

確率微分方程式の数値スキームの T 安定性

齊藤 善弘
聖徳学園女子短期大学

T-stability analysis of numerical schemes for stochastic differential equations

Yoshihiro SAITO

Shotoku Gakuen Women's Junior College

1 はじめに

次のスカラー自励系 Ito 型確率微分方程式 (SDE)

$$\begin{cases} dX(t) = f(X)dt + g(X)dW(t), & t \in [0, T], \\ X(0) = x, \end{cases} \quad (1)$$

を考える. ここで $W(t)$ は標準 Wiener 過程である. SDE(1) に対して, 様々な数値スキームが提案されてきた [1, 5, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 16, 20]. これらの数値スキームは SDE(1) の解の軌道 (sample paths または trajectories) の近似列を生成する. 最近になり, SDE の数値的安定性に関する文献が増えてきた [2, 3, 6, 12, 13, 20]. 我々も二つの安定性の概念を提案した [17, 18, 19]. 一つは解の 2 次モーメントに関する安定性で, *MS* 安定性と名付けた [17]. もう一つは解の軌道に関する安定性で, *T* 安定性と呼んでいる [18]. 本稿では数値スキームの *T* 安定性を考察する.

論文 [18] では, *T*-安定性の概念を提案し, Euler-Maruyama スキームでしかも入力過程 (driving process) として 2 点過程及び 3 点過程を使用した場合について安定性の考察を行い, それを裏付ける数値実験結果を示しただけであった. 今回は弱い意味で 2 次の Taylor スキームを加え, さらに 5 点過程を入力過程とする場合も考える. また, Euler-Maruyama スキームと 2 次の Taylor スキームとの比較検討も行う.

本稿の構成は, まず 2 節で数値スキームについて述べる. 次に 3 節で *T* 安定性の概念について述べ, 安定性関数, 安定領域の図示化を行う (4 節). 最後にまとめと今後の課題を述べる (5 節).

2 数値スキーム

二つの数値スキームを紹介する. 一つは Euler-Maruyama スキーム

$$\bar{X}_{n+1} = \bar{X}_n + f(\bar{X}_n)h + g(\bar{X}_n)\Delta W_n, \quad (2)$$

である。ここで、 h はステップ幅、 ΔW_n は Wiener 過程の増分である。 ΔW_n は次のように乱数を使って実行する。

$$\Delta W_n = U_n \sqrt{h}. \quad (3)$$

ここで、 U_n は正規乱数である。また、 U_n は正規乱数を近似する 2 点、3 点及び 5 点確率変数を用いることもある。これらの確率変数は次の確率分布をもつ。

i) 2 点確率変数

$$P(U_n = \pm 1) = 1/2 \quad (4)$$

ii) 3 点確率変数

$$P(U_n = \pm \sqrt{3}) = 1/6, \quad P(U_n = 0) = 2/3 \quad (5)$$

iii) 5 点確率変数

$$P(U_n = \pm \sqrt{6}) = 1/30, \quad P(U_n = \pm 1) = 3/10, \quad P(U_n = 0) = 1/3. \quad (6)$$

Euler-Maruyama スキームは、2 点確率変数、3 点確率変数及び 5 点確率変数を用いても弱い意味 (Monte Carlo Approximation) で 1 次であることに注意しておく。また、3 点確率変数は弱い意味で 2 次を、5 点確率変数は弱い意味で 3 次を達成させることができる [10].

次に弱い意味で 2 次の Taylor スキーム

$$\begin{aligned} \bar{X}_{n+1} = & \bar{X}_n + f(\bar{X}_n)h + g(\bar{X}_n)\Delta W_n + \frac{1}{2}[gg'](\bar{X}_n)\{(\Delta W_n)^2 - h\} \\ & + [f'g](\bar{X}_n)\Delta Z_n + \frac{1}{2}[ff' + \frac{1}{2}f''g^2](\bar{X}_n)h^2 \\ & + [fg' + \frac{1}{2}g''g^2](\bar{X}_n)\{\Delta W_n h - \Delta Z_n\}, \end{aligned} \quad (7)$$

である。ここで、

$$\Delta W_n = U_n \sqrt{h}, \quad \Delta Z_n = \frac{1}{2}h\Delta W_n = \frac{1}{2}U_n h^{3/2}. \quad (8)$$

U_n は正規乱数は勿論のこと、3 点確率変数 (5) や 5 点確率変数 (6) を用いることができる。

3 点確率変数をもつ、この二つのスキーム (2), (7) は確率システムの Lyapunov exponents を求めるのに使われる [20, 21].

