数理解析研究所講究録
938巻 1996年 160-168

Does smooth integrability of analytic systems imply their analytic integrability ?

東工大・理　　伊藤　秀一（Hidekazu Ito）

1.　力学系のなかでその解が求積法によって求められるような，いわゆる「積分可能系」はきわめて特殊なものであるが，そこに内在する構造の美しさや摂動論への応用などから様々な研究が行われている．それらは一般に，有限次元にせよ無限次元にせよハミルトン系と考えることができる．とくに有限次元ハミルトン系が積分可能であることの定義は，十分な個数の第一積分の存在によって与えることができ，一般に可微分力学系の枠内で積分可能性を論じることができる．ところが実際に我々が出会う積分可能ハミルトン系ではハミルトニアンは有理型関数などの広い意味で解析関数であり，その第一積分も解析的である．これは有限次元積分可能系の持つある種の「剛性」のように思える．ここではそのような積分可能系の持つ剛性について考察したい．

本稿の次節以降で考察する積分可能系は，2次元の面積保存（シンプレクティック）写像の場合であるが，我々の問題意識を明らかにするため，まず積分可能系の定義を一般的に述べよう．(M,ω) を $2n$ 次元シンプレクティック多様体，Hを M上の関数とする．このとき，Hをハミルトニアンとするハミルトンベクトル場 X_Hが$\omega(X_H,\cdot)=dH$ を満たすものとして定義される．ここで，多様体 Mおよび関数 Hは C^∞級または C^ω級（実解析的）とする．また，M上の微分同相写像ϕはωを不変に保つとき，シンプレクティック写像であるという．これらについて積分可能性を次のように定義する：

定義　ベクトル場 X_H（あるいは，シンプレクティック写像ϕ）が次の二つの条件を満たす n 個の C^r級（$r\geq 2, r=\infty$ または $r=\omega$の場合も許す）の第一積分 $F_1,\dots,F_n$をもつとき，C^r–積分可能と呼ぶ：

(i) $dF_1,\dots,dF_n$は Mの open-dense な集合上で1次独立；

(ii) $F_1,\dots,F_n$は互いにポアソン可換，すなわち $\{F_i,F_j\}\equiv 0$　　$(i,j=1,\dots,n)$.

ここで M上の関数 F,G のポアソン括弧 $\{F,G\}$ は $\{F,G\}:=\omega(X_F,X_G)$ によって定義される関数である．$\{F,H\}=dF(X_H)=X_HF$だから，Fが X_Hの第一積分であることは $\{F,H\}\equiv 0$ と表現される．また，ポアソン可換性 $\{F,G\}\equiv 0$ は，ベクトル場 X_F,X_Gが可換，すなわち X_F, X_Gによる二つの流れが可換であることを意味する．蛇

足ながら，Fが写像ϕの第一積分であるとは，Fがϕで不変，すなわち$F\circ\phi = F$となることである．

この定義は Liouville により導入され，解が形式的に求積法によって解けるための条件として研究されたが，じっさい後になって作用–角変数と呼ばれる特別な座標の存在を保証した次の定理が成り立つことが証明された（証明については [H-Z] を参照）：

定理 (Arnol'd–Jost)　ベクトル場X_H（あるいはシンプレクティック写像ϕ）がC^r–積分可能であり，その第一積分$F_1,\ldots,F_n$の定義するレベル集合$F^{-1}(c) := \{F_k = c_k\ (k = 1,\ldots,n)\}$の上で$dF_1,\ldots,dF_n$が1次独立とする（$c_k \in \mathbf{R}$は定数）．このとき，$F^{-1}(c)$のコンパクトな連結成分は$C^{r-1}$級の埋め込まれた$n$次元トーラス$T^n(= \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n)$であり，その近傍$U$と$C^{r-1}$級の微分同相写像

$$\psi : T^n \times D \ni (\xi,\eta) \to \psi(\xi,\eta) \in U \qquad (D\text{は}\ \mathbf{R}^n\text{の領域})$$

で次の三つの条件を満たすものが存在する：

(i)　$\psi^*\omega = \sum_{k=1}^{n} d\xi_k \wedge d\eta_k$;

(ii)　$F_k\circ\psi(\xi,\eta) = f_k(\eta)$　$(k = 1,\ldots,n)$;

(iii)　$H\circ\psi(\xi,\eta) = h(\eta)$.（写像$\phi$の場合は　$\psi^{-1}\circ\phi\circ\psi(\xi,\eta) = (\xi + h_\eta(\eta),\eta)$）.

