数理解析研究所講究録
939 巻 1996 年 183-197

非線形エルゴート定理における
弱, 及び強収束定理

東工大 大学院理工学研究科 加田修 (OSAMU KADA)

1. はじめに

$\mathbf{Z}, \mathbf{Z}^+, \mathbf{N}, \mathbf{R}, \mathbf{R}^+$ をそれぞれ整数全体の集合, 負でない整数全体の集合, 自然数全体の集合, 実数全体の集合, 負でない実数全体の集合とする.

C を実 Hilbert 空間 H の空でない閉部分集合とする. 写像 $T: C \to C$ は, 次の条件を満たすとき nonexpansive mapping といわれる:

$$\text{任意の } x, y \in C \text{ に対して} \quad \|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|.$$

最初の nonexpansivemapping に対するエルゴード定理は Baillon [1] によって次のように得られた:

定理 A C を空でない閉かつ凸な H の部分集合とし, T を C から C への nonexpansivemapping とする. もし T が不動点を持てば, Cesáro means $(1/n)\sum_{k=0}^{n-1} T^k x$ は T の不動点 y に弱収束する. もし $C = -C$ で T が odd,(すなわち,$T(-x) = -T(x)$) ならば, Sx はある T の不動点 y に強収束する.

このとき $x \in C$ に対して $y = Px$ とおくと P は C から不動点集合 $F(T)$ の上への nonexpansiveretraction となり, $n \in \mathbf{Z}^+$ に対して $PT = TP = P$ で $x \in C$ に対して $Px \in \mathrm{clco}\{T^n x;\ n \in \mathbf{Z}^+\}$ となっている. ここで clco$A$ は A の凸包の閉包である.

$\mathcal{S} = \{T(s); s \in \mathbf{R}^+\}$ を C から C への nonexpansive mappings の family とする. このとき $\mathcal{S}$ は次を満たすとき C 上の nonexpansive semigroup という: $T(s+t) = T(s)T(t)$ $(\forall s, t \in \mathbf{R}^+)$, かつ写像 $t \mapsto T(t)x$ は任意の $x \in C$ に対して連続. Baillon と Brézis [5] は次の定理を証明した:

定理 B もし $\mathcal{S}$ の共通不動点集合 $F(\mathcal{S})$ が空でないとすると, $(1/t)\int_0^t T(s)x\,ds$ は $t \to \infty$ のときある共通不動点 y に弱収束する.

このとき $y = Px$ とおくと, P は C から $\mathrm{F}(\mathcal{S})$ の上への nonexpansive retraction で, $PT(s) = T(s)P$, $s \in \mathbf{R}^+$, かつ $Px \in \mathrm{clco}\{T(s)x;\ s \in \mathbf{R}^+\}$, $x \in C$ となっている.

定理 A, B のような P を Ergodic retraction という. 定理 A は, $S = \mathbf{Z}^+$, 定理 B は $S = \mathbf{R}^+$ でいずれも Hilbert 空間のとき, ある mean の net が ergodic retraction に弱, 又は強収束することをいっている. エルゴート定理において, この ergodic retraction $P(= T(\mu))$ が unique に存在することが本質的である. この unique な存在を仮定してみる. $\{\mu_\alpha\}$ を asymptotically invariant な mean の net; 例えば $S = \mathbf{Z}^+$ で, $\mu_\alpha = \mu_n = (1/n)(\sum_{i=0}^{n-1} \delta(i))$ (3 章参照) とする. $r(s)$ を s だけ shift する operator とする. $\{s_\beta\}$ を S の 任意の subnet とし, μ を $\{r(s_\beta)^*\mu_\alpha\}_{(\alpha,\beta)}$ の cluster point, $\{(\alpha',\beta')\}$ を $\{(\alpha,\beta)\}$ の subnet で $\{r(s_{\beta'})^*\mu_{\alpha'}\} \xrightarrow{w^*} \mu$ となるものとする. すると μ は invariant mean となり, $T(r(s_{\beta'})^*\mu_{\alpha'})x$ は $T(\mu)x$ に弱収束する. $T(\mu)$ が unique なので, $T(r(s_\beta)^*\mu_\alpha)x$ は $T(\mu)x$ へ弱収束する. $\{s_\beta\}$ は S の任意の net なので, これは $T(r(s)^*\mu_\alpha)x$ が $s \in S$ に関して一様に $T(\mu)x$ へ 弱収束することがわかる (ここで, 例えば T を nonexpansive とし, $T(n)x = T^n x$ とすると, $T(\mu_n)x = (1/n)(\sum_{i=0}^{n} T^i x)$ となり, 定理 A が得られる).

この ergodic retraction の存在は Hilbert 空間において, 非可換である amenable semigroup に対して Takahashi [40] によって証明され, uniformly convex な Banach 空間において 可換な semigroup に対して Hirano, Kido and Takahashi [16] によって証明された.

我々は Banach 空間において 非可換な semigroup に対しての ergodic retraction に関する定理を得たので 2 節で報告する. 3 節では, nonexpansive semigroup 上の almost orbit を拡張した almost nonexpansive curve のエルゴート定理を, 4 節では 可換な semigroup 上の強エルゴート定理について報告する.

2. Asymptotically Invariant Net と 不動点集合

S は 次が成り立つとき, semitopological semigroup という: Hausdorff topology をもった semigroup で, $\forall t \in S$ に対して, S から S への写像 $s \mapsto st$, $s \mapsto ts$ が連続.