3 T 安定性

常微分方程式に対して線形安定性解析を行う場合、線形なテスト方程式を考えた [7]. それと同様に SDE に対しても、次のような実数 λ, μ をもつテスト方程式

$$\begin{cases} dX(t) = \lambda X dt + \mu X dW(t), & t \in [0, T] \\ X(0) = 1, \end{cases} \quad (9)$$

を考える。この理論解は

$$X(t) = \exp\left\{\left(\lambda - \frac{1}{2}\mu^2\right)t + \mu W(t)\right\}. \quad (10)$$

である。SDEの定性理論から、方程式(9)に対する零解 $X(t) \equiv 0$ は、 $\lambda - \frac{1}{2}\mu^2 < 0$ のとき大域的に確率的漸近安定 (stochastically asymptotically stable in the large), そして $\lambda - \frac{1}{2}\mu^2 \geq 0$ のとき不安定になることが知られている。よって、前節で述べた数値スキームに対してこの性質を満たすことを期待するのは当然といえよう。この概念が T 安定性である。

定義 1 ある入力過程 (driving process) のもとで数値スキームをテスト方程式 (9) に適用したとき、得られた数値解が、

$$|\bar{X}_n| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

を満たすならば、その入力過程を備えた数値スキームは T 安定であるという。□

T 安定性は MS 安定性と違い、テスト方程式 (9) に対して条件 $\lambda + \mu^2/2 < 0$ を付加しない。よって、 T 安定性はより SDE の定性理論に適した概念であるといえることができる。

4 数値スキームの T 安定領域

2節で述べた二つの数値スキーム、Euler-Maruyama スキームと弱い意味で2次の Taylor スキームについて T 安定性を考察する。常微分方程式の数値解法における線型安定性解析と同様、安定性関数 (stability function) を導出しなければならない [7, 18]。まず、Euler-Maruyama スキーム (2) について、安定性関数に対応するものを導出しよう。Euler-Maruyama スキームを $(n+1)$ -ステップ、テスト方程式 (9) に適用したとき

$$\begin{aligned} \bar{X}_{n+1} &= (1 + \lambda h + \mu U_n \sqrt{h}) \bar{X}_n \\ &\vdots \\ &= \prod_{i=0}^n (1 + \lambda h + \mu U_i \sqrt{h}) \bar{X}_0 \end{aligned}$$

とかける。ここで、 $(n+1)$ 時間ステップに関して平均をとると、

$$\bar{X}_{n+1} = R(h; \lambda, \mu) \bar{X}_n \quad (11)$$

と書き表すことができる。ここで、 $R(h; \lambda, \mu)$ を平均化された安定性関数 (averaged stability function) と呼ぶ。平均化された安定性関数は数値スキームは勿論のこと、入力過程 $\{U_n\}$

によっても変わることに注意する。また、平均化された安定性関数は次式で表現することができる。

$$\begin{aligned} \log |R(h; \lambda, \mu)| &= \frac{E \log |\bar{X}_{n+1}| - \log |\bar{X}_0|}{n+1} \\ &= E \log |1 + \lambda h + \mu U_n \sqrt{h}| \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \log |1 + \lambda h + \mu y \sqrt{h}| \chi_y dy. \end{aligned} \quad (12)$$

ここで χ_y は確率変数 U_n の確率密度関数である。

以上、Euler-Maruyama スキームについて、安定性関数の導出を見てきたが、弱い意味で2次の Taylor スキームでも同様である。ここで最初の T 安定の定義に戻ろう (定義1)。数値スキームが T 安定であることは平均化された安定性関数 R を用いると、次のように表すことができる。

$$\bar{X}_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad \Leftrightarrow \quad |R(h; \lambda, \mu)| < 1. \quad (13)$$

同値関係 (13) において、 R に関する条件を満たす $(h; \lambda, \mu)$ の領域 \mathcal{R} 、すなわち、

$$\mathcal{R} = \{(h; \lambda, \mu); |R(h; \lambda, \mu)| < 1\}$$

を入力過程 $\{U_n\}$ をもつ数値スキームの T 安定領域と呼ぶ。

それでは、2節で述べた入力過程をもつ数値スキームに対して平均化された安定性関数と安定領域を求めよう。

1. Euler-Maruyama スキーム

i) 2点確率変数

$$\begin{aligned} R^2(h; \lambda, \mu) &= (1 + \lambda h + \mu \sqrt{h})(1 + \lambda h - \mu \sqrt{h}) \\ &= (1 + \lambda h)^2 - \mu^2 h \end{aligned} \quad (14)$$

a) $\lambda = 0, \mu > 0$.

$$R^2(h; 0, \mu) = 1 - \mu^2 h$$

よって

$$|R(h; 0, \mu)| < 1 \Leftrightarrow 0 < h < \frac{2}{\mu^2}$$

したがって2点確率変数をもつ Euler-Maruyama スキームが T 安定となる条件は $0 < h < 2/\mu^2$ である。

b) $\lambda \neq 0$

$k = \mu^2/\lambda$, $\bar{h} = \lambda h$ とおくと, 平均化された安定性函数 (14) は

$$R^2(\bar{h}, k) = (1 + \bar{h})^2 - k\bar{h} \quad (15)$$

となる. この T 安定領域を図 1 及び図 2 に示す.

