数理解析研究所講究録
938 巻 1996 年 75-80

Periodic solutions of singular Hamiltonian systems

早稲田大学理工学部 田中和永 (Kazunaga Tanaka)

1. Introduction

次の Hamilton 系に対する周期解の存在を考察する.

$$\dot{q} = H_p(p(t), q(t)), \tag{HS.1}$$

$$\dot{p} = -H_q(p(t), q(t)), \tag{HS.2}$$

ここで $p,\ q \in \mathbf{R}^N$ $(N \geq 2)$ とし, Hamilton 関数 $H(p,q) : \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ は t によらない C^2-級の関数とする.

$(p(t), q(t))$ が (HS.1)–(HS.2) をみたせば

$$\frac{d}{dt} H(p(t), q(t)) = H_p(p,q)\,\dot{p} + H_q(p,q)\,\dot{q} = 0$$

であるから, $(p(t), q(t))$ はある $h \in \mathbf{R}$ に対して

$$H(p(t), q(t)) = h \qquad \forall t \in \mathbf{R} \tag{HS.3}$$

をみたす. 言い換えれば $(p(t), q(t)) \in S_h$ をすべての t に対してみたす. ここで

$$S_h = \{(p,q) \in \mathbf{R}^{2N};\ H(p,q) = h\}.$$

以下では, $h \in \mathbf{R}$ を与えられた数とし, (HS.3) をみたす (HS.1)–(HS.2) の周期軌道, すなわちある $T > 0$ に対して $p(t+T) = p(t)$, $q(t+T) = q(t)$ をみたす (HS.1)–(HS.2) の解, の存在を考察したい. この問題は prescribed energy problem と呼ばれる.

この問題は次のような幾何学的な側面を持つ. $S \subset \mathbf{R}^{2N}$ を超曲面とし, Hamilton 関数 $H : \mathbf{R}^{2N} \to \mathbf{R}$ を

$$S = \{H = h\} \quad かつ \quad \nabla H(z) \neq 0 \quad \forall z \in S$$

となるように選ぶ. このとき (HS.1)–(HS.2) の定める flow は S を保つ. そこでその flow が S 上に周期軌道を持つかどうか, すなわち S 上の Hamiltonian vector field $X_H = J\nabla H$ は閉軌道を持つか否かを考える. 閉軌道の有無は曲面 S により定まり Hamilton 関数 H の選び方によらない性質となっている.

このような研究は 1978 年に Rabinowitz [**R**], Weinstein [**W**] により変分的手法により研究が始められ, S が compact な星型の曲面, あるいは凸曲面のときに S 上に少なくとも 1 つ周期軌道が存在することが示された. 以来, 研究が続けられ, Viterbo [**V**] (c.f. [**HZ**]) による $\mathbf{R}^{2N}$ での Weinstein conjecture の解決等の発展を見ている. これらに関しては最近の論説 [**I**] を参照されたい.

以下では同様の問題を S が non-compact の場合に考えてみたい. このような問題を考える直接の動機は天体力学における 2-体 (あるいは n-体) 問題において, energy $h \in \mathbf{R}$ を持つ周期軌道の存在を考えるとき生ずる. 言うまでもないが, 2-体問題の場合 $H(p,q) = \frac{1}{2} \mid p \mid^2 - \frac{1}{|q|}$ となり energy 曲面 $S = \{H = h\}$ は non-compact である. このような Hamilton 関数を一般化した Hamilton 系をここでは singular Hamiltonian system と呼びたい. 以下次節では

$$H(p,q) = \frac{1}{2} \mid p \mid^2 + V(q)$$

の形の古典的な singular Hamiltonian system を扱い, その後に 3 節において更に一般的な singular Hamiltonian system に対する最近の結果を述べたい.

2. Second order singular Hamiltonian systems

この節では, 直感的にも考えやすい singular Hamiltonian system として "古典型" のもの

$$H(p,q) = \frac{1}{2} \mid p \mid^2 + V(q), \qquad V(q) \sim -\frac{1}{\mid q \mid^\alpha} \ (\alpha > 0)$$

を考える. この場合 Hamilton 系 (HS.1)–(HS.2) は

$$\ddot{q} + \nabla V(q) = 0, \tag{1.1}$$

$$\frac{1}{2} \mid \dot{q} \mid^2 + V(q) = h, \tag{1.2}$$

と同値となる. 最も簡単な場合 $V(q) = -\frac{1}{|q|^\alpha}$ $(\alpha > 0)$, 次のことが成立する.