E を 実 Banach 空間, $C_b(S,E)$ を S から E への 有界連続写像 からなる sup norm による Banach 空間とおく. $\mu \in C_b(S)^*$ が $C_b(S)$ 上

の mean であるとは, $\|\mu\|=\mu(1)=1$ のときをいう. これは又, $\forall f\in C_b(S)$, $\underline{\lim} f(s)\leq\mu(f)\leq\overline{\lim}_{s\in S}f(s)$ と同値である. この μ に対して, vector valued mean $\tau(\mu)$ を定義する. すなわち

$$\tau(\mu)\in L(C_b(S),E)$$

で, $\|\tau(\mu)\|=1$, $\tau(\mu)x=x$, $x\in E$ となるものである. ここで, Banach 空間 E,F に対して $L(E,F)$ は E から F への有界線形写像からなる Banach 空間である. S を位相空間, $C_C(S,E):=\{f\in C_b(S,E);\ f(S)$ が 相対弱 compact $\}$ とおく.

定義 ([13, 40, 23, 17]) $f\in C_C(S,E)$, $\mu\in C_b(S)^*$ に対して $x^{**}_{\mu,f}$: $x^*\mapsto\mu_s\langle f(s),x^*\rangle$ $(\in E^{**})$ とおくと $x^{**}_{\mu,f}\in E$. $\tau=\tau^E\in L(C_b(S)^*,L(C_C(S,E),E))$ を$\tau(\mu)f=x^{**}_{\mu,f}$ で定義する. これは well defined であることがわかる. 次が成り立つ.

命題 ([23])

(i) $\|\tau(\mu)f\|\leq\|\mu\|\|f\|$,

(ii) $\tau(\mu)x=\mu(1)x$,

(iii) $\delta(s)\in C_b(S)^*$, $\delta(s)f=f(s)$, $f\in C_b(S),\varepsilon(s)\in L(C_C(S,E),E)$, $\varepsilon(s)g=g(s)$, $g\in C_C(S,E)$ とおくと, $\tau(\delta(s))=\varepsilon(s)$;

(iv) S : semitopological semigroup とすると, $\mu\in C_b(S)^*$, $s\in S$ に対して, $\tau(r(s)^*\mu)=r(s)^*\tau(\mu)$.

この性質を使うと, mean を使った計算が簡明になる.

S を semitopological simigroup とし, $\mathcal{S}=\{T(s);\ s\in S\}$ を C 上の nonexpansive semigroup とし, 共通不動点集合 $\mathrm{F}(\mathcal{S})$ が空でないとする. このとき, $T(\cdot)x\in C_C(S,E)$ である. $T(\mu)x:=\tau(\mu)(T(\cdot)x)$ とおく. すなわち, $\forall x^*\in E^*$ に対して,

$\langle T(\mu)x,x^*\rangle=\langle\tau(\mu)(T(\cdot)x),x^*\rangle=\mu_s\langle T(s)x,x^*\rangle$.

$$\begin{aligned}
l^1(S) &:= \{f:S\to\mathbf{R};\ \|f\|_1:=\sum_{s\in S}|f(s)|<\infty\},\\
l^\infty(S) &:= \{f:S\to\mathbf{R};\ \|f\|_\infty:=\sup_{s\in S}|f(s)|<\infty\}
\end{aligned}$$

とおく. すると $l^1(S)^*=l^\infty(S)$ である. $(l(s)f)(t)=f(st)$, $(r(s)f)(t)=f(ts)$ とおく.

E を uniformly convex Banach space, C を E の 非空な有界凸集合, $\mathcal{S}=\{T(s);\ s\in S\}$ を C 上の nonexpansive semigroup とする. 我々は次

の定理を得た.

定理 ([21])

(a) $C_b(S)$ が left invariant mean を持つと仮定すると, finite mean の net $\{\lambda_\alpha\}$ が存在し,

$\lim_\alpha \|T(l(t)^*\lambda_\alpha)x - T(l(ts)^*\lambda_\alpha)x\| = 0$ uniformly in $t \in S$ $(\forall s \in S, \forall x \in C)$.

(b) S : right reversible とすると, $\forall x \in C$, $\forall$ finite mean λ on $C_b(S)$ に対して,

$\lim_{t\in S} \|T(s)T(l(t)^*\lambda)x - T(l(st)^*\lambda)x\| = 0$ uniformly in $s \in S$. ここで, finite mean とは, $\mathrm{co}\{\delta(s);\ s \in S\}$ の元のことである.

(a) については, $\|T(l(t)^*\lambda_\alpha)x - T(l(ts)^*\lambda_\alpha)x\| \leq \|\lambda_\alpha - l(s)^*\lambda_\alpha\|$ なので, 可換のときは Day の定理 [12] より成り立つ. 非可換のときは Mackey topology $\tau(l^1(S), C_b(S))$ を考えることになる. このとき,

$$\{\langle T(t\cdot)x, x^*\rangle; t \in S, x^* \in B(E^*)\}$$

の absolutely covex hull が $\sigma(C_b(S), l^1(S))$- 相対 compact であることを証明することが必要になり, この Lemma は有用である.