ここで, $\lambda - \frac{1}{2}\mu^2 < 0$ から $\lambda < \mu^2/2$ が成り立つ. よって, $\lambda > 0$ のとき, $k > 0$ かつ $2 < \mu^2/\lambda = k$ となる. ゆえに, $k > 2$. また, $\lambda < 0$ のとき, $k < 0$ かつ $2 > k$ となる. ゆえに, $k < 0$. したがって, 図において k の値の範囲は $k < 0$ と $k > 2$ を考えればよいことになる. これは, 他の安定領域の図についても同じである.

ii) 3 点確率変数

$$\begin{aligned} R^6(h; \lambda, \mu) &= (1 + \lambda h + \mu\sqrt{3h})(1 + \lambda h)^4(1 + \lambda h - \mu\sqrt{3h}) \\ &= (1 + \lambda h)^4\{(1 + \lambda h)^2 - 3\mu^2 h\} \end{aligned} \quad (16)$$

a) $\lambda = 0, \mu > 0$

$$R^6(h; 0, \mu) = 1 - 3\mu^2 h$$

よって

$$|R(h; 0, \mu)| < 1 \Leftrightarrow 0 < h < \frac{2}{3\mu^2}.$$

したがって 3 点確率過程をもつ Euler-Maruyama スキームは $0 < h < 2/3\mu^2$ のとき T 安定である.

b) $\lambda \neq 0$

$$R^6(\bar{h}, k) = (1 + \bar{h})^4\{(1 + \bar{h})^2 - 3k\bar{h}\}, \quad k = \mu^2/\lambda, \bar{h} = \lambda h. \quad (17)$$

この T 安定領域は図 3 及び図 4 のようになる.

iii) 5 点確率変数

5 点確率変数の場合は, 30 ステップ考える必要がある. よって, 平均安定性函数 R は次のように書き表せる.

$$R^{30}(h; \lambda, \mu) = \{(1 + \lambda h)^2 - \mu^2 \cdot 6h\}\{(1 + \lambda h)^2 - \mu^2 h\}^9(1 + \lambda h)^{10} \quad (18)$$

a) $\lambda = 0, \mu > 0$.

この場合, 平均安定性函数は次のようになる

$$R^{30}(h; 0, \mu) = (1 - 6\mu^2 h)(1 - \mu^2 h)^9$$

よって、このとき5点過程をもつ Euler-Maruyama スキームが T 安定になる条件は $0 < h < 1.777/\mu^2$ である。

b) $\lambda \neq 0$

$k = \mu^2/\lambda$, $\bar{h} = \lambda h$ とおく。このとき、(18) 式は次のように変形できる。

$$R^{30}(\bar{h}, k) = \{(1 + \bar{h})^2 - 6k\bar{h}\} \{(1 + \bar{h})^2 - k\bar{h}\}^9 (1 + \bar{h})^{10}$$

このときの T 安定領域は図5及び図6である。

2. 弱い意味で2次の Taylor スキーム

$$R^6(h; \lambda, \mu) = \left\{ \left(1 + \left(\lambda - \frac{1}{2}\mu^2\right)h + \frac{1}{2}\lambda^2 h^2 + \frac{1}{2}\mu^2 \cdot 3h\right)^2 - (1 + \lambda h)^2 \mu^2 \cdot 3h \right\} \\ \times \left\{ 1 + \left(\lambda - \frac{1}{2}\mu^2\right)h + \frac{1}{2}\lambda^2 h^2 \right\}^4 \quad (19)$$

a) $\lambda = 0$, $\mu > 0$.

このとき、(19) 式は次のようになる。

$$R^6(h; 0, \mu) = (1 - \mu^2 h + \mu^4 h^2) \left(1 - \frac{1}{2}\mu^2 h\right)^4$$

よって、3点過程をもつ2次の Taylor スキームが T 安定であるためには $0 < h < 3.189/\mu^2$ である。

b) $\lambda \neq 0$

この場合、 $k = \mu^2/\lambda$, $\bar{h} = \lambda h$ とおくと、(19) 式は次のように変形できる。

$$R^6(\bar{h}, k) = \left\{ \left(1 + \left(1 - \frac{1}{2}k\right)\bar{h} + \frac{1}{2}\bar{h}^2 + \frac{3}{2}k\bar{h}\right)^2 - (1 + \bar{h})^2 \cdot 3k\bar{h} \right\} \\ \times \left\{ 1 + \left(1 - \frac{1}{2}k\right)\bar{h} + \frac{1}{2}\bar{h}^2 \right\}^4$$

このときの T 安定領域を図7及び図8に示す。

ii) 5点確率変数

Euler-Maruyama スキームと同様、30ステップで考える。平均安定性関数は次のようになる。

$$R^{30}(h; \lambda, \mu) = \left\{ \left(1 + \left(\lambda - \frac{1}{2}\mu^2\right)h + \frac{1}{2}\lambda^2 h^2 + \frac{1}{2}\mu^2 \cdot 6h\right)^2 - (1 + \lambda h)^2 \mu^2 \cdot 6h \right\} \\ \times \left\{ \left(1 + \lambda h + \frac{1}{2}\lambda^2 h^2\right)^2 - (1 + \lambda h)^2 \cdot \mu^2 h \right\}^9 \quad (20) \\ \times \left\{ 1 + \left(\lambda - \frac{1}{2}\mu^2\right)h + \frac{1}{2}\lambda^2 h^2 \right\}^{10}$$

a) $\lambda = 0, \mu > 0$.

