数理解析研究所講究録
942巻 1996年 29-52

ホップ代数のコサイクル変形

福井大学教育学部 土井 幸雄 (Yukio Doi)
筑波大学 数学系 竹内 光弘 (Mitsuhiro Takeuchi)

A を可換環 k 上の双代数とする。σ が A 上の 2-コサイクルなら，$x \cdot y = \Sigma \sigma(x_1, y_1) x_2 y_2 \sigma^{-1}(x_3, y_3)$ により A に新しい積が定義できる。コサイクル条件から積が結合的になり，A の余代数構造とあわせて新しい双代数 A^σ が誕生する。これを A のコサイクル変形と呼ぶ。ホップ代数(すなわち antipode をもつ双代数)のコサイクル変形はホップ代数になる。量子群で重要な役割を果たす Drinfeld の量子対(quantum double) D(H) は，$H^{*cop} \otimes H$ のコサイクル変形である。これは，コサイクル変形の考え方が量子群論に様々な応用をもつであろう事を暗示する。ここでは，コサイクル変形の一般論といくつかの重要な具体例の計算について，とくに量子群論への応用を念頭において，なるべく予備知識を仮定せずに解説したい。

内容:

§1 2-コサイクルとは何か

A を可換環 k 上の双代数(bialgebra)とする。すなわち A は k-代数かつ k-余代数で，余積 Δ: A → A⊗A と余単位射 ε: A → k がともに代数射となる。x ∈ A の余積を表すのに，次のような Σ-notation を用いる:

$$\Delta(x) = \Sigma x_1 \otimes x_2,\quad (1\otimes\Delta)\Delta(x) = (\Delta\otimes 1)\Delta(x) = \Sigma x_1 \otimes x_2 \otimes x_3,\ \cdots$$

この記法を含め，双代数とホップ代数の一般論については，Sweedler[Sw]，阿部[A]，Montgomery[Mo]，竹内[T5]などを見るとよい。

[定義] A 上の可逆な２次形式 $\sigma: A \times A \to k$ が次の条件をみたすとき，2-コサイクルという：

(1) $\sum \sigma(x_1, y_1)\sigma(x_2y_2, z) = \sum \sigma(y_1, z_1)\sigma(x, y_2z_2)$,

(2) $\sigma(x, 1) = \varepsilon(x) = \sigma(1, x) \quad \forall x, y, z \in A$.

ここで σ が可逆とは，σ を $A \otimes A$ の双対代数 $(A \otimes A)^* = \mathrm{Hom}(A \otimes A, k)$ の元とみて可逆ということで，$\exists \sigma^{-1}: A \times A \to k$ s.t.

$$\sum \sigma(x_1, y_1)\sigma^{-1}(x_2, y_2) = \varepsilon(x)\varepsilon(y) = \sum \sigma^{-1}(x_1, y_1)\sigma(x_2, y_2), \ \forall x, y \in A.$$

[注意] $A = kG$ (群環)の場合，$\Delta(x) = x \otimes x$，$\varepsilon(x) = 1$ $(x \in G)$ だから，可逆な２次形式 $\sigma: A \times A \to k$ は写像 $\sigma: G \times G \to U(k)$ を引き起す，ただし $U(k)$ は k の単元全体を表す。コサイクル条件は

$$\sigma(x, y)\sigma(xy, z) = \sigma(y, z)\sigma(x, yz), \ \sigma(1, x) = 1 = \sigma(x, 1), \ (x, y, z \in G)$$

となり，おなじみの群の 2-コサイクルが得られる。

[定義] 双代数 A の 2-コサイクル全体を $Z^2(A, k)$ で表す。$\sigma \in Z^2(A, k)$ と可逆線形写像 $u: A \to k$ (ただし $u(1) = 1$)に対し，$\sigma_u: A \times A \to k$ を

$$\sigma_u(x, y) = \sum u(x_1)u(y_1)\sigma(x_2, y_2)u^{-1}(x_3y_3)$$

で定義すると $\sigma_u \in Z^2(A, k)$ となる，ここで $u^{-1}: A \to k$ は代数 A^* における u の逆元を表す。$\sigma \sim \sigma_u$ として，集合 $Z^2(A, k)$ に同値関係が入る。商集合 $Z^2(A, k)/\sim$ を $H^2(A, k)$ で表す(群ではない)。自明な 2-コサイクル

$$A \times A \to k, \ (x, y) \mapsto \varepsilon(x)\varepsilon(y)$$

を含む同値類を $B^2(A, k)$ で表し，その要素をコバウンダリと呼ぶ。

$$A \times A \to k, \ (x, y) \mapsto \sum u(x_1)u(y_1)u^{-1}(x_2y_2)$$

の形をしている。

[積の変更] $\sigma \in Z^2(A, k)$ を利用して A の積を変更する(３種類)。

$$x \circ y = \sum \sigma(x_1, y_1)x_2y_2, \quad x \circ' y = \sum x_1y_1\sigma^{-1}(x_2, y_2),$$