(b) について: S を可換とし $\lambda = \sum_{i=1}^n a_i\delta(s_i)$: finite mean とする. このとき, Hirano, Kido and Takahashi [15] より,

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\in S} \|T(s)T(\lambda)T(t)x - T(\lambda)T(s)T(t)x\| \\
=\ &\lim_{t\in S} \left\|T(s)\sum_{i=1}^n a_iT(s_i)T(t)x - \sum_{i=1}^n a_iT(s_i)T(s)T(t)x\right\| \\
=\ &0, \qquad \text{uniformly in } s \in S.
\end{aligned}$$

すなわちこれは, $T(s)$ は十分時間が経った orbit 上では ほとんど affine であることを言っているが, (b) はこの noncommutative semigroup の version である.

これらを使って, 次の定理を証明できる.

定理 ([21]) Sを semitopological semigroup とし, E を uniformly convex Banach space, Cを 非空な 有界閉凸集合 な E の 部分集合 とし, $\mathcal{S} = \{T(s);\ s \in S\}$ を C 上の nonexpansive semigroup とする.

μ を $C_b(S)$ 上の mean とし, $\Lambda(S) := \{s \in S;\ st = ts,\ \forall t \in S\}$, S の algebraic center とする. 次が成り立つ.

(a) $T(\mu)$ は C 上 nonexpansive;

(b) $T(\mu)x \in \mathrm{F}(\mathcal{S})$ $(\forall x \in C)$ とすると, $T(\mu)$ は C 上 retraction である;

(c) S を right reversible な semigroup, μ をある right invariant mean とする. このとき,

(i) $T(\mu)T(s) = T(\mu),\ \forall s \in S$;

(ii) $T(s)T(\mu) = T(\mu),\ \forall s \in \Lambda(S)$;

(iii) $T(\mu)x \in \bigcap_{s\in S} \mathrm{cl\,co}\{T(t)x;\ t \geq s\},\ \forall x \in C$.

これは Hirano, Kido and Takahashi [16] を拡張している.

(注意) [18] では次を証明している: S を right Eberlein-weakly almost periodic (すなわち $\{T(s)x;\ s \in S\}$ が $C_b(S, E)$ のなかで 相対弱 compact) を仮定すると, (b) $T(\mu)x \in \mathrm{F}(\mathcal{S})$ がいえる. よって, (c) (ii) が $\forall s \in S$ に対して言える.

3. 可換な semigroup 上での Almost Nonexpansive Curve

S を 可換な semigroup, H を Hilbert 空間 とする. $u : S \to H$ が almost nonexpansive curve (ANC) であるとは, $\varepsilon(\cdot,\cdot) : S \times S \to \mathbf{R}$ が存在して, $\forall s, t, h \in S$ に対して,

$$\|u(s+h) - u(t+h)\|^2 \leq \|u(s) - u(t)\|^2 + \varepsilon(s,t)$$
$$\lim_{s,t\to\infty} \varepsilon(s,t) = 0.$$

ここで例を与えよう. 次のコーシー問題を考える:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + Au(t) \ni f(t),\ t > 0 \\ u(0) = x, \end{cases} \qquad (*)$$

A を H での maximal monotone operator, $f \in L^1(0,\infty\,;\,H)$, $x \in \mathrm{cl}\,D(A)$.

$(*)$ は, unique な integral solution $u(t)$ をもつ. この $u : \mathbf{R}^+ \to H$ は ANC となる.

ここで, $\varepsilon(s,t) = \displaystyle\int_s^\infty \|f(\theta)\|d\theta + \int_t^\infty \|f(\theta)\|d\theta$.

一般に ある nonexpansive semigroup の almost orbit は ANC となる.

$u : S \to H$ は "curve" なので, 不動点集合を定義できない. それに代わるものとして次の集合を定義する:

$$F_1(u) := \{x \in H;\ \|u(t) - x\| \leq \|u(s) - x\|,\ t \geq s\},$$
$$F(u) := \{x \in H;\ \exists \lim_{s \in S} \|u(s) - x\|\},$$

X を translation invariant な $l^\infty(S)$ の部分空間とし, constant を含むものとする. X上の invariant mean μ に対して,

$F_\mu(u) := \{x \in H;\ \|u(t) - x\|^2 \leq \|u(s) - x\|^2 + \mu_t \varepsilon(s,t),\ t, s \in S,\ t \geq s\}$.

一般に, $F_1 \subset F_\mu \subset F$が成り立つ.

nonexpansive semigroup $\mathcal{S} = \{T(s);\ s \in S\}$ に対して $\mathrm{F}(\mathcal{S}) \subset F_1(T(\cdot)x)$ である.

H を Hilbert 空間とし, C を H の 閉部分集合, $u : S \to C$, 有界, μ を X 上の submean ([30] 参照) とし, μ-asymptotic center を次で定義する:

$$\mu\text{-}AC(u, C) := \{x \in C\ ;\ \mu_s \|u(s) - x\|^2 = \inf_{y \in C} \mu_s \|u(s) - y\|^2\}.$$

$u = T(\cdot)x$ の時は不動点 の singleton となる. 我々は次の定理を得た.

定理 ([22]) $u : S \to H$ を almost nonexpansive curve とし, $\|u(\cdot) - y\|^2, \varepsilon(s, \cdot) \in X,\ y \in H,\ s \in S$, μ を invariant X 上の mean とし, $P : H \to F_\mu(u)$: metric projection とする. このとき, $Pu(s) \to u(\mu) \in \mu\text{-}AC(u, H)$. ここで, $u(\mu) = \tau(\mu)u$.

これは $S = \mathbf{Z}^+$, $\mathbf{R}^+$ のときでも ANC に対しては 新しい結果である. P を H から $F(u)$ への metric projection とするときには強収束しない例がある (Rouhani [34] 参照). 又次の定理を得た.

