数理解析研究所講究録
940巻 1996年 97-100

複素領域の特性 CAUCHY 問題

千葉大 数学・情報数理 岡田靖則 (Y. OKADA)
東大 数理 山根英司 (H. YAMANE)

特性 Cauchy 問題に関する最近の我々の研究を紹介する。詳細は [O-Y] に書いたので, この論説では大まかな話を書く。

主定理は本当は座標不変に書けるのだが, ここでは座標に依存する形でしか書かない。J.Dunau の symbol class についても, きちんとした定義は述べず, 直感的な説明を与える。

その後の進展については [Y] に書いた。

§イントロダクション

まず有名な Cauchy-Kowalevski の定理から始めよう。

定理. *(Cauchy-Kowalevski)*
$P(x,D)=\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)D^\alpha$ を正則関数を係数とする微分作用素とする。$\varphi(x)$ を正則関数として, $S=\{\varphi(x)=0\}$ 上 $d\varphi\neq 0$ と仮定する。(Sは非特異な超曲面となる。) Sが P について非特性とすると, Sの近傍で定義された任意の正則関数 $v(x)$ に対し, 次の方程式を満たす正則関数 $u(x)$ が Sの近傍で一意に存在する。

$$\begin{cases} Pu=v \\ u \text{ は } S\text{上で } m \text{ 回消える（} m-1 \text{ 階までの全ての導関数が消える}, u\in\varphi^m\mathcal{O}\text{）} \end{cases}$$

非特性というのは主シンボル$\sigma(P)(x;\xi)$ に関し

$$\widetilde{P}:=\sigma(P)(x;d\varphi(x))|_S\neq 0$$

ということである。この条件をはずしたらどうなるか考えよう。

$\widetilde{P}$は S上の正則関数だから, そのゼロ点集合は空集合（$\Rightarrow$ 非特性）か S全体か, あるいは Sの余次元 1 の analytic set となる。S全体になる場合については Fuchsian equations の研究が有名である。以下, $\widetilde{P}$ のゼロ点集合が, S の非特異超曲面になる場合を考える。

まず次の例を挙げる。

$$\begin{cases} D_1D_2u(x)=1 \\ u \text{ は } S=\{x_1=x_2^2\} \text{ 上で 2 回消える（本当は } \{\sqrt{x_1}=x_2\} \text{ 上で。）} \end{cases}$$

$T:=\{x_1=x_2=0\}$ とおくと, $S\backslash T$は非特性。Tが特性点の集合である。原点の近傍ではもはや Cauchy-Kowalevski は当てはまらない。$S\backslash T$の近傍での一意解は簡

単に求められて $u(x) = x_2(x_1 - x_2^2) - \dfrac{2}{3}(x_1^{\frac{3}{2}} - x_2^3)$ となる。これは $K = \{x_1 = 0\}$ のまわりで分岐している。 data は regular だというのに, 解には singularity が現れるのである。

非特性のときは $\mathcal{O}$で話がうまくまとまったのだが, 特性 Cauchy 問題をうまく設定するには ramified functions を導入するのが良さそうである。

§諸結果

$K = \{x_1 = 0\}$, $S = \{x_1 - x_2^q = 0\}$ とおく。
関数のクラスを定義する。
$\mathcal{N}_{q,K} \ni f(x) = \sum_{j=0}^{q-1} f_j(x) x_1^{\frac{j}{q}}$, f_jは原点の近傍で正則。
$\mathcal{N}_{q,K}^{l} \ni f(x) \Leftrightarrow f \in \mathcal{N}_{q,K}$ かつ fは S上で l回消える。
次の形の微分作用素を考える。

$$P = P(x, D) = D_1^{m-r} P_1(x, x_1 D_1, D_2, D') + P_2(x, D), \quad D' = (D_3, \ldots, D_3)。$$

ここで $\mathrm{ord} P_1 = r$, $\mathrm{ord} P_2 \leq m$, P_2は D_1につき高々$m - r - 1$ 階, $\sigma(P_1)(0; 0, 1, 0') \neq 0$ とする。