$x \bullet y = \Sigma \sigma(x_1, y_1) x_2 y_2 \sigma^{-1}(x_3, y_3)$ （右辺は A の従来の積を表す）

どの積も結合律をみたし，単位元は従来の単位元 1_A と一致する。例えば，

$$(x \circ y) \circ z = (\Sigma \sigma(x_1, y_1) x_2 y_2) \circ z = \Sigma \sigma(x_1, y_1) \sigma(x_2 y_2, z_1) x_3 y_3 z_2$$
$$= \Sigma \sigma(y_1, z_1) \sigma(x_1, y_2 z_2) x_2 y_3 z_3 = x \circ (\Sigma \sigma(y_1, z_1) y_2 z_2) = x \circ (y \circ z),$$
$$x \circ 1 = \Sigma \sigma(x_1, 1) x_2 = \Sigma \varepsilon(x_1) x_2 = x.$$

このようにして３種類の代数

$$_\sigma A = (A, \circ), \quad A_{\sigma^{-1}} = (A, \circ'), \quad A^\sigma = (A, \bullet)$$

が得られる。$_\sigma A$ と $A_{\sigma^{-1}}$ は片側変形，A^σ は両側変形と言ってよかろう。$A^\sigma = {_\sigma A_{\sigma^{-1}}}$ と表してもよい。$A = kG$ のとき，$_\sigma A$ はねじれ型群環 $k_\sigma G$ (twisted group algebra) になるが，A^σ は A と一致してしまう(もっと一般に，A が余可換なら $A^\sigma = A$)。A が余可換でない一般の双代数とすると，A^σ は新しい双代数になる(§3)。

[注意] 2-コサイクル σ に対する逆 σ^{-1}: $A \times A \to k$ は

$$\Sigma \sigma^{-1}(x_1 y_1, z) \sigma^{-1}(x_2, y_2) = \Sigma \sigma^{-1}(x, y_1 z_1) \sigma^{-1}(y_2, z_2)$$
$$\sigma^{-1}(x, 1) = \varepsilon(x) = \sigma^{-1}(1, x), \quad (\forall x, y, z \in A)$$

をみたすので $\sigma^{-1} \in Z^2(A^{cop}, k)$ となる。ただし A^{cop} は双代数 A の余積だけを twist させてできる双代数を表す($\Delta^{cop}(x) = \Sigma x_2 \otimes x_1$)。よって $_{\sigma^{-1}}(A^{cop})$, $(A^{cop})_\sigma$, $(A^{cop})^{\sigma^{-1}}$ が定義されるが，それぞれ $A_{\sigma^{-1}}$, $_\sigma A$, A^σ と一致する。

§2 片側変形 $_\sigma A$ の性質

この節では，片側変形 $_\sigma A$ が A 上の余加群代数の構造をもつことを示す([Mo, §7.5] 参照)。余加群とは加群の双対概念である([Sw], [Mo]参照)。

A を k 上の双代数とする。k-代数 B がさらに右 A-余加群(A-comodule)であってその構造射

$$\rho: B \to B \otimes A, \quad (\rho(b) = \Sigma b_0 \otimes b_1 \text{ で表す})$$

が代数射になるとき，B は右 A-余加群代数(A-comodule algebra) であるという。$B^{coA} := \{b \in B \mid \rho(b) = b \otimes 1\}$ は B の部分代数になる。これを余作用 ρ に関する不変環(coinvariants)という。

$\sigma \in Z^2(A,k)$ とすると，$x \mapsto \Delta(x) = \Sigma x_1 \otimes x_2$ は ${}_\sigma A$ から ${}_\sigma A \otimes A$ への代数射になる。これは ${}_\sigma A$ の積の定義から直ちに従う。よって ${}_\sigma A$ は右 A-余加群代数。しかも $({}_\sigma A)^{\mathrm{co}A} = A^{\mathrm{co}A} = k$ となる。${}_\sigma A$ のタイプの右 A-余加群代数は次のように特徴づけられる。