ここで$f_k(\eta), h(\eta)$は$\eta \in D$のC^{r-1}級関数である．

この定理より，近傍Uは$T^n \times D$と同相であり，ベクトル場$X_{F_1},\ldots,X_{F_n}$およびX_Hの流れ（あるいは写像ϕ）によって不変であることがわかる．この変数ξとηをそれぞれ角変数，作用変数という．このときベクトル場X_Hは(ξ,η)座標のもとで

$$\dot{\xi} = h_\eta, \qquad \dot{\eta} = -h_\xi = 0$$

と書けるからX_Hの軌道は

$$\xi(t) = \xi_0 + t h_\eta(\eta_0), \qquad \eta(t) = \eta_0, \qquad (\xi_0, \eta_0 \in \mathbf{R}^n\text{は定数ベクトル})$$

で与えられる．ただし，ξ座標はT^nを$\mathbf{R}^n$に持ち上げて，$\xi \in \mathbf{R}^n$とみなし，ψは$\xi \in \mathbf{R}^n$について$\mathbf{Z}^n$–周期的と考える．したがってC^{r-1}級に埋め込まれたn次元トーラス

$$\Gamma := \psi(T^n \times \{\eta = \eta_0\})$$

はベクトル場 X_H（および $X_{F_1},\dots,X_{F_n}$）の流れで不変であり，この上で X_Hの流れは回転数ベクトル $h_\eta(\eta_0)$ のクロネッカー流$\xi \mapsto \xi + th_\eta(\eta_0)$ に C^{r-1}–微分共役である．同様に，写像ϕの場合は n 次元トーラスΓはϕで不変であり，この上でϕは回転数ベクトル $h_\eta(\eta_0)$ の定数回転$\xi \mapsto \xi + h_\eta(\eta_0)$ に C^{r-1}–微分共役である．

変換ψは C^{r-1}級であるが，我々が考えたい問題は「与えられた H（あるいはϕ）が“良い”条件を満たせば，ψの微分可能性（regularity）が上がらないか？」ということである．もしψとして C^∞（C^ω）級のものがとれるならば，$\eta_1,\dots,\eta_n$は X_H（あるいはϕ）の C^∞（C^ω）級の第一積分になるから，X_H（あるいはϕ）は不変トーラスΓの近傍では C^∞（C^ω)–積分可能になる．とくに C^ω級の場合が表題に書いた問題を意味することになる．

2. 以下では，この問いに対する第一歩として，きわめて特殊であるが基本的な場合である，円環上のシンプレクティック写像（つまり面積保存写像）を考えよう．

以下，$2 \le r < \infty$ または $r = \infty$，$r = \omega$に対して，$C^r(S^1 \times I)$，$C^r(S^1)$ をそれぞれ $\mathbf{R} \times I$（Iは $\mathbf{R}$ の開区間），$\mathbf{R}$ で定義された C^r級関数 $F(x,y)$，$F(x)$ で，$x \in \mathbf{R}$ に関して周期 1 をもつもの全体を表そう．

さて，$I_1 \subset \mathbf{R}$ を開区間，ϕを円環 $S^1 \times I_1$上で定義された C^∞（C^ω）級のシンプレクティック写像とする．以下ではこれを普遍被覆面に持ち上げ，$\phi\colon \mathbf{R} \times I_1 \to \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ と考え，

$$\phi\colon \begin{cases} x' = f(x,y), \\ y' = g(x,y), \end{cases} \tag{1}$$

ただし

$$f(x,y) = x + \hat{f}(x,y), \qquad \hat{f}, g \text{は } x \in \mathbf{R} \text{ に関して周期 1 をもつ．} \tag{2}$$

と仮定する．いま，ϕは C^r–積分可能，つまりϕの C^r級の第一積分 $F(x,y) \in C^r(S^1 \times I_1)$ が存在し，Arnol'd–Jost の定理におけるシンプレクティック変換ψが以下のように母関数を用いて定義できるとする．すなわち，$I_2 \subset \mathbf{R}$ を別の開区間とするとき，C^r級の母関数

$$W(x,\eta) = x\eta + \widehat{W}(x,\eta), \qquad \widehat{W} \in C^r(S^1 \times I_2) \tag{3}$$