このとき、安定性函数 (20) は次のように書ける。

$$R^{30}(h; 0, \mu) = (1 - \mu^2 h + \frac{25}{4} \mu^4 h^2)(1 - \mu^2 h)^9 (1 - \frac{1}{2} \mu^2 h)^{10}$$

よって、 T 安定になる条件は $0 < h < 2.801/\mu^2$ となる。

b) $\lambda \neq 0$

この場合、 $k = \mu^2/\lambda$, $\bar{h} = \lambda h$ とおくと、(20) 式は

$$\begin{aligned} R^{30}(\bar{h}, k) = & \left\{ (1 + (1 - \frac{1}{2}k)\bar{h} + \frac{1}{2}\bar{h}^2 + 3k\bar{h})^2 - (1 + \bar{h})^2 \cdot 6k\bar{h} \right\} \\ & \times \left\{ (1 + \bar{h} + \frac{1}{2}\bar{h}^2)^2 - (1 + \bar{h})^2 \cdot k\bar{h} \right\}^9 \\ & \times \left\{ 1 + (1 - \frac{1}{2}k)\bar{h} + \frac{1}{2}\bar{h}^2 \right\}^{10} \end{aligned}$$

と変形できる。よって、この T 安定領域の図は図 9 及び図 10 になる。

以上 Euler-Maruyama スキームと弱い意味で 2 次の Taylor スキームについて T 安定性をみてきた。ただし入力過程として、Euler-Maruyama スキームに対しては 2 点、3 点及び 5 点確率変数を用い、弱い意味で 2 次の Taylor スキームに対しては 3 点及び 5 点確率変数を用いた。まず、入力過程の違いからみた、数値スキームの安定領域を比較しよう。 $\lambda = 0$ の場合で各スキームの安定区間を比較する。この場合 Euler-Maruyama スキームでも 2 次の Taylor スキームでも、2 点より 3 点、3 点より 5 点と Wiener 過程を近似する確率過程の近似度が増すにつれて、安定区間が狭まることがわかる。次に $\lambda \neq 0$ の場合単純な比較はできないが、Wiener 過程を近似する入力過程の近似度が増すにつれて、安定領域が狭まっていく傾向にあることがわかる。

また、Euler-Maruyama スキームと弱い意味で 2 次の Taylor スキームを比較すると、 k の値によって差があるが、総じて 2 次の Taylor スキームの方が若干安定領域が広がっている。

5 まとめと今後の課題

Euler-Maruyama スキームと弱い意味で 2 次の Taylor スキームについて、 T 安定性の考察を行った。これらの安定領域の図を見る限りでは、Euler-Maruyama スキームにしても、2 次の Taylor スキームにしても、Wiener 過程を近似する確率過程の近似度が増すと安定領域が狭くなる傾向にある。様々な入力過程をもつ数値スキームの安定領域を図示化することにより、興味ある結果を得ることには間違いないが、数値スキームの取扱いには注意を要する。

今後は、様々な数値スキームに対して、入力過程を変えながら安定領域の図示を試みるが、結局 T 安定性は入力過程として Wiener 過程で考察しなければならない。このとき問題となるのは、平均安定性関数 (12) の定積分の計算である。残念ながら、(12) 式の右辺の不定積分を直接求めることができない。しかし、我々は (\bar{h}, k) における安定性関数値を計算することによって、安定領域の図示化を現在模索中である。また、今述べた方法による安定領域の図と Hernandez ら [3] が行った Monte-Carlo 法を用いた安定領域の図との比較も興味深い。さらに、弱い意味の数値スキームを対象としているが、強い意味の数値スキームに対しても、 T 安定性の考察を行う予定である。

次に、テスト方程式は 1 次元スカラーでしかも実数であった。しかし、安定性の問題が生ずるのはベクトル系である。この場合テスト方程式の係数は複素数で考察するのが一般的である。よって、複素係数をもつテスト方程式に対して、 T 安定領域の図示化も考えている。

参考文献

- [1] T.C. Gard, *Introduction to Stochastic Differential Equations*, Marcel Dekker, New York, 1988.
- [2] D.B. Hernandez and R. Spigler, *A-stability of Runge-Kutta Methods for systems with additive noise*, BIT, **32**(1992), 620-633.
- [3] D.B. Hernandez and R. Spigler, *Convergence and stability of implicit Runge-Kutta methods for systems with multiplicative noise*, BIT, **33**(1993), 654-669.
- [4] J.R. Klauder and W.P. Petersen, *Numerical integration of multiplicative-noise stochastic differential equations*, SIAM J. Numer. Anal. **22**(1985), 1153-1166
- [5] P.E. Kloeden and E. Platen, *A survey of numerical methods for stochastic differential equations*, J. Stoch. Hydrol. Hydraulics, **3**(1989), 155-178.
- [6] P.E. Kloeden and E. Platen, *Higher order implicit strong numerical schemes for stochastic differential equations*, J. Statist. Physics, to appear.
- [7] J.D. Lambert, *Numerical Methods for Ordinary Differential Systems*, John Wiley, Chichester, 1991.
- [8] H. H. Liske and E. Platen, *Simulation studies on time discrete diffusion approximations*, Mathematics and Computers in Simulation, **29**(1987), 253-260.
- [9] G.N. Mil'shtein, *Approximate integration of stochastic differential equations*, Theory Prob. Appl., **19**(1974), 557-562.