<u>定理 1</u>　A をホップ代数とし，その antipode を $S: A \to A$ で表す。

(a) σ，$\sigma' \in Z^2(A,k)$ に対し，

$$\sigma \sim \sigma' \Leftrightarrow {}_\sigma A \cong {}_{\sigma'} A \text{ (A-余加群代数として)}$$

(b)　$\mathrm{id}: A \to {}_\sigma A$ は右 A-余加群同形射で，convolution 積に関して逆元をもつ:

$$\mathrm{id}^{-1}(x) = \Sigma S(x_1)\sigma^{-1}(S(x_2), x_3)$$

(c) 逆に B を右 A-余加群代数で $k \subset B$ とする。もし convolution 積に関して可逆な右 A-余加群同形射 $\phi: A \to B$ で $\phi(1_A) = 1_B$ なるものが存在するとき，

$$\sigma(x,y) := \Sigma \phi(x_1)\phi(y_1)\phi^{-1}(x_2 y_2)$$

は k に値をもち，A の 2-cocycle となる。その上 ϕ は ${}_\sigma A$ から B への代数同形射を引き起す。

（注意: A が双代数の場合にも ${}_\sigma A$ を特徴づけることはできるが少々こみいる。ただし §6 でその場合を用いる。）

証明 (a) $\sigma \sim \sigma'$ とすると $\sigma' = \sigma_u$ なる $u: A \to k$ がある。写像 $f: {}_{\sigma'}A \to {}_\sigma A$ を $f(x) = \Sigma u(x_1)x_2$ で定義すると，f が代数射かつ A-余加群射になる。しかも f は全単射で，逆写像は ${}_\sigma A \ni y \mapsto \Sigma u^{-1}(y_1)y_2 \in {}_{\sigma'}A$ で与えられる。

逆に $f: {}_{\sigma'}A \cong {}_\sigma A$ を代数同形射でかつ A-余加群射とする。$u: A \to k$ を $u(x) = \varepsilon(f(x))$ で定義すると，u は可逆で $u^{-1}(x) = u(S(x))$ となる。また

$$f(x) = \Sigma \varepsilon(f(x)_1)f(x)_2 = \Sigma \varepsilon(f(x_1))x_2 = \Sigma u(x_1)x_2$$

かつ $f(x \circ y) = f(x) \circ f(y)$ から

$$\Sigma \sigma'(x_1, y_1)u(x_2 y_2)x_3 y_3 = \Sigma u(x_1)u(y_1)\sigma(x_2, y_2)x_3 y_3$$

がでる。両辺に ε をほどこすと

$$\Sigma \sigma'(x_1, y_1)u(x_2 y_2) = \Sigma u(x_1)u(y_1)\sigma(x_2, y_2)$$

となり，これは $\sigma \sim \sigma'$ を意味する。

(b) ${}_\sigma A$ において次の２つの等式を示せばよい:

$$\sum S(x_1)\sigma^{-1}(S(x_2),x_3)\circ x_4 = \varepsilon(x)1,\quad \sum x_1\circ S(x_2)\sigma^{-1}(S(x_3),x_4)$$

最初は S の反余代数射性を使ってすぐ示せるが，二式はやや複雑。途中で次の等式

$$\sum \sigma(x_1,S(x_2))\sigma^{-1}(S(x_3),x_4) = \varepsilon(x)$$

を用いる。これは次のようにして示される：

左辺 $= \sum\sigma(x_1,S(x_4))\sigma(x_2S(x_3),x_7)\sigma^{-1}(S(x_5),x_6)$

$= \sum\sigma(S(x_3),x_6)\sigma(x_1,S(x_2)x_7)\sigma^{-1}(S(x_4),x_5)$（前二項に cocycle 条件適用）

$= \sum\sigma(x_1,S(x_2)x_3)$（１項と３項で打消しあう）$= \sigma(x,1) =$ 右辺。

(c) $A^{coA} = k$ かつ A-余加群として $A \cong B$ だから $B^{coA} = k$ である。よって $\rho(\sigma(x,y)) = \sigma(x,y)\otimes 1$ を示せば $\sigma(x,y) \in k$ がわかる。この計算には

$$\rho(\phi(x)) = \sum\phi(x_1)\otimes x_2,\quad \rho(\phi^{-1}(x)) = \sum\phi^{-1}(x_2)\otimes S(x_1),\quad x\in A$$

