数理解析研究所講究録
932 巻 1995 年 177-180

重調和擬過程の境界値問題

西岡 國雄

1. $-\triangle^2$ は重調和作用素と呼ばれ, 流体力学や弾性論でしばしば現われる. 次の放物型方程式

$$\partial_t u(t,x) = -\triangle^2 u(t,x), \quad t>0, \quad x \in \mathsf{R}, \tag{1}$$

の基本解 $p(t,x)$ は簡単に得られる:

$$p(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \ \exp\{-i\xi x - \xi^4 t\}, \quad t>0, \quad x \in \mathsf{R}. \tag{2}$$

Krylov [2] や Hochberg [1] に従い, 我々は $p(t,x)$ を '遷移確率密度' とする '粒子' を考え, それを重調和擬過程 ($= BPP$) と呼ぶ. ここで, $\int p(t,x)\,dx = 1$ ではあるが, $p(t,x)$ は非負ではないので Kolmogorov の拡張定理は成立せず, 我々の BPP は通常の確率過程にはならない. Krylov [2] は BPP の path 空間は連続関数空間に含まれることを示したが, 我々は技術上の理由から $\Omega \equiv \mathbf{D}[0,\infty)$ ($[0,\infty)$ 上の右連続で左極限をもつ関数全体) を path 空間とする.

通常の確率論では, 確率変数 $X : \Omega \to \mathsf{R}$ の分布

$$P_x[X \in da], \quad a \in \mathsf{R} \tag{3}$$

は R 上で定義された有界連続関数全体 $\mathbf{C}_b$ 上の連続線形汎関数である. しかし, BPP の場合その '確率変数の分布' (refdist) はもっと広い意味にとる必要があり, (3) はまず Schwartz の緩増加超関数として定義される. 次に, '確率変数' X の個々の性質に応じて, 3) は Schwartz の急減少関数全体から, それよりさらに広い関数空間上の連続線形汎関数に拡張される.

$\omega \in \Omega$ にたいし $\tau_0(\omega) \equiv \inf\{t > 0 : \omega(t) < 0\}$ を半直線への最小到達時間とよび, $\omega(\tau_0)$ を最小到達での位置という.

命題 1 ([3]) 有界可測関数 $\times$ $\mathbf{C}^1$ 上の連続な線形汎関数の意味で, 最小到達時間と位置の同時分布は次で与えられる:

$$P_x[\tau_0(\omega) \in dt, \omega(\tau_0) \in da] = [K(t,x)\,\delta(a) - J(t,x)\,\delta'(a)]\,dt\,da. \tag{4}$$

但し, $\delta(a)$ は Dirac の関数, $\delta'(a)$ はその超関数の意味での微分である. また K, J は具体的に与えられる.

注 2 $-\delta'(a)$ は物理で双極子とよばれ, 同じ大きさで符号が逆の物理量を担っている. 典型的な例は, 微小な磁石である. 一方, $\delta(a)$ は単極子といい, どちらか一方の符号の物理量を担っている. 上記の命題 1 より, BPP は単極子および双極子のどちらかの形で伝搬されることが分かる.

注 3 通常の確率過程, 例えば Brown 運動では

$$P_x[\tau_0 \in dt,\, \omega(\tau_0) \in da] = \frac{x}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\{-x^2/2t\}\ \delta(a)\ dt\,da$$

となり, 双極子は現われない. つまり熱は単極子のみによって伝搬される.

注 4 BPP にたいし, 双極子と単極子の両方を考えることは自然である. 実際, BPP は双極子と単極子両方の効果を考えると強マルコフ性を満たすが, 片方の粒子だけでは強マルコフ性が成立しない.

2. 上記の命題 1 および注 2 の意味を明確にしよう.

定義 5 monopoles および dipoles それぞれの最小到達時間と位置の同時分布を次で定義する:

$$\begin{aligned} P_x[\tau_0(\omega) \in dt, \omega(\tau_0) \in da, \omega(\tau_0)\text{are monopoles}] &= K(t,x)\,\delta(a)\,dt\,da \\ P_x[\tau_0(\omega) \in dt, \omega(\tau_0) \in da, \omega(\tau_0)\text{are dipoles}] &= J(t,x)\,\delta'(a)\,dt\,da. \end{aligned}$$

ここで, 前者は 有界可測関数 $\times$ $\mathbf{C}_b$, 後者は有界可測関数 $\times$ $\mathbf{C}^1$ 上の連続線形汎関数.

系 6　有界可測関数 $\times\ \mathbf{C}^1$ 上の連続線形汎関数の意味で,

$$P_x[\tau_0 \in dt,\ \omega(\tau_0) \in da] = P_x[\tau_0 \in dt,\ \omega(\tau_0) \in da, \omega(\tau_0)\text{are monopoles}]$$
$$+P_x[\tau_0 \in dt,\ \omega(\tau_0) \in da, \omega(\tau_0)\text{are dipoles}].$$

定義 5 と系 6 により, BPP の粒子が境界に到達したとき, それは単極子か双極子のどちらかであることがわかる. そこで, BPP の境界での挙動を制御するためには, 我々は単極子, 双極子をそれぞれの境界での挙動を別々に制御しなければならない. 実際, (1) の初期値–境界値問題では 2 つの境界条件が必要であることが知られているが, このことは, BPP の視点からは当然のことである. つまり, (1) の境界条件は, 単極子の境界での挙動と双極子のそれとを別々に規定するために, 2 つ必要なのである.

3. 具体的には, BPP の境界での挙動として, 単極子および双極子に

trap, 吸収, 通常の反射, 2 次の反射, 3 次の反射

の境界条件を設定する. これらを適宜組み合わせると, 既に知られている解が存在しない場合を除いて, 0 階から 5 階までのすべての階数の組み合わせの (1) の境界条件に対応する BPP が得られた.

例えば, 解析で良く知られている

$$\text{Dirichlete 境界条件:}\quad u(t,0) = 0 = \partial_x u(t,0)$$

は単極子, 双極子ともに 吸収;

$$\text{Neumann 境界条件:}\quad \partial_x u(t,0) = 0 = \partial_x^2 u(t,0)$$

は単極子, 双極子ともに通常の反射である. また, 単極子, 双極子ともに境界で trap される場合は

$$\partial_x^4 u(t,0) = 0 = \partial_x^5 u(t,0);$$

単極子が 2 次の反射, 双極子が trap される場合は

$$\partial_x^2 u(t,0) = 0 = \partial_x^5 u(t,0);$$

単極子が3次の反射, 双極子が trap される場合は

$$\partial_x^3 u(t,0) = 0 = \partial_x^5 u(t,0)$$

などとなる.

参考文献

[1] Hochberg, K. J., A signed measure on path space related to Wiener measure, Ann. Prob., 6 (1978), 433–458.

[2] Krylov, Y. Yu., Some properties of the distribution corresponding to the equation $\partial u/\partial t = (-1)^{q+1}\partial^{2q}u/\partial^{2q}x$, Soviet Math. Dokl., 1 (1960), 760–763.

[3] Nishioka, K., The first hitting time and place of a half–line by a biharmonic pseudo process, to appear in J. Math. Soc. Japan.

東京都立大学理学部数学教室
〒192-03　八王子市南大沢 1–1
e–mail = nishioka@math.metro-u.ac.jp