- [10] G. N. Mil'shtein and M. V. Tret'yakov, *Numerical solution of differential equations with colored noise*, Journal of Statistical Physics, **77**(1994), 691–715.
- [11] N.J. Newton, *Asymptotically efficient Runge-Kutta methods for a class of Ito and Stratonovich equations*, SIAM J. Appl. Math., **51** (1991), 542-567.
- [12] E. Pardoux and D.Talay, *Discretization and simulation of stochastic differential equations*, Acta Appl. Math., **3**(1985), 23-47.
- [13] W.P. Petersen, *Numerical simulation of Ito stochastic differential equations on supercomputers*, Proc. IMA Conference, 18-24th September 1985.
- [14] E. Platen, *An approximation method for a class of Ito processes*, Lith. Math. J., **21**(1981), 121-133.
- [15] W. Rümelin, *Numerical treatment of stochastic differential equations*, SIAM J. Numer. Anal., **19**(1982),604-613
- [16] 齊藤善弘・三井斌友, 確率微分方程式の離散近似, 日本応用数理学会論文誌, **2**(1992), 1-16 (in Japanese).
- [17] Y. Saito and T. Mitsui, *Stability analysis of numerical schemes for stochastic differential equations*, to appear.
- [18] Y. Saito, and T. Mitsui, *T-stability of numerical scheme for stochastic differential equations*, World Scientific Series in Applicable Analysis, vol. 2 "Contributions in Numerical Mathematics" (ed. by R.P.Agarwal), WSSIAA, 2(1993), pp. 333–344.
- [19] 齊藤善弘・三井斌友, 確率微分方程式の数値スキームの安定性, 数理解析研究所講究録, **850**(1993), 124–138.
- [20] D. Talay, *Simulation and numerical analysis of stochastic differential systems*, INRIA Report 1313, 1990.
- [21] D. Talay, *Approximation of upper Lyapunov exponents of bilinear stochastic differential systems*, SIAM J. Numer. Anal., **28**(1991), 1141–1164.

