap A\} \in NS^+_{\kappa\lambda})\right].$$

(2) κ が **λ-ineffable** とは $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ が λ-ineffable であることとする．

Kamo [6] では，κ が λ-ineffable であることは，almost λ-ineffable であることより，本質的に強い仮定であることが示されている．これはまた，Theorem 1 が最初に述べた Carr の定理よりも実際に良い結果であることを意味している．

2. Partial answer for Johnson's question.

[5] で Johnson は次のような質問をしている．

Is $I_{\kappa\lambda}$ $(\lambda, 2)$-distributive if κ is mildly λ-ineffable ?

これに対して，Theorem 2 で部分的な解答を与える．

Theorem 2. *One can not prove in ZFC that $I_{\kappa\lambda}$ is $(\lambda, 2)$-distributive whenever κ is mildly λ-ineffable.*

まず，定義を述べる．

Definition. (1) $X \subset \mathcal{P}_\kappa\lambda$ が **mildly λ-ineffable** とは，次のことである．

$$\forall f : X \to \mathcal{P}_\kappa\lambda \,[(f \text{ is set regressive}) \longrightarrow \exists A \subset \lambda \; \forall x \in \mathcal{P}_\kappa\lambda \; \exists y \in X \cap \hat{x} \; (f(y) \cap x = x \cap A)]$$

(2) W が $A \in I^+$ の **I-partition** であるとは，次の (a)~(c) を満たすことである．

(a) $W \subset \mathcal{P}(A) \cap I^+$.

(b) $\forall \{X, Y\} \subset W[\,(X \neq Y) \longrightarrow (X \cap Y \in I)]$.

(c) $\forall B \in \mathcal{P}(A) \cap I^+ \; \exists Z \in W \; (B \cap Z \in I^+)$.

(3) イデアル I が **$(\lambda, 2)$-distributive** とは，

$$\forall \{W_\alpha : \alpha < \lambda\} [\forall \alpha < \lambda \; (W_\alpha \text{ is an } I\text{-partition of A } \wedge |W_\alpha| \leq 2)$$

$$\longrightarrow \exists B \in \mathcal{P}(A) \cap I^+ \; \forall \alpha < \lambda \; \exists X_\alpha \in W_\alpha \; (B - X_\alpha \in I)]$$

Johnson's question の背景． mildly λ-ineffable という性質は，weak compactness の一般化と考えられる．実際，

$$\kappa \text{ is weakly compact if and only if } \kappa \text{ is mildly } \kappa\text{-compact}$$

が成り立つ．ところで，

$$\kappa \text{ is weakly compact} \longrightarrow I_{\kappa\kappa} \text{ is } (\kappa, 2)\text{-distributive}$$

である．Johnson's question はこの意味で自然なものといえるだろう．

Lemma 4. *If I is $(\lambda, 2)$-distributive, then $I|X = \{Y \subset \mathcal{P}_\kappa\lambda : Y \cap X \in I\}$ is also $(\lambda, 2)$-distributive for any $X \in I^+$.*

Proof. $A \in (I|X)^+$, $\alpha < \lambda$ に対して W_α は A の $I|X$-partition で $|W_\alpha| \leq 2$ とする．

$B = A \cap X \in I^+$ である．$U_\alpha = \{Z \cap X : Z \in W_\alpha\}$ とすると，U_α は B の I-partition になることが次のようにして確かめられる．

(a) $U_\alpha \subset \mathcal{P}(B) \cap I^+$ であることは，

$$Z \in W_\alpha \longrightarrow Z \in \mathcal{P}(A) \cap (I|X)^+ \longrightarrow Z \cap X \in \mathcal{P}(B) \cap I^+$$

(b) は明か．

(c) $Y \in \mathcal{P}(B) \cap I^+$ とする．$Y \subset B \subset X$ より $Y \in \mathcal{P}(A) \cap (I|X)^+$ でもある．ゆえに，$Z \in W_\alpha$ で $Y \cap Z \in (I|X)^+$ であるものが存在する．

$Z \cap X \in U_\alpha$ で $(Y \cap Z) \cap X \in I^+$ だから， $Y \cap (Z \cap X) \in I^+$.