Pを D_1^{m-r}で割った余りが P_2と言うことである。P_1 において, D_1は $x_1 D_1$の形で現れていることに注意しよう。

Gårding-Kotake-Leray '64.
$r = 1$ のとき原点の近傍で正則な任意の vに対し, $Pu = v$ を満たす $u \in \mathcal{N}_{q,K}^m$ が一意に存在する。

J.Dunau '90.
$1 \leq r \leq m$ のとき, 任意の $v \in \mathcal{N}_{q,K}$に対し $Pu = v$ を満たす $u \in \mathcal{N}_{q,K}^m$ が一意に存在する。

rについての仮定が弱まったのもさることながら, vの属するクラスが広がったことに注目する。一体どこまで広げられるのだろうか。我々は Dunau の方法を発展させることにより次の結果を得た。

岡田-山根 **'95.**
(A) $1 \leq r \leq m$ のとき

$$P : \mathcal{N}_{q,K}^m \xrightarrow{\sim} D_1^{m-r} \mathcal{N}_{q,K}^{m-r}。$$

(B) $1 \leq r \leq m - 1$ のとき

$$x_1^{-(q-1)/q} \mathcal{N}_{q,K} \subset D_1^{m-r} \mathcal{N}_{q,K}^{m-r} \quad (r = 1 \text{ のとき等号})$$
$$x_1^{-l/q} \notin D_1^{m-r} \mathcal{N}_{q,K}^{m-r} \text{ if } l \geq q。$$

§マイクロ微分作用素

表題のマイクロ微分作用素というのは, $\cup^m S_{1,0}^m$ クラスの擬微分作用素の複素解析版である。正確な定義は [K-K-K] などを見ていただくとして, ここでは直観的な説明

を与える。マイクロ微分作用素とは, 大体, 正則関数係数の微分作用素みたいなものだが, ただ, D_jの負べきを含んでいてもよい。また, マイクロ微分作用素は generic な条件下で可逆である。例えば次のような計算が許される。

$$\begin{aligned}&\{(D_2 - x_1 D_1)D_1 + D_3\}^{-1}\\ =&\{(1 - x_1 D_1 D_2^{-1} + D_3 D_1^{-1} D_2^{-1})D_1 D_2\}^{-1}\\ =&D_1^{-1} D_2^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} (x_1 D_1 D_2^{-1} - D_3 D_1^{-1} D_2^{-1})^j\end{aligned}$$

Dunau は, 作用素のクラス $\mathcal{E}_K$ を定義した。$Q(x, D)$ が $\mathcal{E}_K$に属するとは, 大まかに言って, Q はマイクロ微分作用素で, Q を $D_1, D_2, \ldots, D_n$ について展開したときの各項で D_kの負べきは $D_1^{-j} (j \geq 1)$ と $D_2^{-j} (j \geq 1)$ のみ, D_1の正べきは $x_1^j D_1^j (j \geq 0)$ の形で現れる, ということである。

§$\mathcal{E}_K$の $\mathcal{N}_{q,K}$ への作用

まず

$$x_1^j D_1^j : \mathcal{N}_{q,K} \to \mathcal{N}_{q,K}。$$

ここで

$$D_1 : \mathcal{N}_{q,K} \ni x_1^{1/q} \mapsto \frac{1}{q} x_1^{\frac{1}{q}-1} \notin \mathcal{N}_{q,K}$$

に注意しよう。

次に

$$D_j \, (j \geq 2) : \mathcal{N}_{q,K} \to \mathcal{N}_{q,K}。$$

あとは

$$D_1^{-1}, D_2^{-1} : \mathcal{N}_{q,K}^l \to \mathcal{N}_{q,K}^{l+1}$$

を定義したい。

命題. 任意の $f \in \mathcal{N}_{q,K}^l$に対し $D_2 g = f$ を満たす $g \in \mathcal{N}_{q,K}^{l+1}$ が一意に存在する。