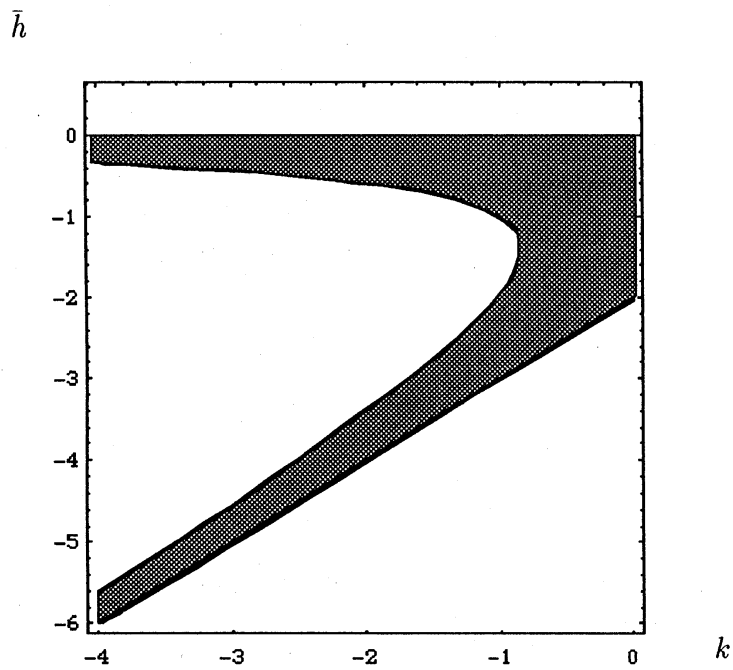


图 1: The region of T -stability of Euler-Maruyama scheme with 2-point process

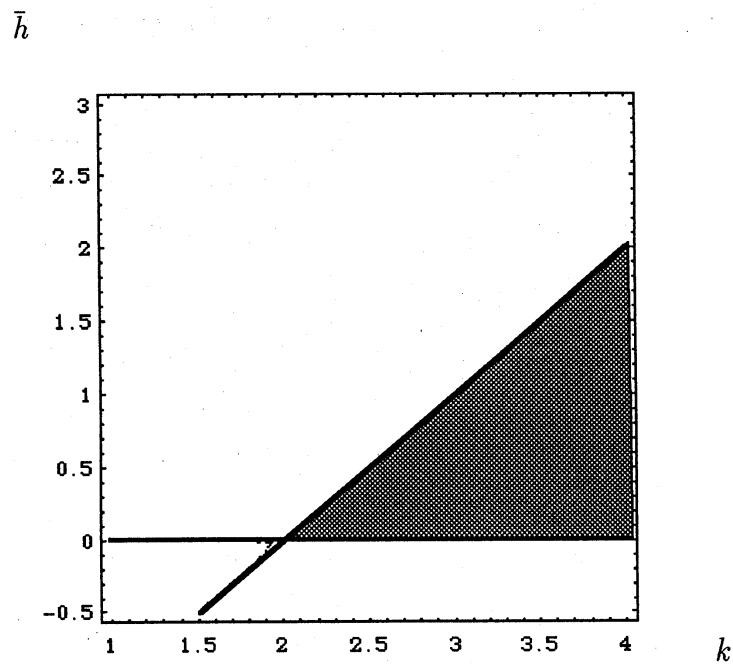


图 2: The region of T -stability of Euler-Maruyama scheme with 2-point process

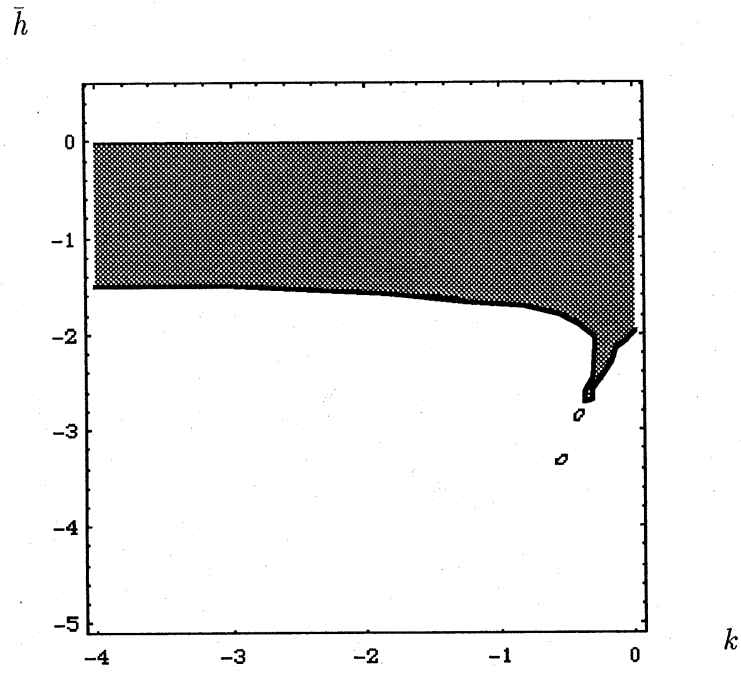


图 3: The region of T -stability of Euler-Maruyama scheme with 3-point process

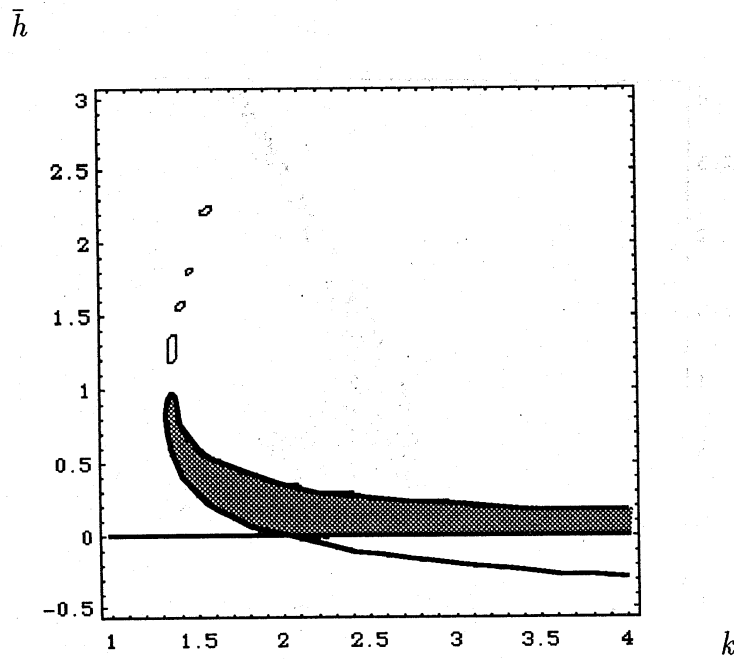