定理 ([22]) $u : S \to H$: almost nonexpansive curve, $\|u(\cdot) - y\|^2$, $\varepsilon(s, \cdot) \in X,\ y \in H,\ s \in S$, $\{\mu_\alpha\}$ を (a) X 上の asymptotically invariant な net, 又は, (b) strongly regular な net とする. このとき,

$$\begin{aligned} u(r(s)^* \mu_\alpha) \rightharpoonup u(\mu) &\in F(u) \cap \bigcap_{s \in S} \mathrm{cl\,co}\{u(t); t \geq s\} \\ &= \mu\text{-}AC(u, H) \text{ uniformly in } s \in S. \end{aligned}$$

ここで, net $\{\mu_\alpha\} \subset X^*$ が asymptotically invariant であるとは, 次のときをいう:

$$\mu_\alpha - r(s)^*\mu_\alpha \xrightarrow{w^*} 0 \quad (\forall s \in S).$$

又, net $\{\mu_\alpha\} \subset X^*$ が strongly regular であるとは, 次のときをいう:

1. $\sup_\alpha \|\mu_\alpha\| < \infty$;
2. $\lim_\alpha \mu_\alpha(1) = 1$;
3. $\lim_\alpha \|\mu_\alpha - r(s)^*\mu_\alpha\| = 0, \forall s \in S$.

ここで, strongly regular な net の例を挙げよう.

1. $\{\mu_n;\ n \in \mathbf{N}\}$, ここで, $\mu_n(f) = (1/n)\sum_{k=0}^{n-1} f(k)$ for $f \in C_b(\mathbf{Z}^+) = l^\infty(\mathbf{Z}^+)$;
2. $\{\mu_s;\ s \in (0,1)\}$, ここで, $\mu_s(f) = (1-s)\sum_{k=0}^{\infty} s^k f(k)$ for $f \in C_b(\mathbf{Z}^+) = l^\infty(\mathbf{Z}^+)$;
3. $\{\mu_n;\ n \in \mathbf{N}\}$, ここで, $\mu_n(f) = (1/n^2)\sum_{i,j=0}^{n-1} f(i,j)$ for $f \in C_b(\mathbf{Z}^+ \times \mathbf{Z}^+)) = l^\infty(\mathbf{Z}^+ \times \mathbf{Z}^+)$;
4. $\{\mu_s;\ s \in \mathbf{R}^+ \setminus \{0\}\}$, ここで, $\mu_s(f) = (1/s)\int_0^s f(t)\,dt$ for $f \in C_b(\mathbf{R}^+)$;
5. $\{\mu_s;\ s \in \mathbf{R}^+ \setminus \{0\}\}$, ここで, $\mu_s(f) = s\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$, $f \in C_b(\mathbf{R}^+)$;
6. $\{\mu_n;\ n \in \mathbf{Z}^+\}$, ここで, $\mu_n(f) = \sum_{m=0}^{\infty} q_{n,m} f(m)$, $f \in C_b(\mathbf{Z}^+) = l^\infty(\mathbf{Z}^+)$, そして, $\{q_{n,m}\}_{n,m\in\mathbf{Z}^+}$ は strongly regular matrix (Lorentz [27], Brézis and Browder [8]). $\{q_{n,m}\}_{n,m\in\mathbf{Z}^+}$ が strongly regular matrix であるとは, 次を満たすときを言う:
   (a) $\sup_{n\in\mathbf{Z}^+} \sum_{m=0}^{\infty} |q_{n,m}| < \infty$;
   (b) $\lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{\infty} q_{n,m} = 1$;

(c) $\lim_{n\to\infty}\sum_{m=0}^{\infty}|q_{n,m+1}-q_{n,m}|=0.$

7. $\{\mu_s;\ s\in\mathbf{R}^+\}$, ここで, $\mu_s(f)=\int_0^\infty Q(s,t)f(t)\,dt,\ f\in C_b(\mathbf{R}^+)$, $Q(\cdot,\cdot)$ は strongly regular kernel (Reich [32]). ここで, かんすう $Q:\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}$ が strongly regular kernel であるとは次を満たすときを言う:
   (a) $\sup_{s\in\mathbf{R}^+}\int_0^\infty|Q_(s,t)|\,dt<\infty;$

   (b) $\lim_{s\to\infty}\int_0^\infty Q(s,t)\,dt=1;$

   (c) $\lim_{s\to\infty}\int_0^\infty|Q(s,t+h)-Q(s,t)|\,dt=0$ for every $h\in\mathbf{R}^+$.

次の系を得る.

系 1 (Rouhani [34]) $\{x(n);n\in\mathbf{Z}^+\}$ を有界な H の中の almost nonexpansive sequence とする. このとき, $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}x(i+k)\to y\in\overline{\lim}\text{-AC}(x(\cdot),H)$ uniformly in $k\in\mathbf{Z}^+$.

系 2 (Rouhani [34]) $\{u(t);t\in\mathbf{R}^+\}$ を有界連続な H の中の almost nonexpansive curve とする. $\varepsilon(s,\cdot)$: continuous とする. このとき, $\frac{1}{s}\int_0^s u(t+h)dt\to y\in\overline{\lim}\text{-}AC(u(\cdot),H)$ uniformly in $h\in\mathbf{R}^+$

系 3 $C(\subset H)$: closed, convex, $T:C\to C$, nonexpansive , $\mathrm{Fix}(T)\neq\emptyset$ とする.

