数理解析研究所講究録
938巻 1996年 114-122

C^1 connecting lemma と flow の Stability Conjecture

早大 商　林 修平 (Shuhei Hayashi)

Stability Conjecture と Ω-Stability Conjecture は[9]において、Palis と Smale により初めて明確に述べられた。この予想における stability と Ω-stability のための十分条件は diffeomorphism, flow ともに比較的早い時期に確立されたが、それらの条件が必要条件でもあるかどうかは、C^1 diffeomorphism の場合でさえ長年の未解決問題であった。それは[7]において、Mañé の多大な貢献により、C^1 structurally stable diffeomorphism に対し解かれ、Palis は[8]でそれを C^1 Ω-stable diffeomorphism まで拡張した。diffeomorphism の場合と同様に、flow についての予想も、安定性の仮定から nonwandering set の hyperbolicity を示すことに帰着される。Liao ([4]) と Doering ([1]) は3次元の場合にこの予想に貢献し、Hu ([3]) はこの場合について予想を解決した。つまり、3次元の structurally stable vector field は Axiom A を満たすことを示した。実際，flow の場合の最大の困難は singularity の存在であり，singularity に periodic orbit が集積しているときには diffeomorphism のときの議論が使えない。この困難は下で述べる C^1 connecting lemma によって乗りこえられ，最終的に C^1 で Stability Conjecture と Ω-stability Conjecture が解決される。

定理A　C^1 Ω-stable vector field は Axiom A を満たす。

connecting lemma を述べる前にいくつかの定義を述べる。M は境界のない compact manifold で $\mathrm{Diff}^r(M)$ と $\mathfrak{X}^r(M)$ はそれぞれ C^r topology を持つ M の C^r diffeomorphism f, vector field X の集合であり，X_t, $t \in \mathbb{R}$ は，$X \in \mathfrak{X}^r(M)$ によって生成された M 上の C^r flow である。Λ は isolated hyperbolic set，つまり，ある compact な Λ の近傍 U に対し，$\bigcap_n f^n(U) = \Lambda$, $\bigcap_t X_t(U) = \Lambda$ となる hyperbolic set とする。このとき，次のような，$D^s \subset W^s(\Lambda) \cap U$, $D^u \subset W^u(\Lambda) \cap U$ が存在する：ある $\varepsilon > 0$ に対し，diffeomorphism については

$D^s = \overline{W^s_\varepsilon(\Lambda) - f(W^s_\varepsilon(\Lambda))}$, $D^u = \overline{W^u_\varepsilon(\Lambda) - f^{-1}(W^u_\varepsilon(\Lambda))}$;
flow については、

$D^s = \overline{W^s_\varepsilon(\Lambda) - X_1(W^s_\varepsilon(\Lambda))}$, $D^u = \overline{W^u_\varepsilon(\Lambda) - X_{-1}(W^u_\varepsilon(\Lambda))}$.

$p \in W^s(\Lambda) \cap W^u(\Lambda) - \Lambda$ は Λ に関する homoclinic point という。f あるいは X の有限軌道の列 $\{\gamma_k : k \geq 1\}$ が Λ に関する almost homoclinic sequence であるとは、それが D^s と D^u の両方に集積し、各 γ_k は D^u の近くから一端 U の外に出て、再び U 内に入り D^s の近くにくるようなときをいう。

それでは connecting lemma を述べる。

定理B　$f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ (あるいは $X \in \mathfrak{X}^1(M)$), その近傍 $\mathcal{U}$ と isolated hyperbolic set Λ が与えられている。f (あるいは X) が Λ に関する almost homoclinic sequence を持つならば、Λ のある近傍で f (あるいは X) と一致する $g \in \mathcal{U}$ (あるいは $Y \in \mathcal{U}$) で、Λ に関する homoclinic point を持つものが存在する。

この定理を C^1 Ω-stable vector field の singularity に適用すると、次の系を得る。

系1　$X \in \mathfrak{X}^1(M)$ が C^1 Ω-stable ならば、

$$\mathrm{Sing}(X) \cap \overline{\mathrm{Per}(X)} = \phi .$$

定理Bは次の問題にも適用できる。

<u>問題</u>　$f \in \mathrm{Diff}^r(M)$（あるいは $X \in \mathfrak{X}^r(M)$）が、hyperbolic fixed point（あるいは singularity）p を持つとする。$(\overline{W^s(p)} \cap W^u(p)) \cup (\overline{W^u(p)} \cap W^s(p)) - \{p\} \neq \phi$ ならば、C^r で近いある diffeomorphism g（あるいは vector field Y）で、p のある近傍で f（あるいは X）と一致し、p に関する homoclinic point を持つものが存在するか？

Robinson と Pixton は M が2次元球面のとき、肯定的な解答を与え、Takens は volume-preserving diffeomorphism に対し、$r=1$ のときに証明し、Oliveira も、volume-preserving の場合に、任意の r で、2次元トーラスについて証明した。さらに、Mañé は $r=1,2$ のとき、p がある f-invariant measure に対して positive measure を持つという仮定の下で、それを解いた。

定理Bより次の系を得る。

系2　上の問題は $r=1$ のとき肯定的に解ける。

§1. 定理Aの証明の概略

X は C^1 Ω-stable vector field とする。$P_i(X)$ を stable subspace の次元が i である periodic point の集合とし、$\bar{P}_i(X)$ をその closure とする。diffeomorphism のときと同様に、$\bar{P}_0(X)$ に含まれる periodic orbit の数は有限である。[7] にあるように、$\bigcup_{i=0}^{j-1}\bar{P}_j(X)$ が hyperbolic と仮定して、$\bar{P}_j(X)$, $j\geq 1$ が hyperbolic であることを証明する。このとき、$\bigcup_{i=0}^{j-1}\bar{P}_i(X) = \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_s$ と basic set の disjoint union でかける。次の2つの場合がある。

1. $P_j(X)$ が $\bigcup_{i=0}^{j-1}\bar{P}_i(X)$ に集積している。
2. $\bar{P}_j(X) \cap \bigcup_{i=0}^{j-1}\bar{P}_i(X) = \phi$.