で条件

$$\mathbf{R} \times I_2 \text{ 上で } W_{x\eta}(x,\eta) \neq 0 \tag{4}$$

を満たすものが存在して，C^{r-1}級の変換ψが（implicit な）関係式

$$\xi = W_\eta(x,\eta) = x + \widehat{W}_\eta(x,\eta), \qquad y = W_x(x,\eta) = \eta + \widehat{W}_x(x,\eta) \tag{5}$$

によって定義されるとする．このψは$\mathbf{R}\times I_2$から$\mathbf{R}\times I_1$への$dx\wedge dy = d\xi\wedge d\eta$を満たすシンプレクティック変換である．Arnol'd–Jost の定理の主張よりψは条件$F\circ\psi(\xi,\eta) = h(\eta)$および

$$\psi^{-1}\circ\phi\circ\psi(\xi,\eta) = (\xi+\alpha(\eta),\eta), \qquad \alpha\in C^{r-1}(I_2) \tag{6}$$

を満たす．この変換ψを

$$\psi : \begin{cases} x = u(\xi,\eta), \\ y = v(\xi,\eta), \end{cases}$$

ただし

$$u(\xi,\eta) = \xi + \widehat{u}(\xi,\eta), \qquad \widehat{u}, v \in C^{r-1}(S^1\times I_2)$$

と書こう．このとき (5) の第 1 式をξで微分すると

$$1 = W_{\eta x}(x,\eta)u_\xi(\xi,\eta) \tag{7}$$

であるから条件

$$\mathbf{R}\times I_2 \text{ 上で } u_\xi(\xi,\eta)\neq 0$$

が満たされる．逆に，この条件を満たすシンプレクティック変換は上のような母関数によって表現される．

前節で述べたように，我々の目的は座標変換ψの微分可能性がϕの微分可能性，すなわちC^∞（あるいはC^ω）級まで上がらないかどうかを考えることである．ここで報告するのは，その目標からはほど遠いが，ϕの不変曲線Γ（$S^1\times I_1$に射影すれば円周）およびその上でのϕと平行移動（S^1に射影すれば定数回転）$\xi\mapsto\xi+\omega$との共役写像の正則性である．

結果を回転数が有理数の場合と無理数の場合に分けて述べよう．ただし，今までに述べた状況を共通の仮定とする．それをまとめると：

[A.1] (1)–(2) で与えられるC^∞（あるいはC^ω）級のシンプレクティック写像$\phi:\mathbf{R}\times I_1\to\mathbf{R}^2$ に対し，(3)–(4) の形の母関数Wで定義されるC^{r-1}級（$r\geq 2$）のシンプレクティック変換$\psi:\mathbf{R}\times I_2\to\mathbf{R}\times I_1$ で，条件 (6) を満たすものが存在する．

定理 1　仮定 [A.1] のもとで，$\eta_0 \in I_2$に対して$\alpha'(\eta_0) > 0$ かつ$\alpha(\eta_0)$ が有理数であるならば，$W(x,\eta_0), W_\eta(x,\eta_0)$ は $x \in \mathbf{R}$ の C^∞（C^ω）級関数である．このときϕの不変曲線$\Gamma = \psi(\mathbf{R} \times \{\eta = \eta_0\})$ は $y = W_x(x,\eta_0)$ と表される C^∞（C^ω）級曲線であり，その上でϕは平行移動$\xi \mapsto \xi + \alpha(\eta_0)$ に C^∞（C^ω)–微分共役である．

注意　最後の主張は $W(x,\eta_0), W_\eta(x,\eta_0)$ が $x \in \mathbf{R}$ の C^∞（C^ω）級関数であることからの直接の帰結である．じっさい，母関数表示 (5) で$\eta = \eta_0$とおいたものの第 2 式がΓの C^∞（C^ω）級関数によるグラフ表示であり，第 1 式を x について解いたものが，その上でのϕの平行移動との $C^\infty(C^\omega)$ –微分共役を与える．

定理の仮定$\alpha'(\eta_0) > 0$ はψによって移された変換が Twist map になっていることを意味している．回転数が無理数の場合は，KAM 理論における正則性定理を用いる．そのため仮定として次の条件 [A.2] を付け加える．