(i) (Baillon [1]) このとき, $\forall x\in C,\ \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}T^{i+k}x\to y\in\mathrm{Fix}(T)$ uniformly in $k\in\mathbf{Z}^+$.

(ii) (Rodé [33]) $\forall x\in C,\ (1-s)\sum_{i=0}^{\infty}s^kT^{i+k}x\to y\in\mathrm{Fix}(T)$ uniformly in $k\in\mathbf{Z}^+$.

(iii) (Brézis, Browder [8]) $\{q_{n,m}\}_{n,m\in\mathbf{Z}^+}$: strongly regular matrix とする. $\forall x\in C,\ \sum_{m=0}^{\infty}q_{n,m}T^{m+k}\to y\in$ $\mathrm{Fix}(T)$ uniformly in $k\in\mathbf{Z}^+$.

系 4 Hirano, Kido and Takahashi [16] H を Hilbert 空間, $C(\subset H)$: 閉凸, $T,S:C\to C$ nonexpansive で $TS=ST$, $\exists x_0\in C$, $\{S^iT^jx_0;\ i,j\in\mathbf{Z}^+\}$

は有界とする．このとき，

$$\forall x \in C, \quad \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=0}^{h-1} S^{i+k}T^{j+k} \to y \in \mathrm{Fix}(T)\cap \mathrm{F}(\mathcal{S}) \quad \text{uniformly in } h,k \in \mathbf{Z}^+.$$

系 5　$\mathcal{S} = \{T(s); s \in S\}$: nonexpansive semigroup on C とする．

(i) (Baillon [1], Miyadera and Kobayasi [29])　$u : \mathbf{R}^+ \to C$ を有界な $\mathcal{S}$ の almost orbit とする．このとき，

$$\frac{1}{s}\int_0^s u(t+h) \to y \in \mathrm{F}(\mathcal{S})(= A^{-1}(0)) \quad \text{uniformly in} h \in \mathbf{R}^+.$$

(ii) (Hirano, Kido and Takahashi [16])　上と同じ仮定．

$$s\int_0^\infty e^{-st}u(t+h)dt \to y \in \ \mathrm{Fix}(\mathcal{S}) \quad \text{uniformly in} \langle \in \mathbf{R}^+.$$

(iii) (Reich [32])　上と同じ仮定で，$Q(\cdot,\cdot)$ を strongly regular kernel とすると，

$$\int_0^s Q(s,t)u(t+h)dt \to y \in \mathcal{S} \quad \text{uniformly in} h \in \mathbf{R}^+.$$

4.　Asyptotically Isometric Semigroup

この章では，強平均収束定理について説明する．S を commutative semigroup, C を closed, convex な E の部分集合，$D \subset C$, $\mathcal{S} = \{T(s) : s \in S\}$ を C 上の nonexpansive semigroup とする．

定義　$\mathcal{S}$ が D 上 asymptotically isometric であるとは次が成り立つときをいう：

$\exists \lim_s \|T(s+h)x - T(s+k)y\|$ uniformly in $h, k \in S$.

$s \leq t$ のとき $t = t' + s$ とおくと，

$$\begin{aligned}\|T(t+h)x - T(t+k)y\| &= \|T(t'+s+h)x - T(t'+s+k)y\| \\ &\leq \|T(s+h)x - T(s+k)y\|\end{aligned}$$

ゆえ 極限 は一般に存在するが，h, k に関する 一様性を要求する．これは Bruck [9] ($S = \mathbf{N}$), Oka [31](S: commutative, totally ordered) の定義を拡張したものである．次に例を挙げる．

例 (i) $T(s)$: isomety,

(ii) $\exists\{s_\alpha\} \subset S$, $T(s_\alpha)x \to \exists y$,

(iii) E: Hilbert space で $T(s)$ が affine, 又は odd mapping のとき.

次の定理を得た.

定理 ([23]) E を uniformly convex な Banach 空間, C closed で convex な E の部分集合, $D \subset C$ で, ある C 上の nonexpansive semigroup $\mathcal{S} = \{T(s);\ s \in S\}$ が D 上 asymptotically isometric であるとする. このとき,

(a) 任意の $C_b(S)$ 上の invariant mean μ に対して, $T(\mu)$ は D から $\mathrm{F}(\mathcal{S})$ の上への nonexpansive retraction で, $T(\mu)T(s) = T(s)T(\mu) = T(\mu)$ $(\forall s \in S)$, $T(\mu)x \in \mathrm{cl\,co}\{T(t)x;\ t \in S\}$ $(\forall x \in C.)$ $\forall x \in D$, $\mathrm{F}(\mathcal{S}) \cap \bigcap_{s\in S}\{T(t)x;\ t \geq s\} = \{T(\mu)x\}$ となる. ここで $T(\mu)x = \tau(\mu)(T(\cdot)x)$.

(b) $\{\mu_\alpha\}$ を $C_b(S)$ 上の, strongly regular な net とすると, $T(r(h)^*\mu_\alpha)x \to y_0 = T(\mu)x = \tau(\mu)(T(\cdot)x) \in \mathrm{F}(\mathcal{S})$ uniformly in $h \in S$.

(注意) [20] では, S の Eberlein-weakly almost periodic の仮定のもとに, 上の定理を非可換の場合に拡張している.

5. Vector Valued Weakly Almost Periodic Functions

一方 Ruess and Summers (1988,1992) は全く違った方法で強平均収束定理 を証明した. これを説明しよう.