なる性質が使われる。$\sigma \in Z^2(A,k)$ および最後の主張はストレートに計算していけばよい。□

[注意] 一般に，A をホップ代数，B を右 A-余加群代数で $C = B^{coA}$ のとき，$C\subset B$ は A-<u>拡大</u>という。もし convolution 可逆な A-余加群射(同形射でない) $\phi: A \to B$ が存在するとき，$C\subset B$ は A-<u>クレフト拡大</u>であるという。このような ϕ は一つではなく，$\phi(1_A) = 1_B$ をみたすように選べる。このとき B は左 C-加群かつ右 A-余加群として $C\otimes A$ に同形となる：

$$C\otimes A \cong B,\quad c\otimes a \mapsto c\phi(a),\quad \sum b_0\phi^{-1}(b_1)\otimes b_2 \leftarrow b.$$

よって $C = k$ なら ϕ は全単射になる。逆に ϕ が全単射なら

$$C = B^{coA} \cong A^{coA} = k$$

となり，上の定理 1 (c) の仮定は，$k\subset B$ が A-クレフト拡大ということ。もっと一般にすべての C の A-クレフト拡大は 2-コサイクルを用いた接合積により記述できる([DT1], [Mo, §7])。

[例] Sweedler は次の４次元ホップ代数 H_4 を導入した。生成元 X, Y と関係式 $X^2 = 1,\ Y^2 = 0,\ XY + YX = 0$ で定義される k-代数を H_4 で表す。これを

$$H_4 = k\langle X,Y \mid X^2 = 1,\ Y^2 = 0,\ XY + YX = 0\rangle$$

と表現する。k 上４次元で基底 1, X, Y, XY をもち，次のホップ代数構造が入る。

$$\Delta(X) = X\otimes X,\qquad \Delta(Y) = 1\otimes Y + Y\otimes X$$

$$\varepsilon(X) = 1, \quad \varepsilon(Y) = 0, \quad S(X) = X, \quad S(Y) = XY.$$

H_4 は $(2 \neq 0$ なら$)$非可換かつ非余可換な最小次元のホップ代数である。k の H_4-クレフト拡大は次のように記述される。

α, β, $\gamma \in k$ とする，ただし α は単元。四元数代数 $(\alpha, \beta, \gamma)_k$ を

$$(\alpha, \beta, \gamma)_k = k\langle x, y \mid x^2 = \alpha,\ y^2 = \beta,\ xy + yx = \gamma\rangle$$

で定義する。これも k 上４次元で基底 1, x, y, xy をもつ。$(1,0,0)_k = H_4$ に注意。この代数は，

$$\rho:\ {}_\sigma A \to {}_\sigma A \otimes A, \quad \rho(x) = x \otimes X, \quad \rho(y) = 1 \otimes Y + y \otimes X$$

によって右 H_4-余加群代数になる。$[\rho(1) = 1,\ \rho(xy) = x \otimes XY + xy \otimes 1]$

写像 ϕ: $H_4 \to (\alpha, \beta, \gamma)_k$ を

$$1 \mapsto 1, \quad X \mapsto x, \quad Y \mapsto y, \quad XY \mapsto xy$$

で定義すると，明らかに ϕ は H_4-余加群同形射。しかも convolution 可逆で，

$$\phi^{-1}: H_4 \to (\alpha, \beta, \gamma)_k, \quad 1 \mapsto 1, \quad X \mapsto \alpha^{-1}x, \quad Y \mapsto -\alpha^{-1}yx, \quad XY \mapsto -y.$$

従って $(\alpha, \beta, \gamma)_k$ は k の H_4-クレフト拡大になる。この ϕ に対応する 2-コサイクル(定理 1(c)参照)は次の通り。

$\sigma_{\alpha\beta\gamma}$	1	X	Y	XY
1	1	1	0	0
X	1	α	0	0
Y	0	γ	β	$-\beta$
XY	0	γ	β	$-\alpha\beta$