Lemma 1. (1.1)–(1.2) が周期解を持つための必要十分条件は次のものである.

(i) $\alpha \in (0,2)$ のとき $h < 0$,

(ii) $\alpha > 2$ のとき $h > 0$,

(iii) $\alpha = 2$ のとき $h = 0$.

Proof. $q(t)$ を (1.1) の周期解とし, その周期を $T > 0$ とする. $q(t)$ は次の functional の critical point である.

$$I(q) = \int_0^T [\frac{1}{2} \mid \dot{q} \mid^2 + \frac{1}{\mid q \mid^\alpha}] \, dt.$$

周期解 $q(t)$ に対して $I'(q)q=0$ より

$$\int_0^T [|\dot{q}|^2 - \frac{\alpha}{|q|^\alpha}]\,dt = 0.$$

$q(t)$ が (1.2) をみたすとすると $\frac{1}{2}|\dot{q}|^2 - \frac{1}{|q|^\alpha} = h$ であるから

$$\int_0^T [2h + \frac{2-\alpha}{|q|^\alpha}]\,dt = 0.$$

これより, 周期解が存在するためには (i)–(iii) のうち 1 つが成立することが必要であることがわかる.

逆に, (i)–(iii) のうち 1 つが成立することが十分条件であることは,

$$q(t) = (R\cos\omega t, R\sin\omega t, 0, \cdots, 0)$$

の形の解が 適当に R, $\omega > 0$ を定めれば条件 (i)–(iii) の下では得られることによりわかる. ∎

上の Lemma 1 より, singularity の order α と周期解の持つことのできる energy level h の値が密接に関連することがわかる. 超曲面

$$S_h = \{(p,q);\ \frac{1}{2}|p|^2 - \frac{1}{|q|^\alpha} = h\}$$

の形状も h の正負により大きく異なることも注意して頂きたい.

方程式 (1.1)–(1.2) において $V(q)$ が singularity を持たないとき, すなわち $V \in C^2(\mathbf{R}^N, \mathbf{R})$ のとき, 次の条件の下で (1.1)–(1.2) が少なくとも 1 つ周期解を持つことを Hayashi [**H**], Benci [**B**], Gluck-Ziller [**GZ**] が示している.

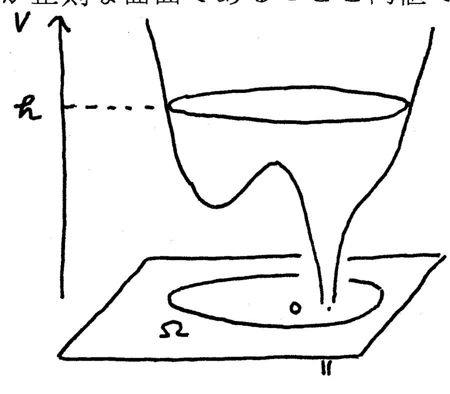
(a1) $V \in C^1(\mathbf{R}^N, \mathbf{R})$,

(a2) $\Omega = \{q \in \mathbf{R}^N;\ V(q) < h\}$ は有界集合,

(a3) $\nabla V(q) \neq 0 \quad \forall q \in \partial\Omega$.

ここで (a2) は S が compact であることを, (a3) は S が正則な曲面であることと同値である.

上の Lemma 1 によれば, potential $V(q)$ が右図のように potential well Ω 内に singularity を持つ場合, その order α が 2 以上のとき一般に周期解の存在は期待できない. しかし $\alpha \in (0,2)$ の場合はどうであろうか? 次の定理が部分解を与える.



Theorem 2 ([**T2**]). $V(q)$ は次をみたすとする.