証明. singular な座標変換 $z = x_1^{1/q}$ により

$$\mathcal{N}_{q,K} \simeq \mathcal{O}_{(z,x_2,x')=0}, \ x' = (x_3, \ldots, x_n)$$

が誘導される。f, gの像を$\tilde{f}, \tilde{g}$ とおく。$D_2 g = f$は $D_2 \tilde{g} = \tilde{f}$ となる。fが S上 l回消えるということは$\tilde{f}$ が$\tilde{S} = \{z = x_1\}$ 上 l回消えるということである。$\tilde{S}$は D_2について非特性になっているから, $\tilde{S}$上 $l+1$ 回消える$\tilde{g}$が一意に存在する。 □

この命題により

$$D_2^{-1} : \mathcal{N}_{q,K}^l \to \mathcal{N}_{q,K}^{l+1}, \quad g \mapsto f$$

が定義される。

$$D_1^{-1} : \mathcal{N}_{q,K}^l \to \mathcal{N}_{q,K}^{l+1}$$

も同様。

上記の singular な座標変換 $z = x_1^{1/q}$ は重要である。ramified functions は 1 価正則になるし, Sが D_2 に関して特性的だったのに, $\tilde{S}$は非特性になって, すごくきれいな話になるのである。我々の特性 Cauchy 問題が, $\mathcal{O}$では話がまとまらず, $\mathcal{N}_{q,K}$ ならうまくいくということの根拠はここにある。

命題. $Q \in \mathcal{E}_K$, $-m$ 階（$m \geq 0$）で, $v \in \mathcal{N}_{q,K}$ のとき, $Qv \in \mathcal{N}_{q,K}^m$ が *well-defined* である。

証明. 上記の準備のもとで形式和としては定まる。収束の証明は [D]。

§主定理の証明

(A) の全射性を示そう。（他は易しい。）$w \in \mathcal{N}_{q,K}^{m-r}$ のとき $Pu = D_1^{m-r}w$ を解きたい。 $P = D_1^{m-r}\tilde{P}$ と書くとき $\tilde{P}^{-1} \in \mathcal{E}_K$ で$\tilde{P}^{-1}$ は$-r$階である事が判る。$u = \tilde{P}^{-1}w \in \mathcal{N}_{q,K}^m$ とおく。そうすれば

$$Pu = D_1^{m-r}\tilde{P}(\tilde{P}^{-1}w) = D_1^{m-r}w$$

となる。(B) の証明は省略する。

References

[D] J.Dunau, *Un Problème de Cauchy Caractéristique*, J. Math. pures et appl. **69** (1990), 369-402.

[G-K-L] L. Gårding, T.Kotake and J.Leray, *Problème de Cauchy, I bis et VI*, Bull. Soc. Math. de France **92** (1964), 263–361.

[H] Y.Hamada, *Les singularités des solutions du problème de Cauchy à données holomorphes*, in Recent developments in hyperbolic equations (Pisa, 1987), Longman, 1988, pp. 82–95.

[K-K-K] M.Kashiwara, T.Kawai and T.Kimura, *Foundation of Algebraic Analysis*, Kinokuniya, 1980 (in Japanese) ; English translation from Princeton, 1986.

[L] J.Leray, *Uniformisation de la solution du problème linéaire analytique de Cauchy près de la variété qui porte les données de Cauchy*, Bull. Soc. math. France **85** (1957), 389-429.

[N-S] G.Nakamura, T.Sasai, *The singularities of the solutions of the Cauchy problem for second order equations in case the initial manifold includes characteristic points*, Tôhoku Math. Journ. **28** (1976), 523-539.

[O-Y] Y.Okada, H.Yamane, *A characteristic Cauchy problem in the complex domain*, to appear in J. Math. pures et appl..

[Y] H.Yamane, *The essential singularity of the solution of a ramified characteristic Cauchy problem*, to appear.