そこで，$B \in I^+$ に I が $(\lambda, 2)$-distributive であることを適用すると，

$$\forall\alpha < \lambda\ \exists S_\alpha \in W_\alpha\ (C - S_\alpha \in I)$$

であるような， $C \in \mathcal{P}(B) \cap I^+$ が存在する．

$C \in \mathcal{P}(A) \cap (I|X)^+$ で, $S_\alpha = T_\alpha \cap X$ である $T_\alpha \in W_\alpha$ を考えると，

$$(C - T_\alpha) \cap X = C \cap X - T_\alpha \cap X \subset C - S_\alpha \in I$$

より，$C - T_\alpha \in I|X$ が得られる． □

Definition. (1) $J_{\kappa\lambda} = \{X \subset \mathcal{P}_\kappa\lambda : \exists\delta < \lambda\ \exists f : X \to \delta \times \delta$ (f is regressive and $f|Y$ is not constant for any $Y \in \mathcal{P}(X) \cap I^+_{\kappa\lambda}$)$\}$.

(2) I が **seminormal** とは，次のことが成り立つことである．

$$\forall X \in I^+\ \forall\delta < \lambda\ \forall f : X \to \delta\ [(f \text{ is regressive}) \longrightarrow \exists Y \in \mathcal{P}(X) \cap I^+\ (f|Y \text{ is constant })].$$

(3) $h : \delta \times \delta \to \mathcal{P}_\kappa\lambda$ に対して，

$$C_h = \{x \in \mathcal{P}_\kappa\lambda : \forall\alpha, \beta \in x \cap \delta\ (h(\alpha, \beta) \subset x)\}$$

(3) I が **λ-generated** とは

$$\exists\{G_\alpha : \alpha < \lambda\}\ (I = \{X \subset \mathcal{P}_\kappa\lambda : \exists\alpha < \lambda(X \subset G_\alpha)\}.$$

(4) $I^+ \to (I^+)^2$ とは次のことである.

$$\forall X \in I^+\ \forall F : [X]^2 \to 2\ \exists H \in \mathcal{P}(X) \cap I^+\ (F|[H]^2 \text{ is constant }).$$

次の Fact 3 は Johnson [4] の結果である.

Fact 3.(Johnson) (1) *If λ is regular, then $J_{\kappa\lambda}$ is the minimal seminormal ideal on $\mathcal{P}_\kappa\lambda$.*
(2) *If $\lambda^{<\lambda} = \lambda$, then for all $X \in J^+_{\kappa\lambda}$ there exists a $Y \in \mathcal{P}(X) \cap J^+_{\kappa\lambda}$ such that $J_{\kappa\lambda}|X = I_{\kappa\lambda}|X$.*
(3) *If I is seminormal λ-generated and $(\lambda, 2)$-distributive, then $I^+ \to (I^+)^2$.*
(4) *If I is seminormal λ-generated and $P_\kappa\lambda \to (I^+)^2$, then for any set regressive $f : P_\kappa\lambda \to P_\kappa\lambda$, there is a set $A \subset \lambda$ such that for each $\delta < \lambda$,*

$$\{x \in P_\kappa\lambda : f(x) \cap \delta = x \cap A \cap \delta\} \in I^+.$$

Fact 4. (Abe [1]) (1) *If λ is regular, then $J_{\kappa\lambda}$ is generated by $\{\mathcal{P}_\kappa\lambda - C_h : h : \delta \times \delta \to \mathcal{P}_\kappa\lambda$ for some $\delta < \lambda\}$.*

Lemma 5. *If $\lambda^{<\lambda} = \lambda$ and $I_{\kappa\lambda}$ is $(\lambda, 2)$-distributive, then κ is δ-ineffable for all $\delta < \lambda$.*