[A.2]　写像ϕは時間 t に依存するハミルトンベクトル場 X_Hの流れの time-one map として表され、そのハミルトニアン $H(t,x,y)$ は $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times I_1$ 上で定義され，$t, x \in \mathbf{R}$ に関して周期 1 をもち条件 $H_{yy}(t,x,y) > 0$ を満たす C^∞（C^ω）級関数である．

この条件はϕが C^∞級で monotone twist 条件，$f_y(x,y) > 0$，を満たす exact なシンプレクティック写像ならば成り立つ（[M]）．ただしϕが exact とは$\phi^*(ydx) - ydx = dS$ となる関数 $S(x,y) \in C^\infty(S^1 \times I_1)$ が存在するときをいう。仮定 [A.1] の下では monotone-twist 条件は成り立っているともいえることに注意しよう．すなわち，[A.1] における変換ψの（C^r級の）母関数を C^ω級関数で近似することができる（[S-Z] 参照）から，近似母関数によって定義されるシンプレクティック変換をあらかじめ行うことにより，ϕ は写像 $(x,y) \mapsto (x + \alpha(y), y)$ に C^1 ノルムで近いと仮定してよい．このとき $f(x,y)$ は $x + \alpha(y)$ に近いから，$\alpha'(y_0) > 0$ は $y = y_0$の近くで $f_y(x,y) > 0$ が成り立つことを意味している．なお，ϕが実解析的な場合に同様な仮定のもとで [A.2] が成り立つかどうかは不明である．

KAM 理論が適用できるのは無理数の回転数のうち次の Diophantine 条件が満たされる場合である．

定義　$\omega \in \mathbf{R}$ が指数τの Diophantine 条件を満たすとは，次の条件 (DC) を満たす定数

$\gamma > 0$ および$\tau \geq 1$ が存在するときをいう：

(DC) すべての $p, q \in \mathbf{Z}$ $(q > 0)$ に対して $|q\omega - p| \geq \gamma |q|^{-\tau}$

これはωが有理数であまり良くは近似できないことを表している．

定理 2 仮定 [A.1] と [A.2] のもとで，$\eta_0 \in I_2$に対して$\alpha'(\eta_0) > 0$ かつ$\alpha(\eta_0)$ が指数τ（ただし$\tau < \dfrac{r-4}{4}$, $r > 8$）の Diophantine 条件を満たす無理数であるならば，$W(x, \eta_0), W_\eta(x, \eta_0)$ は $x \in \mathbf{R}$ の C^∞（C^ω）級関数であり，定理 1 の最後に述べた主張が成り立つ（定理 1 のあとの注意参照）．

注意 仮定の中で，指数τへの制限$\tau < (r-4)/4$, $r > 8$ は Salamon–Zehnder による正則性定理 [S-Z, Theorem 5] を用いて定理 2 を証明することによる．[S-Z, Theorem 8] によると，この制限は$\tau < (r-4)/2$, $r > 6$ にゆるめることができる．しかしその証明は同論文では述べられていないので，ここではそれを採用しないことにした．

定理 2（および上の注意）に述べられた無理数の回転数に対する付加的な条件はなくても，Liouville 数の場合も含めて定理 1 と同じ結論が成り立つのではないかと思われる．これは将来の課題である．なお、この付加的な条件は $r = \infty$ の場合は不要である．したがって仮定 [A.1], [A.2] の下で C^ω写像の C^∞–積分可能性は，回転数が有理数または Diophantine 条件を満たす無理数の場合，その不変曲線およびその上での定数回転との共役写像が C^ω級であることを意味する．これは本稿の表題に対するささやかな部分的解答というわけである．