(V1) $V \in C^2(\mathbf{R}^N \setminus \{0\}, \mathbf{R})$,

(V2) $\Omega \equiv \{q \in \mathbf{R}^N \setminus \{0\};\, V(q) < h\} \cup \{0\}$ は有界集合,

(V3) 次の意味で $V(q) \sim -\frac{1}{|q|^\alpha}$ *near* $q = 0$; $W(q) = V(q) + \frac{1}{|q|^\alpha}$ とおくと

$$|\, q \,|^\alpha\, W(q),\ |\, q \,|^{\alpha+1}\, \nabla W(q),\ |\, q \,|^{\alpha+2}\, \nabla^2 W(q) \to 0 \quad \text{as } q \to 0.$$

以上の仮定に加えて

(i) $\alpha \in (1, 2)$ if $N \geq 4$,

(ii) $\alpha \in (4/3, 2)$ if $N = 3$,

ならば (1.1)–(1.2) は少なくとも 1 つ周期解を持つ. ∎

Remarks. (i) potential well Ω 内の singularity の個数は有限個ならば同様の周期解の存在結果が成立する. より詳しくは $V(q) \in C^2(\mathbf{R}^N \setminus \{p_1, p_2, \cdots, p_\ell\}, \mathbf{R})$, $V(q) \sim -\dfrac{a_j}{|\, q - p_j \,|^{\alpha_j}}$ near $q = p_j$ としても $\alpha_j \in (1, 2)$ $(N \geq 4)$, $\alpha_j \in (4/3, 2)$ $(N = 3)$ がすべての j について成立するならば, 周期解が少なくとも 1 つ存在する.
(ii) すべての $N \geq 2$ について $\alpha \in (1, 2)$ に対して存在結果が得られるであろうと予想されるが, 現在までのところ技術的な理由により知られているのは上の結果までである.

また $h > 0$, $\alpha > 2$ の場合を扱った論文としては [**P**], [**ACZ**] およびその references があげられる. ここでは [**P**] の結果の特別な場合をあげるにとどめる.

Theorem 3 (c.f. [**P**]). $N \geq 2$ とし, $V(q)$ は

(i) $V(q) \in C^1(\mathbf{R} \setminus \{0\}, \mathbf{R})$,

(ii) $V(q) < 0 \quad \forall q \neq 0$,

(iii) $V(q) \sim -\frac{1}{|q|^\alpha}$ near $q = 0$. ∎

このとき, $\alpha > 2$ ならば任意の $h > 0$ に対して (1.1)–(1.2) は周期解を持つ.

これらの結果は変分的な手法により証明される. 周期 1 の周期関数の空間

$$E = \{u \in H^1(0, 1; \mathbf{R}^N);\, u(0) = u(1)\}$$

上の functional

$$J(u) = \int_0^1 \frac{1}{2} \,|\, \dot{u} \,|^2 \, d\tau \int_0^1 [h - V(u(\tau))]\, d\tau$$

の critical point $u(\tau)$ で $J(u) > 0$ をみたすものに対して

$$q(t) = u(t/T), \qquad T = \left(\frac{\int_0^1 \frac{1}{2} \,|\, \dot{u} \,|\, d\tau}{\int_0^1 [h - V(u(\tau))]\, d\tau} \right)^{1/2}$$

とおくと $q(t)$ は (1.1)–(1.2) をみたすことを利用して, ある種の minimax 法を $J(u)$ に適用することにより証明は行われる. 証明の詳細については直接論文 [**T2**], [**P**] をみられたい. また変分法による (1.1)–(1.2) あるいは (1.1) に対する prescribed period problem の研究については [**ACZ**] およびその references をご覧頂きたい.

3. First order singular Hamiltonian systems

前節では "古典型" の Hamilton 系を考えたが, Theorem 2, 3 で周期軌道の存在が保証された non-compact な超曲面 $S=\{(p,q);\frac{1}{2}\mid p\mid^2+V(q)=h\}$ を含み, 周期軌道の存在を示すことのできるさらに一般的なクラスは何か? というのは自然な問いであろう. またその様なクラスは symplectic な変換に関して不変であるべきである.

しかし残念ながら現在までのところ "古典型" を若干一般化した

$$H(p,q)\sim\frac{1}{\beta}\mid p\mid^\beta-\frac{1}{\mid q\mid^\alpha}$$

の形のものに対して存在結果を得たに過ぎない. ここでは [**CST**] の結果を紹介したい.

Theorem 4 ([**CST**]). $H(p,q)$ は定数 $\alpha,\beta>1$, $a_1, a_2,\cdots,a_{11}>0$ に対して次をみたすと仮定する.