Proof. Fact 3-(1), Fact 4 と $\lambda^{<\lambda} = \lambda$ より, λ は regular で $J_{\kappa\lambda}$ は seminormal で λ-generated であることになる. さらに, Fact 3-(2) を使うと,

$$I = J_{\kappa\lambda}|X = I_{\kappa\lambda}|X$$

となる $X \in I^+_{\kappa\lambda}$ がある. $I_{\kappa\lambda}$ は $(\lambda, 2)$-distributive であるという仮定と Lemma 4 から, $I = I_{\kappa\lambda}|X$ は $(\lambda, 2)$-distributive である. また, $J_{\kappa\lambda}$ を $\{G_\alpha : \alpha < \lambda\}$ が生成するとすると, $\{G_\alpha \cup (\mathcal{P}_\kappa\lambda - X) : \alpha < \lambda\}$ は $J_{\kappa\lambda}|X = I$ を生成するので, I も λ-generated であり, seminormal なことも明らかである. 以上から, I は seminormal λ-generated $(\lambda, 2)$-distributive であるので, Fact 3-(3) より, $I^+ \to (I^+)^2$ が成り立つ. 特に,

$$P_\kappa\lambda \to (I^+)^2$$

である.

さて, $\delta < \lambda$ で, $f : P_\kappa\delta \to P_\kappa\delta$ は set regressive だとする.

$$g(x) = f(x \cap \delta)$$

で $g : P_\kappa\lambda \to P_\kappa\lambda$ を定義すると, g は set regressive だから Fact 3-(4) より,

$$\{x \in P_\kappa\lambda : g(x) \cap \delta = x \cap A \cap \delta\} \in I^+.$$

を満たす $A \subset \lambda$ が存在する.

$B = \{x \cap \delta : x \in A\}$ とすると, 任意の $x \in B$ に対して, $f(x) = x \cap A$ が成り立つ.

また, $p_*(I)$ を

$$X \in p_*(I) \quad \text{iff} \quad X \subset P_\kappa\delta \quad \text{and} \quad \{x \in P_\kappa\lambda : x \cap \delta \in X\} \in I$$

で定めると，$p_*(I)$ は $P_\kappa\delta$ 上の normal ideal で $B \in p_*(I)^+$ である．特に $B \in NS^+_{\kappa\lambda}$ (Fact 1-(2)) であるので，κ は δ-ineffable なことが示された． □

ここで，large cardinal における基本的な定義を述べる．

Definition. (1) $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}_\kappa\lambda)$ が **fine ultrafilter** on $P_\kappa\lambda$ とは次の条件を満たすことである．

(a) $\emptyset \notin \mathcal{U}$.
(b) $X \in \mathcal{U} \wedge X \subset Y \longrightarrow Y \in \mathcal{U}$.
(c) $\delta < \kappa \wedge \{X_\alpha : \alpha < \delta\} \subset \mathcal{U} \longrightarrow \cap_{\alpha<\delta} X_\alpha \in \mathcal{U}$.
(d) $\forall\alpha < \lambda\ (\{x \in P_\kappa\lambda : \alpha \in x\} \in \mathcal{U})$.
(e) $\forall X \subset P_\kappa\lambda\ (X \in \mathcal{U} \vee P_\kappa\lambda - X \in \mathcal{U})$.

(2) A fine ultrafilter $\mathcal{U}$ on $P_\kappa\lambda$ is **normal** if any regressive function $f : P_\kappa\lambda \to \lambda$ is constant on some $X \in \mathcal{U}$.
(3) κ is **λ-compact** if there is a fine ultrafilter on $P_\kappa\lambda$. κ is **strongly compact** if κ is λ-compact for all $\lambda \geq \kappa$.
(4) κ is **λ-supercompact** if there is a normal ultrafilter on $P_\kappa\lambda$. κ is **supercompact** if κ is λ-supercompact for all $\lambda \geq \kappa$.
(5) κ is **measurable** if κ is κ-compact.

Fact 5. (DiPrisco and Zwicker [3], Magidor [8], [9])
(1) *If κ is $2^{\lambda^{<\kappa}}$-ineffable, then κ is λ-supercompact.*
(2) *It is consistent that the first strongly compact cardinal is the first measurable.*
(3) *If κ is λ-compact, then κ is mildly λ-ineffable.*
(4) *If κ is 2^κ-supercompact, then κ is not the first measurable.*

Proof of Theorem 2. $ZFC \vdash \forall\kappa\, \forall\lambda\ (\kappa$ is mildly λ-ineffable $\longrightarrow I_{\kappa\lambda}$ is $(\lambda, 2)$-distributive) とする．Fact 5-(2) にみられるような κ が strongly compact で the first measurable である ZFC の model を考える．Fact 5-(3) と Lemma 5 より κ は 2^{2^κ}-ineffable であり，さらに Fact 5-(1) より κ は 2^κ-supercompact である．Fact 5-(4) を使うと，κ は the first measurable でないことになり仮定に矛盾する． □

同様な議論で次のことが示される．

Theorem 3. $ZFC \nvdash \forall\kappa\ [\kappa$ *is strongly compact* $\longrightarrow \forall\lambda\ (I^+_{\kappa\lambda} \to (I^+_{\kappa\lambda})^2)]$.