3. 定理 1 の証明の概略を述べよう．$\alpha(\eta_0) = p/q$ ($p, q \in \mathbf{Z}$, $q > 0$, p, qは互いに素) とする．ϕはψにより写像 ρ: $(\xi, \eta) \mapsto (\xi + \alpha(\eta), \eta)$ と共役だから，合成写像$\phi^q = \overbrace{\phi\circ \cdots \circ \phi}^{q\text{個}}$ および$\rho^q = \overbrace{\rho\circ \cdots \circ \rho}^{q\text{個}}$について

$$\phi^q(x, y) = \psi \circ \rho^q \circ \psi^{-1}(x, y) \tag{8}$$

が成り立つ．いま

$$\phi^q(x, y) = (f^q(x, y), g^q(x, y))$$

と書こう．このとき，不変曲線Γ上の点を任意にとり，それを $(x, y) = \psi(\xi, \eta_0)$ とすると $\rho^q(\xi, \eta_0) = (\xi + q\alpha(\eta_0), \eta_0) = (\xi + p, \eta_0)$ であるから，(2) より

$$f^q(x, y) - x = p \tag{9}$$

が成り立つ．ここで (8) 式の両辺の微分をこの点 (x, y) で考えると，$D\psi$がξに関して周期1をもつこと，および $D\psi^{-1}(x, y) = \big(D\psi(\xi, \eta_0)\big)^{-1}$ であることから

$$D\phi^q(x, y) = D\psi(\xi, \eta_0) D\rho^q(\xi, \eta_0)(D\psi(\xi, \eta_0))^{-1} \tag{10}$$

である．ところが $D\phi^q(x, y)$ がシンプレクティック行列であることに注意すると (10) より

$$f_y^q(x, y) = q\alpha'(\eta_0)\big(u_\xi(\xi, \eta_0)\big)^2 \tag{11}$$

であることがわかる．ここで $u_\xi \neq 0$ だから，$\alpha'(\eta_0) > 0$ の仮定のもとで $f_y^q(x, y) > 0$ が成り立つ．そこで方程式 (9) に対して，ある点 $(x_0, y_0) \in \Gamma$において陰関数定理を用いると

$$f^q(x, \beta(x)) - x = p \qquad \text{かつ} \quad y_0 = \beta(x_0)$$

を満たす関数$\beta \in C^\infty(S^1)$（$C^\omega(S^1)$）がただ一つ存在することがわかる．したがってΓは $y = \beta(x)$ で与えられる C^∞（C^ω）級の曲線である．ここでψの母関数表示 (5) の第2式で$\eta = \eta_0$とおいたものは，この表現式 $y = \beta(x)$ と等しくなければならないから

$$\beta(x) = W_x(x, \eta_0).$$

であり，x のフーリエ級数 $W_x(x, \eta_0)$ は（したがって $W(x, \eta_0)$ も）C^∞（C^ω）級であることがわかる．また (7) より

$$W_{\eta x}(x, \eta_0) = \frac{1}{u_\xi(\xi, \eta_0)}$$

であるが，$u_\xi \neq 0$ だから，$u_\xi > 0$ または $u_\xi < 0$ であり，どちらの場合も (11) に $y = \beta(x)$ を代入すれば，$u_\xi(\xi, \eta_0)$ が $x \in \mathbf{R}$ の関数とみれば C^∞（C^ω）級であることがわかる．よって $W_{\eta x}(x, \eta_0) \in C^\infty(S^1)$（$C^\omega(S^1)$）であり，$W_\eta(x, \eta_0)$ は $x \in \mathbf{R}$ の C^∞（C^ω）級関数である．定理の叙述のあとの注意より最後の主張がいえるから，以上で定理1の証明が終わる．

4.　定理2は KAM 理論における Salamon–Zehnder による正則性定理（[S-Z, Theorem 5, pp.123-124]）の直接の応用である．$H(t, x, y)$ を条件 [A.2] におけるハミルトニアンとし，ハミルトンベクトル場 X_H の流れをφ^{t,t_0}とする．(X_Hの解の $t = t_0$での位置に対して t での位置を対応させる写像.）仮定より，写像ϕはこの流れの time-one map，すなわち $\phi=\varphi^{1,0}$である．このときϕの不変曲線Γを$\varphi^{t,0}$ $(-\infty<t<\infty)$ によって (t,x,y) 空間に写像してできる像は，$S^1\times S^1\times I_1$空間に射影してみれば2次元トーラス $T^2=S^1\times S^1$である．いま

$$w(t,\xi)=(x(t,\xi),y(t,\xi))=\varphi^{t,0}\circ\psi(\xi-\omega t,\eta_0)$$

とおくと，これは$\mathbf{R}^2$から$\mathbf{R}\times I_1$への C^{r-1}写像であり

$$w(t,\xi+\omega t)=\varphi^{t,0}\circ\psi(\xi,\eta_0)$$

であるから，任意の$\xi\in\mathbf{R}$ に対して $w(t,\xi+\omega t)$ は $t=0$ で点$\psi(\xi,\eta_0)$ を通る X_Hの積分曲線である．これは T^2上のクロネッカー流

