数理解析研究所講究録
936巻 1996年 55-57

Kac Algebra の Cocycle による Deformation

九大・数理・幸崎秀樹 (Hideki Kosaki)

群の積から自然に生じる bicrossed product 型の Kac algebra を様々な cocycle を利用して変形する事により新しい Kac algebra が構成出来る事を説明する。ここで説明する構成法は京大数研・泉正己氏 (現 Berkeley) と著者との共同研究に基ずくものです。

G を有限群とし、$\alpha : G \longrightarrow Aut(L)$ を factor L への outer action とする。今 G が二つの部分群 G_1, G_2 の積と仮定してみる。つまり、G の任意の元 g が $g = g_1g_2$ $(g_i \in G_i)$ と一意的に表示出来ると仮定する。対称群 $S_n = S_{n-1} \cdot \mathbf{Z}_n$ 半直積群 $G = H \rtimes K$ $(G_1 = H, G_2 = K)$ 等が典型的な例である。不動点環 $N = L^{(G_1,\alpha)}$ および接合積 $M = L \rtimes_\alpha G_2$ を考える事により factor の inclusion $N \subseteq M$ が得られる。この inclusion は irreducible かつ depth 2 である。この事は bimodule または sector の考え方を利用すればすぐにチェックできる。

実際、(factor がすべて properly infinite であり同型だとして) L の endomorphism ρ_1, ρ_2 で $N = L^{(G_1,\alpha)} = \rho_1(L), L^{(G_2,\alpha)} = \rho_2(L)$ となるものを取る。$\rho_2(L) \subseteq L$ の basic extension は $L \rtimes_\alpha G_2 = M$ であり

$$N \subseteq M \cong \bar{\rho}_2\rho_1(L) \subseteq L$$

である事を見るのは易しい。従って、我々は $\rho = \bar{\rho}_2\rho_1$ とおき、sector ρ $(\in Sect(L) = End(L)/Int(L))$ に対応する subfactor が既約かつ depth 2 である事をチェックすればよい訳である。各々の性質は intertwiner のなす空間の次元に関する次の性質と同値である事は明らかである。

$$\begin{aligned} \dim(\rho, \rho) &= 1 \\ \dim(\rho\bar{\rho}, \rho\bar{\rho}) &= \#G \end{aligned}$$

Frobenius reciprocity を何回か利用する事により、

$$\begin{aligned} \dim(\rho, \rho) &= \dim(\bar{\rho}_2\rho_1, \bar{\rho}_2\rho_1) \\ &= \dim(\rho_2\bar{\rho}_2, \rho_1\bar{\rho}_1), \\ \dim(\rho\bar{\rho}, \rho\bar{\rho}) &= \dim(\bar{\rho}_2\rho_1\bar{\rho}_1\rho_2, \bar{\rho}_2\rho_1\bar{\rho}_1\rho_2) \\ &= \dim(\rho_1\bar{\rho}_1\rho_2\bar{\rho}_2, \rho_2\bar{\rho}_2\rho_1\bar{\rho}_1), \end{aligned}$$

となる。さて $\rho_1\bar{\rho}_1$ を考える事は bimodule ${}_L L^2(L \rtimes_\alpha G_1)_L$ を考えると同じであり、$\rho_1\bar{\rho}_1 = \sum_{g\in G_1}{}^{\oplus}[\alpha_g]$ と 1 次元 L-L bimodule（つまり、$Aut(L)/Int(L)$ ）へと分解する。同じく、$\rho_2\bar{\rho}_2 = \sum_{g\in G_2}{}^{\oplus}[\alpha_g]$ である。$G_1 \cap G_2 = \{e\}$ であるので、$[\alpha_{g_1}]$ $(g_1 \neq e \in G_1)$ 及び $[\alpha_{g_2}]$ $(g_2 \neq e \in G_2)$ は異なった sector であり、$\dim(\rho, \rho) = 1$ なので $N \subseteq M$ は既約である。同様に G は G_1, G_2 の積なので $\dim(\rho\bar{\rho}, \rho\bar{\rho}) = \#G$ となり、$N \subseteq M$ は depth 2 となる。

depth 2 の inclusion には指数理論により（次元が $[M : N]$ である）Kac algebra が対応する。簡単の為、以後 $G = H \rtimes K$ $(G_1 = H, G_2 = K)$ とすれば、対応する Kac algebra A 及びその dual Kac algebra $\hat{A}$ は

$$A = \ell^\infty(H) \rtimes K \quad \hat{A} = \mathbf{C}(H) \otimes \ell^\infty(K)$$

と直接計算できる。但し、K の $\ell^\infty(H)$ への作用は K の（ G の正規部分群）H への作用から決まるものであり、$\mathbf{C}(H)$ は H の群環である。