3. Complement.

$I_{\kappa\lambda}$ が $(\lambda, 2)$-distributive でない場合について付記する．

Theorem 4. *If $\lambda^{<\kappa} = 2^\lambda$, then $I_{\kappa\lambda}$ is not $(\lambda, 2)$-distributive.*
この定理のために，Johnson [4], [5] に述べられているいくつかの結果を挙げる．

Definition. I が **strongly normal** とは次のことである．

$$\forall X \in I^+ \ \forall f : X \to \mathcal{P}_\kappa\lambda \ [\forall x \in X \ (f(x) \subset x \wedge |f(x)| < |x \cap \kappa|)$$
$$\longrightarrow \exists Y \in \mathcal{P}(X) \cap I^+ \ (f|Y \text{ is constant })]$$

Fact 6. (1) (Baumgartner) *If there is a $\nu < \kappa$ such that $\nu^+ < \kappa$, $\lambda^\nu = 2^\lambda$ and for each $\eta < \kappa$, $\eta^\nu < \kappa$, then $I_{\kappa\lambda}|X$ is normal for some $X \in I^+_{\kappa\lambda}$.*
(2) *$I_{\kappa\lambda}|X$ is not strongly normal for any $X \in I^+_{\kappa\lambda}$ if κ is weakly inaccessible.*
(3) *Suppose that κ is inaccessible. If I is normal and (μ, λ)-distributive for any $\mu < \kappa$, then I is strongly normal.*
(4) *If $I_{\kappa\lambda}$ is $(\lambda, 2)$-distributive, then κ is mildly λ-ineffable.*

Proof of Theorem 4. $\lambda^{<\kappa} = 2^\lambda$ で $I_{\kappa\lambda}$ は $(\lambda, 2)$-distributive とする．Fact 6-(4) より κ は inaccessible で，Fact 6-(1) の条件が成り立つ．そこで，$I_{\kappa\lambda}|X$ が normal であるような $X \in I^+_{\kappa\lambda}$ をとる．$I_{\kappa\lambda}|X$ は Fact 6-(3) の条件を満たしているので strongly normal になってしまい，Fact 6-(2) に反する． □

[1] では $I_{\kappa\lambda}$ と $SNS_{\kappa\lambda}$ の中間の ideal の hierarchy が考察されているが，それらについて Theorem 1 の一般化が成立する．

参考文献

[1] Y. Abe, *A hierarchy of filters smaller than $CF_{\kappa\lambda}$,* Preprinto.

[2] D. M. Carr, *$\mathcal{P}_\kappa\lambda$-partition relations,* Fund. Math. 128 (1987), 181-195.

[3] C. A. DiPrisco and W. S. Zwicker, *Flipping properties and supercompact cardinals,* Fund. Math.109 (1980), 31-36.

[4] C. A. Johnson, *Seminormal λ-generated ideals on $\mathcal{P}_\kappa\lambda$,* J. Symb. Logic 53 (1988), 92-102.

[5] C. A. Johnson, *Some partition relations for ideals on $\mathcal{P}_\kappa\lambda$,* Acta Math. Hung. 56 (1990), 269-282.

[6] S. Kamo, *Remarks on $\mathcal{P}_\kappa\lambda$-combinatorics,* Fund. Math. 145 (1994), 141-151.

[7] T. K. Menas, *On strong compactness and supercompactness,* Ann. Math. Logic 7 (1974), 327-359.

[8] M. Magidor, *Combinatorial characterization of supercompact cardinals,* Proc. Amer. Math. Soc. 42 (1974), 279-285.

[9] M. Magidor, *How large is the first strongly compact cardinal?,* Ann. Math. Logic 10 (1976), 33-57.