$f : \mathbf{R}^+ \to E$ が Eberlein-weakly almost periodic であるとは次のときをいう: $\{r(s)f;\ s \in \mathbf{R}^+\} \subset C_b(S, E)$ が 相対弱 compact. このとき $\frac{1}{t}\int_0^t f(s+h)ds \to z \in E$ uniformly in $h \in \mathbf{R}^+$. 特に E を uniformly convex Banach space, C を E の閉凸な部分集合, $x \in C$, nonexpansive semigroup $\mathcal{S} = \{T(s);\ s \in \mathbf{R}^+\}$ が asymptotically isometric on $\{x\}$ とする. このとき, $T(\cdot)x$ は Eberlein-weakly almost periodic となり, $\frac{1}{t}\int_0^t T(s+h)x\,ds \to z \in \mathrm{F}(\mathcal{S})$ uniformly in $h \in \mathbf{R}^+$.

我々は これを [17] で commutative semigroup に一般化し, ergodic projectin と ergodic retraction についての結果を得, 又ある Lipschitzian semigroup が Eberlein-weakly almost periodic であるための (必要) 十分条件を得た.

$W(S;E)$ を S から E への Eberlein-weakly almostperiodic 関数全体の集合とする．次がその Eberlein-weakly almost periodic function に対する強エルゴート定理である．

定理 ([17]) $U(s) = r(s)$ を $W(S;E)$ 上の translationoperator とし，$\tau = \tau^E$, $\tau' = \tau^{W(S,E)}$ (2 節参照) とする．このとき

(a) $C_b(S)$ 上の任意の invariantmean μ に対して，$U(\mu)f = \tau'(\mu)(U(\cdot)f) \in W(S;E)$; $f \in W(S;E)$ とおくと $(U(\cdot)f \in C_C(S, W(S;E))$ に注意), $U(\mu)$ は $W(S;E)$ から E の上への nonexpansive projection となり，$U(\mu)U(s) = U(s)U(\mu) = U(\mu)$, $(\forall s \in S), \{U(\mu)f\} = E \cap \mathrm{clco}\{U(s)f;\ s \in S\}$, $(\forall f \in W(S;E))$ となる;

(b) $U(\mu)f = \tau'(\mu)(U(\cdot)f) = \tau'(\mu)f$, $f \in W(S;E)$;

(c) $\{\mu_\alpha\}$ を $C(S)$ の strongly regular な net とすると $\forall f \in F := W(S;E) \cap RUC_b(S;E)$, $\tau(r(h)^*\mu_\alpha)f \to y = U(\mu)f \in E$ uniformly in $h \in S$. $\{U(\mu)f\} = E \cap \mathrm{clco}\{r(s)f;\ s \in S\}$. ここで $RUC_b(S;E)$ は S から E への一様有界連続関数からなる集合 i.e., $r(\cdot)f$ が連続である．

$V : C \to C$ に対して，$\|V\| := \sup\{\frac{\|Vx-Vy\|}{\|x-y\|}\}$ とおき，$\mathrm{Lip}(C) := \{V;\ \|V\| < \infty\}$ とおく．$T : S \to \mathrm{Lip}(C)$ を表現とする (すなわち $\{T(s); s \in S\}$ が Lipschitzian semigroup)

定義 $T : S \to \mathrm{Lip}(C)$ が D 上の asymptotically regular な representation であるとは，$\lim_{s\in S} \|T(s+t)x - T(s)x\| = 0; (\forall t \in S, \forall x \in D)$ のときを言う．

上の定理の系として次を得る．

系 E を Banach 空間，C を E の閉部分集合，D を C の部分集合，$U : S \to W(S;E)$ を translation のなす表現，$T : S \to \mathrm{Lip}(C)$ が Eberlein-weakly almost periodic かつ D 上の asymptotically regular な表現，$K := \sup_{s\in S} \|T(s)\| < \infty$, μ を $C(S)$ 上の invariant mean とする．このとき次が成り立つ:

(a) $T(\mu)$ は D から $\mathrm{Fix}(T)$ の上への Lipschitz な retraction で，$\|T(\mu)\| \leq K$, $T(\mu)T(s) = T(s)T(\mu) = T(\mu)$ $(\forall s \in S)$, $T(\mu)x \in cl\mathrm{co}\{T(s)x;\ s \in S\}$ $(\forall x \in D)$ となる;

(b) $\forall x \in D$ に対して，$T(t+s)x \to y = U(\mu)(T(\cdot)x) = T(\mu)x \in \mathrm{Fix}(T)$ uniformly in $t \in S$.

ここで $T(\cdot)x$ が いつ Eberlein-weakly almost periodic となるかが問題となる.

定義 $T: S \to \mathrm{Lip}(C)$ が $D \subset C$ 上 RS-表現 であるとは次のときを言う:

$\forall x \in D$, $\forall$ net $\{s_\alpha\} \subset S$ s.t. $T(s_\alpha)x \rightharpoonup y \in C \Rightarrow T(s)T(s_\alpha)x \rightharpoonup T(s)y$ $(\forall s \in S)$.

$S = (\mathbf{Z}^+)^k$ 又は $(\mathbf{R}^+)^k$とする. $I \subset \{1, 2, \ldots, k\}$ に対して, $S_I = (\mathbf{Z}^+)^I$ or $(\mathbf{R}^+)^I$とおき, 表現 T_I : $S_I \to \mathrm{Lip}(C)$ を $T_I(s^I)x = T((s^I, 0^J)), x$ $s^I \in S_I$, $J = \{1, 2, \cdots, k\} \setminus I$, $x \in C$ で定義する. ここで 0^J は S_J の zero element である.