上の既約性 depth 2 の証明をながめて見ると、写像

$$g \in G \longrightarrow Aut(L)$$

が homomorphism である必要はないことがすぐに分かる。必要な性質は、商空間への写像

$$g \in G \longrightarrow [\alpha_g] \in Aut(L)/Int(L)$$

が injective homomorphism である事である。ただし、不動点環 N 接合積 M が定義される為には、α の二つの部分群 H, K への制限は作用でなくてはならない。一番目の性質は α が G-kernel である事を意味するので、$\mathbf{T}$ に値を取る G 上の 3-cocycle によって記述される。二つの部分群への制限が作用であるような G-kernel を取り扱うのだから、非常に特別な 3-cocycle を考える事になる。

このような特別な 3-cocycle を考える事は、各 $k \in K$ に対する H 上の 2-cocycle $\eta_k \in Z^2(H, \mathbf{T})$ 、及び $\ell^\infty(H)$ のユニタリ部分に値を取る $\zeta \in Z^2(K, \mathcal{U}(\ell^\infty(H)))$ (K は $\ell^\infty(H)$ に自然に作用しているとする) の対 $\{\{\eta_k\}_{k\in K}, \zeta\}$ で次の関係式を満たすものを考える事と同値である：

$$\frac{\eta_{k_1}(h_1, h_2)(k_1 \cdot \eta_{k_2})(h_1, h_2)}{\eta_{k_1k_2}(h_1, h_2)} = \frac{\zeta_{h_1h_2}(k_1, k_2)}{\zeta_{h_1}(k_1, k_2)\zeta_{h_2}(k_1, k_2)}$$

（但し、$(k_1 \cdot \eta_{k_2})(h_1, h_2) = \eta_{k_2}(k_1^{-1}h_1k_1, k_1^{-1}h_2k_2)$ とおく。）また、この cocycle の対は Baaj-Skandalis の有名な Pentagon equation に関する論文

の Appendix に書かれている multiplicative unitary に対する "cocycle" とも全く同値な対象であるのを示す事も可能である。

上のような cocycle の対から定まる Kac algebra A は twisted crossed product

$$A = \ell^{\infty}(H) \rtimes_{\zeta} K$$

であり、また dual Kac algebra $\hat{A}$ は twisted group ring の直和

$$\hat{A} = \sum_{k \in K} {}^{\oplus}\mathbf{C}_{\eta_k}(H)$$

となる。それぞれの coproduct, antipode, intrinsic group 等を書き下してみると、cocycle の影響が現れている事が分かる。

非常に単純な cocycle からでも Kac algebra の変形が容易に起きることを見るため、$G = H \rtimes K, H = \mathbf{Z}_n \oplus \mathbf{Z}_n$ $(n \geq 3), K = \mathbf{Z}_2 = \{e, \epsilon\}$ として ϵ は H に flip として作用しているとする。cocycle が何も無い場合、Kac algebra は

$$A = \ell^{\infty}(H) \rtimes K = \underbrace{\mathbf{C} \oplus \mathbf{C} \oplus \cdots \oplus \mathbf{C}}_{2n} \oplus \underbrace{M_2(\mathbf{C}) \oplus M_2(\mathbf{C}) \oplus \cdots \oplus M_2(\mathbf{C})}_{\frac{n^2-n}{2}}$$

である。実際、K の H への作用は n 個の不動点を持ち、残りは $\frac{n^2-n}{2}$ 個の 2 点からなる orbit に分解するからである。問題は dual Kac algebra $\hat{A}$ の方である。これは群環 $\mathbf{C}(\mathbf{Z}_n \oplus \mathbf{Z}_n)$ 二つの直和であるが $\mathbf{Z}_n \oplus \mathbf{Z}_n$ が可換群であるので、$\hat{A}$ は可換であり、A は cocommutative な Kac algebra となっていておもしろくない。

そこで ω を 1 の n 乗根として、$\xi((a,b),(c,d)) = \omega^{ad}$ とおく。($\xi \in Z^2(H, \mathbf{T})$) さて、$\eta_{\epsilon} = (\epsilon \cdot \xi)\bar{\xi}$ (また $\zeta = \eta_e = 1$) とおくとこれらは ζ, η の基本関係式を満たす。この cocycle を使えば、dual Kac algebra $\hat{A}$ は可換な群環 $\mathbf{C}(\mathbf{Z}_n \oplus \mathbf{Z}_n)$ と twisted group ring $\mathbf{C}_{\eta_{\epsilon}}(\mathbf{Z}_n \oplus \mathbf{Z}_n)$ の直和となる。k を ω^2 の period とすれば後者は $M_k(\mathbf{C})$ の $(\frac{n}{k})^2$ 個のコピーに分解する。例えば、n (≥ 3) が奇数で $\omega = \exp(2\pi i/n)$ の時、

$$\hat{A} = \underbrace{\mathbf{C} \oplus \mathbf{C} \oplus \cdots \oplus \mathbf{C}}_{n^2} \oplus M_n(\mathbf{C})$$

となるので、Kac algebra は non-trivial なものに変化している事が分かる。