图 4: The region of T -stability of Euler-Maruyama scheme with 3-point process

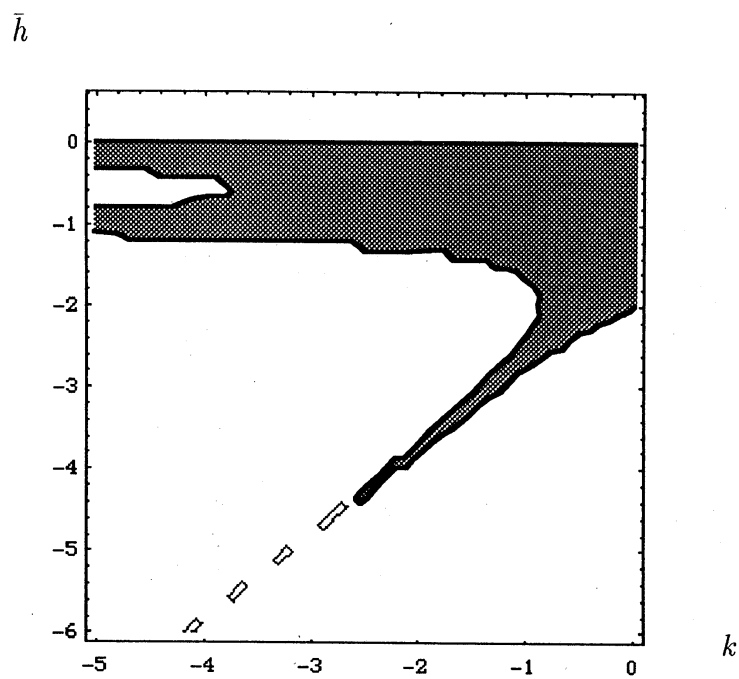


图 5: The region of T -stability of Euler-Maruyama scheme with 5-point process

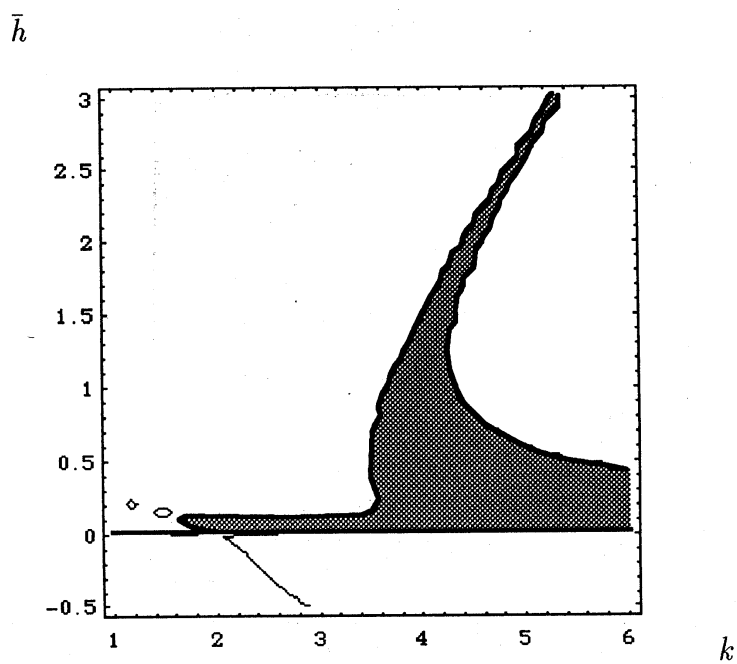


图 6: The region of T -stability of Euler-Maruyama scheme with 5-point process

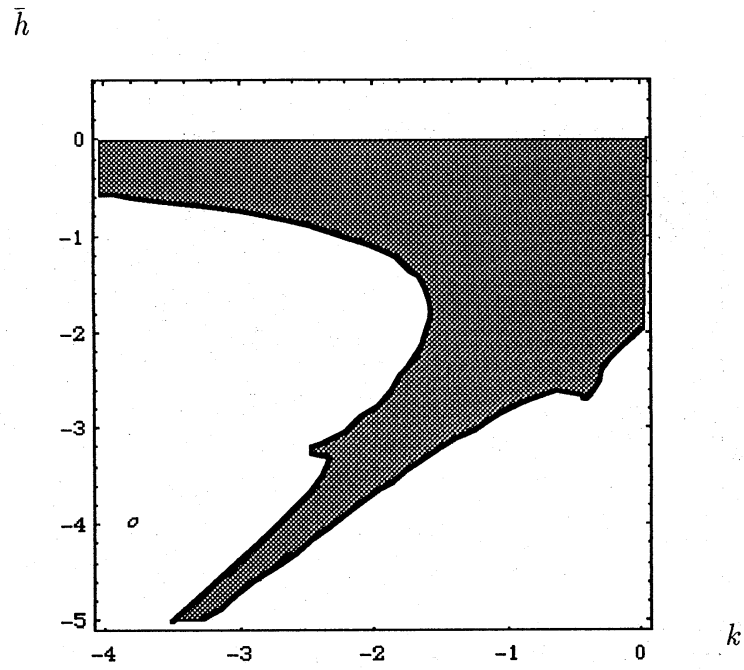