$$\dot{t}=1,\quad \dot{\xi}=\omega$$

を C^{r-1}写像 wで埋め込んだものであり，回転数ベクトル $(1,\omega)$ の準周期的な流れを与える．ここで

$$\frac{d}{dt}w(t,\xi+\omega t)=w_t(t,\xi+\omega t)+\omega w_\xi(t,\xi+\omega t)$$

であるから，任意の$\xi\in\mathbf{R}$ に対して $w(t,\xi+\omega t)$ が X_Hの積分曲線であることは，$w(t,\xi)$ が偏微分方程式

$$Dw(t,\xi)=J\nabla H(t,w(t,\xi));\quad \text{ただし}\ D=\frac{\partial}{\partial t}+\omega\frac{\partial}{\partial\xi},\ \ J=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\tag{12}$$

を満たすことと同値である．ここで仮定

$$H_{yy}(t,x,y)>0\tag{13}$$

より，ハミルトン方程式

$$\dot{x}=H_y(t,x,y),\qquad \dot{y}=-H_x(t,x,y)$$

はオイラー–ラグランジェ方程式

$$\frac{d}{dt}F_p(t,x,\dot{x})=F_x(t,x,\dot{x})$$

と同値である．ただしラグランジェアン $F(t,x,p)$ はルジャンドル変換

$$F(t,x,p)=<y,p>-H(t,x,y)$$

で与えられ，右辺における変数yは関係式$p = H_y(t,x,y)$より消去される．これは仮定(13)より可能である．したがって，埋め込み$(x,y) = w(t,\xi)$が方程式(12)を満たすことは，関数$x\colon (t,\xi) \mapsto x(t,\xi)$が方程式

$$DF_p(t,x,Dx) = F_x(t,x,Dx)$$

を満たすことと同値である．(13)よりHのルジャンドル変換Fについても

$$F_{pp}(t,x,p) > 0$$

であり，$w(t,\xi)$のx–成分$x(t,\xi)$については

$$x_\xi(t,\xi) > 0 \tag{14}$$

が成り立つ（[S-Z, Lemma 9]）．よって$a(t,\xi) := (x_\xi)^2 F_{pp}(t,x,Dx)$は条件

$$a(t,\xi) > 0 \quad ((t,\xi) \in \mathbf{R}^2) \qquad \text{かつ} \quad \int_{T^2} a(t,\xi)^{-1} dt d\xi > 0$$

を満たす．よって[S-Z]の意味で，組(F,x)は安定である．ゆえに[S-Z, Theorem 5]のtime-dependent版よりC^{r-1}級関数$x(t,\xi)$は自動的に$\mathbf{R}^2$上のC^∞ (C^ω)級関数である．ここで

$$y(t,\xi) = F_p(t,x(t,\xi),Dx(t,\xi))$$

であるから，$y(t,\xi)$も$\mathbf{R}^2$上のC^∞（C^ω）級関数であり，$x(0,\xi) = u(\xi,\eta_0), y(0,\xi) = v(\xi,\eta_0)$は$\xi$の$C^\infty$ (C^ω)級関数である．関係式$x = u(\xi,\eta_0), y = v(\xi,\eta_0)$は母関数表示(5)で$\eta = \eta_0$とおいたものと同値であるが，(14)より$u_\xi > 0$であるから，$x = u(\xi,\eta_0)$は$\xi$について解くことができる．よって$W_\eta(x,\eta_0), W(x,\eta_0)$が$x$の$C^\infty$ (C^ω)級関数であることがわかり，証明が完了する．

参考文献

[H-Z] H. Hofer and E. Zehnder: Symplectic Invariants and Hamiltonian Dynamics, Birkhäuser, 1994, Appendix A.2.

[S-Z] D. Salamon and E. Zehnder: KAM theory in configuration space, Comment. Math. Helvetici **64** (1989), 84–132.

[M] J. Moser: Monotone twist mappings and the calculus of variations, Ergod. Th. Dynam. Sys. **6** (1986), 401–413.