(h0) $H(p,q)\in C^1(\mathbf{R}^N\times(\mathbf{R}^N\setminus\{0\}),\mathbf{R})$;

(h1) $H(p,q)\le a_1\mid p\mid^\beta-a_2\dfrac{1}{\mid q\mid^\alpha}\quad\forall p,\ q\neq 0$;

(h2) $\mid H_p(p,q)\mid\le a_3\mid p\mid^{\beta-1}+a_4\dfrac{1}{\mid q\mid^{\alpha(\beta-1)/\beta}}+a_5\quad\forall p,\ q\neq 0$;

(h3) (i) $H_p(p,q)p\ge a_6\mid p\mid^\beta-a_7\quad\forall p,\ q\neq 0$;

(ii) $H_q(p,q)q\ge a_8\dfrac{1}{\mid q\mid^\alpha}-a_9\quad\forall p,\ q\neq 0$;

(h4) $a_{10}\left(\dfrac{1}{\beta}H_p(p,q)p-\dfrac{1}{\alpha}H_q(p,q)q\right)-a_{11}\le H(p,q)\le a_{12}H_p(p,q)p+a_{13}H_q(p,q)q$ $\forall p,\ q\neq 0$;

(h5) 非増加関数 $\kappa_0(\rho)\in C([0,\infty),\mathbf{R})$ が存在し

$$\kappa_0(\rho)\to 0\qquad\text{as }\rho\to\infty,$$
$$\mid H_q(p,q)\mid\le\kappa_0(\mid q\mid)(\mid p\mid^\beta+1)\qquad\forall p,\ q\neq 0;$$

(h6) $\delta>0$ および関数 $A(q)\in C(\mathbf{R}^N\setminus\{0\},\mathbf{R})$ が存在し

$$\mid H_q(p,q)\mid\le a_{14}\mid p\mid^{\beta-\delta}+A(q)\qquad\forall p,\ q\neq 0.$$

このとき $\alpha>\beta>1$ ならば任意の $h>0$ に対して (HS.1)–(HS.3) は少なくとも 1 つ周期解をもつ. ∎

上の定理は Lemma 1 における (ii) の場合を一般化したものといえる. (i) の場合を一般化したものとしては, 弱解 (解軌道が singularity 0 に入る可能性を認めた解 — 定義等詳しくは [**ACZ**]) の存在を示した Ambrosetti and Struwe [**AS**] を参照されたい.

References

[**ACZ**] A. Ambrosetti and V. Coti Zelati, Periodic solutions of singular Lagrangian systems, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 1993.

[**AS**] A. Ambrosetti and M. Struwe, Periodic motions for conservative systems with singular potentials, *NoDEA*, **1** (1994), 179–202.

[**B**] V. Benci, Closed geodesics for the Jacobi metric and periodic solutions of prescribed energy of natural Hamiltonian systems, *Ann. Inst. H. Poincaré, Analyse non linéaire* **1** (1984), 401–412.

[**CST**] C. Carminati, E. Séré and K. Tanaka, *preprint.*

[**GZ**] H. Gluck and W. Ziller, Existence of periodic motions of conservative systems, in "Seminar on minimal submanifolds", E. Bombieri ed., Princeton Univ. Press (1983), 65–98.

[**H**] K. Hayashi, Periodic solutions of classical Hamiltonian systems, *Tokyo J. Math.* **6** (1983), 473–486.

[**HZ**] H. Hofer and E. Zehnder, Periodic solutions on hypersurfaces and a result by C. Viterbo, *Invent. Math.* **90** (1987), 1–9.

[**I**] 伊藤秀一, ハミルトン力学系の周期解, 数理科学 **384**(1995), 60–65.

[**P**] L. Pisani, Periodic solutions with prescribed energy for singular conservative systems involving strong force, *Nonlinear Analysis: T. M. A.* **21** (1993), 167–180.

[**R**] P. H. Rabinowitz, Periodic solutions of Hamiltonian systems, *Comm. Pure Appl. Math.* **31** (1978), 157–184.

[**T1**] K. Tanaka, A prescribed energy problem for a singular Hamiltonian system with a weak force, *J. Funct. Anal.* **113** (1993), 351–390.

[**T2**] K. Tanaka, A prescribed energy problem for a conservative singular Hamiltonian system, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **128** (1994), 127–164.

[**T3**] K. Tanaka, Periodic solutions of first order singular Hamiltonian systems, *Nonlinear Analysis: T. M. A.* (to appear).

[**V**] C. Viterbo, A proof of Weinstein's conjecture in $\mathbf{R}^{2n}$, *Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Nonlinéaire* 4 (1987), 337–356.

[**W**] A. Weinstein, Periodic orbits for convex Hamiltonian systems, *Ann. Math.* **108** (1978), 507–518.