$T: S \to \mathrm{Lip}(C)$ が C の部分集合 D 上 強 RS-表現であるとはすべての $I \subset \{1, 2, \ldots, k\}$ に対して, T_I が D 上 RS-表現 であるときをいう.

次の場合に T は 強 RS-表現である:

1. $x \in D$, $O(x) := \{T(s)x;\ s \in S\}$ が 相対 compact;
2. $\{T(s);\ s \in S\}$: affine mapping;
3. E を uniformly convex な Banach 空間 , C を E の閉凸部分集合とし, $T: S \to \mathrm{Cont}(C)$ を表現 (すなわち $\{T(s);\ s \in S\}$ が C 上 nonexpansive semigroup), T が D 上 asymptotically isometric.

定理 ([17]) $S = (\mathbf{Z}^+)^k$ or $(\mathbf{R}^+)^k$ とし, E を Banach 空間, C を E の閉部分集合, D を C の部分集合, $T: S \to \mathrm{Lip}(C)$ を D 上の 強 RS-表現で, $\sup_{s \in S} \|T(s)\| < \infty$ とする. このとき 次は同値:

(a) $T(\cdot)x$, $x \in D$ は Eberlein-weakly almost periodic である.

(b) $\{T(s)x;\ s \in S\}$ は 相対弱コンパクト.

上の仮定のもとで, orbit が 相対弱コンパクトならば Eberlein-weakly almost periodic となるわけである.

Ruess and Summers [39] では $S = \mathbf{R}^+$ で $T(\cdot)x$ が Eberlein-weakly almost periodic で RS-表現 のとき strong convergence theorem を証明している. 我々はこれを一般化している.

定理において, strongly regular な net の取り方によってたくさんの系が得られるが, そのうちの 1 つのみを挙げる.

系 E を uniformly convex な Banach 空間, C を E の 閉凸部分集合,

$V, W \in \mathrm{Cont}(C)$, $VW = WV$, $\mathrm{Fix}V \cap \mathrm{Fix}W \neq \emptyset$. $x \in C$, $\lim_{s_1, s_2 \to \infty} \|V^{s_1+h_1}W^{s_1+h_2}x - V^{s_1+k_1}W^{s_1+k_2}x\|$ が $h_1, h_2, k_1, k_2 \in \mathbf{Z}^+$ に関して一様に存在すると仮定する．このとき $f(s) = V^{s_1}W^{s_2}x$ for $s = (s_1, s_2) \in (\mathbf{Z}^+)^2$ とおくと $f : (\mathbf{Z}^+)^2 \to E$ は Eberlein-weakly almost periodic となり, $\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n-1} V^{i+h_1}W^{j+h_2}x \to y \in \mathrm{Fix}V \cap \mathrm{Fix}W$, 収束は $h_1, h_2 \in \mathbf{Z}^+$ に関して一様.

さらに $\lim_{s_1, s_2 - \infty} \|V^{s_1+t_1}W^{s_2+t_2}x - V^{s_1}W^{s_2}x\| = 0$ $(\forall t_1, t_2 \in \mathbf{Z}^+)$ とする．このとき $V^{s_1+t_1}W^{s_2+t_2}x \to y \in \mathrm{Fix}V \cap \mathrm{Fix}W$, 収束は $t_1, t_2 \in \mathbf{Z}^+$ に関して一様 $(s_1, s_2 \to \infty)$.

(証明) $T : (\mathbf{Z}^+)^2 \to \mathrm{Cont}(C)$ を $T((s_1, s_2))x = V^{s_1}W^{s_2}x$, $(s_1, s_2) \in (\mathbf{Z}^+)^2$, $x \in C$ で定義する．μ_n を strongly regular な net の例の (b)(iii) のものとする．すると,$T(r(h)^*\mu_n)x = (1/n^2)\sum_{i,j=1}^{n-1} V^{i+h_1}W^{j+h_2}x$, $h = (h_1, h_2) \in (\mathbf{Z}^+)^2$. 従って, 定理と系から得られる.

(注意) [19] では, 以上を semigroup の Eberlein-weakly almost periodic の仮定のもとに, 非可換な場合に拡張している.

参考文献

[1] J. B. Baillon, *Un théorème de type ergodique pour les contractions non linéaires dans un espace de Hilbert,* C. R. Acad. Sci. Paris Sér.A-B, 280 (1975), 1511-1514.

[2] J. B. Baillon, *Quelques propriétés de convergence asymptotique pour les semi-groups de contractions impaires,* C. R. Acad. Sci. Paris Sér.A-B, 283 (1976), 75-78.

[3] J. B. Baillon, *Quelques propriétés de convergence asymptotique pour les contractions impaires,* C. R. Acad. Sci. Paris Sér.A-B, 283 (1976), A587-A590.

[4] J. B. Baillon, *Comportment asymptotic des itérés de contractions non linéaires dans les espaces L^p,* C. R. Acad. Sci. Paris Sér.A-B, 286 (1978), A157-A159.

[5] J. B. Baillon and H. Brézis, *Une remarque sur le comportement asymptotique des semigroupes non lineaires,* Houston J. Math. 2 (1976), 5-7.

[6] V. Barbu, *Nonlinear semigroups and Differential Equations in Banach Spaces,* Editura Academiei R. S. R. Bucuresti, 1976.