1の場合は、定理Bを用いてある Λ_i に関する homoclinic point をつくることにより矛盾が生じる。2の場合は、Mañé の diffeomorphism のときの証明と平行な議論を用いるが、ある diffeomorphism と flow の相違のために、[8] で Palis が行なったように、まず C^1 Ω-stable vector field における Axiom A の density を示し、そのあとで、nonwandering set 上の topological equivalence によって定理Aを証明する。

§2.　定理Bの証明の概略

$\{\gamma_k : k \geq 1\}$ を Λ に関する almost homoclinic sequence とする。各 k に対し、ある $\bar{\gamma}_k \subset \gamma_k$ をとって、その端点、p_k^u と p_k^s がそれぞれある $p^u \in D^u$ と $p^s \in D^s$ に $\bar{\gamma}_k$ の中で最も近い点であり、さらに、$\bar{\gamma}_k \cap U^c \neq \phi$, $\lim_{k\to\infty} p_k^u = p^u$, $\lim_{k\to\infty} p_k^s = p^s$ となるようにできる。この $\bar{\gamma}_k$ を用いて元のsystemから任意に近いものの有限軌道 $\tilde{\gamma}_k$ で次のような性質を持つものを見つけることができればよい。つまり、$\tilde{\gamma}_k$ の端点は p_k^u と p_k^s で、k によらないある $r>0$ に対し、k が十分大きければ、

(*)　$\tilde{\gamma}_k \cap B_r(p^u) = p_k^u$,　$\tilde{\gamma}_k \cap B_r(p^s) = p_k^s$

となる。ここで、$B_r(x)$ は diffeomorphism については M における、flowについてはある transversal section における、x を中心とした r-ball である。これから定理Bが導かれることは自明である。そのような有限軌道を得るために、Pughの C^1 closing lemma における perturbation の方法（[10]; 小さな box 内の2点（pair）のひとつの点を少しずつ box の多くの像の中で押して、もう一方の点のある像にぶつける）を p^u の有限正軌道にそって複数の pair に対し同時に適用する。その後で、同じことを $B_{r_0}(p^s)$ の pair について行なう。これらの pair を上のようにつなぐことに

よって、$\bar{\gamma}_n$のいくつかの部分を端点を残したまま切り落とし、$\bar{\gamma}_n \cap B_{r_0}(p^u)$と$\bar{\gamma}_n \cap B_{r_0}(p^s)$の点を少なくして$p^u$, p^sのまわりを疎にしたい。但し、pairはそれらをすべてつなぐことができれば(*)にある性質を持つように選んである。それでは、$\bar{\gamma}_n \cap B_{r_0}(p^u)$についてそれを説明する。すべてのpairをつなごうとすると、重複するboxから生じる干渉が起こる。そのときは、目的地を変え正軌道の順序でより遠くのpairに向かって押す。このようにして、干渉が生じなくなるまで修正していけばよい。実際、干渉がそれほど多くは起らないようにpairを選んでおく。次の性質が重要である。各boxに対し、他のboxとは高々L_0-1しか交わらないような$L_0>0$が存在し、L_0は押すときのsupportの大きさの変化に対して不変である。するとsupportの大きさを十分小さくとると(押す回数はふえるが)あまりに多くの干渉はL_0以上のboxがある1つのboxと交わることを意味し上の性質に反する。従って、上のような過程が終了するのに十分なperturbationのための場所を前もって用意することができる。

参考文献

[1] C. Doering, Persistently transitive vector

fields on three-dimensional manifolds, Pitman Res. Notes Math. Series, editor M. I. Camacho, M. J. Pacifico, and F. Takens, vol. 160 (1987), 59-89.

[2] S. Hayashi, Connecting invariant manifolds and the solution of the C^1 Stability and Ω-Stability Conjectures for flows, to appear in Annals of Math.

[3] S. Hu, A proof of C^1 Stability Conjecture for three-dimensional flows, Trans. AMS 342 (1994), 753-772.

[4] S. T. Liao, On the stability conjecture, Chinese Annals of Math. 1 (1980), 9-30.

[5] R. Mañé, An ergodic closing lemma, Annals of Math. 116 (1982), 503-540.

[6] R. Mañé, On the creation of homoclinic points, Publ. Math. IHES 66 (1988), 139-159.

[7] R. Mañé, A proof of the C^1 Stability Conjecture, Publ. Math. IHES 66 (1988), 162-210.

[8] J. Palis, On the C^1 Ω-Stability Conjecture, Publ. Math. IHES 66 (1988), 211-215.

[9] J. Palis and S. Smale, Structural stability theorems, Global Analysis, Proc. Sympos. Pure Math. vol. 14, AMS (1970), 223-231.

[10] C. Pugh and C. Robinson, The C^1 Closing Lemma, including Hamiltonians, Ergod. Th. and Dynam. Sys. 3 (1983), 261-313.