图 7: The region of T -stability of 2nd Taylor scheme with 3-point process

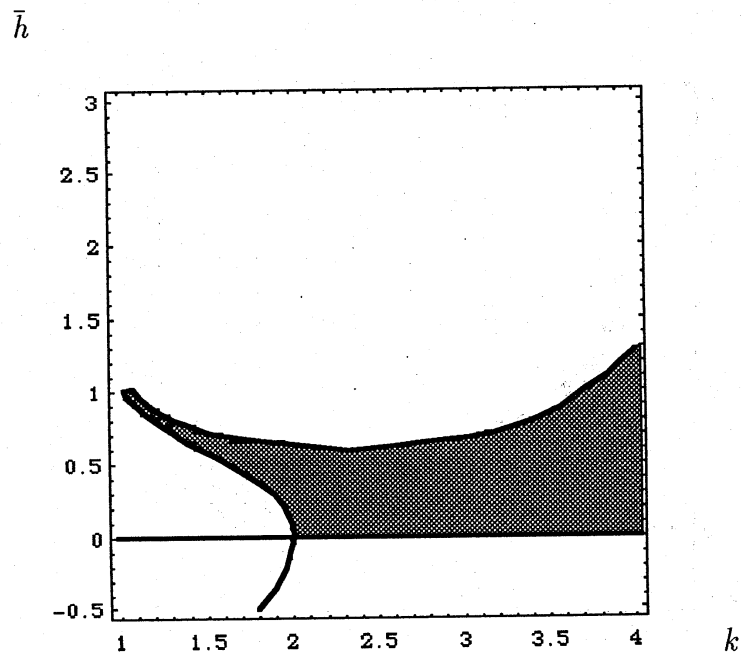


图 8: The region of T -stability of 2nd Taylor scheme with 3-point process

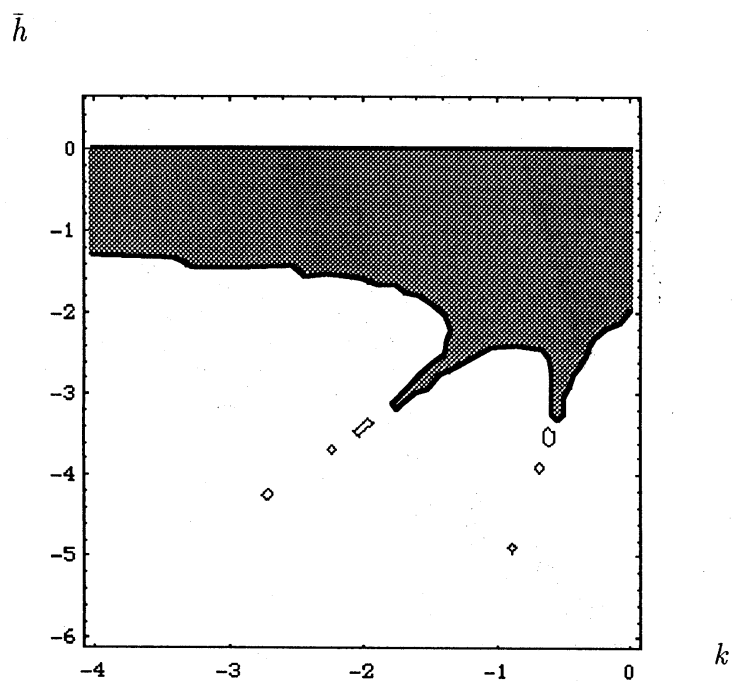


Figure 9: The region of T -stability of 2nd Taylor scheme with 5-point process

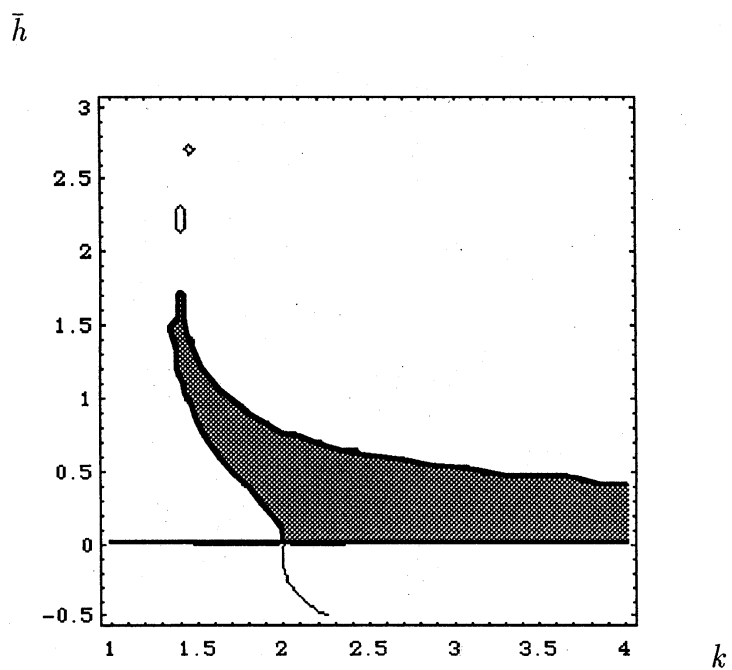


Figure 10: The region of T -stability of 2nd Taylor scheme with 5-point process