[7] H. Brézis, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dan les espaces de Hilbert,* North Holland, Amsterdam, 1973.

[8] H. Brézis and F. E. Browder, *Nonlinear ergodic theorems,* Bull. Amer. Math. Soc. 82 (1976), 959-961.

[9] R E. Bruck, *On the almost-convergence of iterates of a nonexpansive mapping in Hilbert space and the structure of the weak ω-limit set,* Israel J. Math., 29 (1978), 1-16.

[10] R. E. Bruck, *On the convex approximation property and the asymptotic behavior of nonlinear contractions in Banach spaces,* Israel J. Math., 38 (1981), 304-314.

[11] R. E. Bruck, *Asymptotic behavior of nonexpansive mappings,* Contemporary Mathematics, 18 (1983), 1-47.

[12] M. M. Day, *Amenable semigroups*, Illinois J. Math., 1 (1957), 509-544.

[13] M. M Day *Fixed point theorem for compact convex sets*, Illinois J. Math., 5 (1961), 585-590.

[14] W. F. Eberlein, *Abstract ergodic theorems and weak almost periodic functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 667 (1949), 217-240.

[15] N. Hirano, K. Kido and W. Takahashi, *Asymptotic behavior of commutative semigroups of nonexpansive mappings in Banach spaces*, Nonlinear Analysis, 10 (1986), 229-249.

[16] N. Hirano, K. Kido and W. Takahashi, *Nonexpansive retractions and nonlinear ergodic theorems in Banach spaces*, Nonlinear Analysis, 12 (1988), 1269-1281.

[17] O. Kada, *Strong ergodic theorems for commutative semigroups of operators*, Proc. Amer. Math. Soc. (to appear).

[18] O. Kada, *Existence of ergodic retraction for noncommutative semigroups of weakly almost periodic operators*, preprint.

[19] O. Kada, *Ergodic theorems for noncommutative semigroups of operators*, preprint.

[20] O. Kada, *Strong ergodic theorems for noncommutative semigroups in Banach spaces*, preprint.

[21] O. Kada, A. Lau and W. Takahashi, *Asymptotically invariant net and fixed point set for semigroup of nonexpansive mappings*, Nonlinear Analysis (to appear).

[22] O. Kada and W. Takahashi, *Nonlinear ergodic theorems for almost nonexpansive curves over commutative semigroups*, Topological Methods in Nonlinear Analysis (to appear).

[23] O. Kada and W. Takahashi, *Strong convergence and nonlinear ergodic theorems for commutative semigroups of nonexpansive mappings*, Nonlinear Analysis (to appear).

[24] J. L. Kelly and I. Namioka, *Linear topological spaces*, Van Nostrand, 1963.

[25] K. Kido and W. Takahashi, *Mean ergodic theorems for semigroups of linear operators*, J. Math. Anal. Appl., 103 (1984), 387-394.

[26] A. T. Lau and W. Takahashi, *Invariant means and fixed point properties for nonexpansive representations of topological semigroups*, Topological Methods in Nonlinear Analysis (to appear).

[27] G. G. Lorentz, *A contribution to the theory of divergent series*, Acta Math. 80 (1948), 167-190.

[28] P. Milnes, *On vector-valued weakly almost periodic functions*, J. London Math. Soc., 22 (1980), 467-472.

[29] I. Miyadera and K. Kobayasi, *On the asymptotic behavior of almost-orbits of nonlinear contraction semigroups in Banach spaces*, Nonlinear Analysis, 6 (1982), 349-365.

[30] N. Mizoguchi and W. Takahashi, *On the existence of fixed points and ergodic retractions for Lipschitzian semigroups in Hilbert spaces*, Nonlinear Analysis, 14 (1990), 69-80.

[31] H. Oka, *On the strong ergodic theorems for commutative semigroups in Banach spaces*, Tokyo J. Math, 16 (1993), 385-398.

[32] S. Reich, *Almost convergence and nonlinear ergodic theorems,* J. Approximation Theory, 24 (1978), 269-272.

[33] G. Rodé, *An ergodic theorem for semigroups of nonexpansive mappings in a Hilbert space,* J. Math. Anal. Appl., 85 (1982), 172-178.

[34] B. D. Rouhani, *Asymptotic behavior of quasi-autonomous dissipative systems in Hilbert spaces,* J. Math. Anal. Appl. 147 (1990), 465-476.

[35] B. D. Rouhani, *Asymptotic behavior of almost nonexpansive sequences in a Hilbert space,* J. Math. Anal. Appl. 151 (1990), 226-235.

[36] W. M. Ruess and W. H. Summers, *Weak almost periodicity and the strong ergodic limit theorem for contraction semigroups,* Israel J. Math., 64 (1988), 139-157.

[37] W. M. Ruess and W. H. Summers, *Integration of asymptotically almost periodic functions and weak asymptotic almost periodicity,* Diss. Math. 279 (1989).

[38] W. M. Ruess and W. H. Summers, *Weakly almost periodic semigroups of operators,* Pacific J. Math., 143 (1990), 175-193.

[39] W. M. Ruess and W. H. Summers, *Ergodic theorems for semigroup of operators,* Proc. Amer. Math. Soc., 114 (1992), 423-432.

[40] W. Takahashi, *A nonlinear ergodic theorem for an amenable semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space,* Proc. Amer. Math. Soc., 81 (1981), 253-256.

[41] W. Takahashi, 非線形関数解析学, 近代科学社, 1988.