具体的な計算については，[D3]または[DT3]を参照。さらに次がなりたつ。

<u>定理 2</u> [DT3]　k の H_4-クレフト拡大は上の $(\alpha, \beta, \gamma)_k$ に限る。とくに H_4 の任意の 2-コサイクルはある $\sigma_{\alpha\beta\gamma}$ にコホモロガスとなり，さらに次が成り立つ。

a) $(\alpha, \beta, \gamma)_k \cong (\alpha', \beta', \gamma')_k \Leftrightarrow \exists s \in U(k),\ \exists t \in k$ such that

$$\alpha' = s^2\alpha, \quad \beta' = \beta + t\gamma + t^2\alpha, \quad \gamma' = s\gamma + 2st\alpha$$

b) $2^{-1} \in k$ なら，$(\alpha, \beta, \gamma)_k \cong (\alpha,\ \beta - \gamma^2(4\alpha)^{-1},\ 0)_k$

c) $(\alpha, \beta, 0)_k \cong (\alpha', \beta', 0)_k \Leftrightarrow \alpha'\alpha^{-1} \in k^2$ かつ $\beta = \beta'$.

§3 コサイクル変形 A^σ

双代数 A の(両側)コサイクル変形 A^σ は土井[D2]で導入された。その一般的性質をまとめておこう。

<u>定理 3</u> A は双代数で，$\sigma \in Z^2(A,k)$ とする。

1) [D2] A^σ は A の余代数構造をそのまま利用して双代数になる。A がホップ代数なら A^σ もホップ代数で，antipode は次で与えられる：

$$S^\sigma(x) = \Sigma\, \sigma(x_1, S(x_2))S(x_3)\sigma^{-1}(S(x_4), x_5)$$

2) $\sigma^{-1} \in Z^2(A^\sigma, k)$ であり，${}_{\sigma^{-1}}(A^\sigma) = A_{\sigma^{-1}}$，$(A^\sigma)_\sigma = {}_\sigma A$，$(A^\sigma)^{\sigma^{-1}} = A$ となる。

3) λ: ${}_\sigma A \to A^\sigma \otimes {}_\sigma A$，$\lambda(x) = \Delta(x) = \Sigma\, x_1 \otimes x_2$ は代数射かつ ${}_\sigma A$ の左 A^σ-余加群構造を与える。そして ${}_\sigma A$ は (A^σ, A) 上の(両側)余加群代数になる。

2)，3) は定義から容易に示される。

[例] 前述の $\sigma = \sigma_{\alpha\beta\gamma}$ に対する $H_4{}^\sigma$ を求めてみよう。直接計算してもでるが，ここでは上の 3) を利用して求めてみる。${}_\sigma H_4 = (\alpha, \beta, \gamma)_k$ の左 $H_4{}^\sigma$-余加群構造

$$\lambda: (\alpha,\beta,\gamma)_k \to H_4{}^\sigma \otimes (\alpha,\beta,\gamma)_k,\quad \lambda(x) = X \otimes x,\quad \lambda(y) = 1 \otimes y + Y \otimes x$$

が代数射という条件から $H_4{}^\sigma$ の乗法を決めていく。

$\alpha(1\otimes 1) = \lambda(x^2) = \lambda(x)^2 = X^2 \otimes x^2 = X^2 \otimes \alpha$ より，$H_4{}^\sigma$ において $\underline{X^2 = 1}$，

$\beta(1\otimes 1) = \lambda(y^2) = \lambda(y)^2 = 1\otimes y^2 + Y^2 \otimes x^2 + Y \otimes (xy+yx)$

$= 1\otimes\beta + Y^2\otimes\alpha + Y\otimes\gamma$ より $\underline{Y^2 = -\alpha^{-1}\gamma Y}$，また

$\gamma(1\otimes 1) = \lambda(xy + yx) = \lambda(x)\lambda(y) + \lambda(y)\lambda(x)$

$= (X\otimes x)(1\otimes y + Y\otimes x) + (1\otimes y + Y\otimes x)(X\otimes x)$

$= X\otimes(xy + yx) + (X\cdot Y + Y\cdot X)\otimes x^2 = X\otimes\gamma + (X\cdot Y + Y\cdot X)\otimes\alpha$ より，

$\underline{X\cdot Y + Y\cdot X = -\alpha^{-1}\gamma(X - 1)}$ でなければならない。

そこで $c = -\alpha^{-1}\gamma$ として

$$H_{(c)} := k\langle X, Y \mid X^2 = 1,\ Y^2 = cY,\ XY + YX = c(X - 1)\rangle$$

なる代数を作る。$H_{(c)}$ は

$$\Delta(X) = X\otimes X,\quad \Delta(Y) = 1\otimes Y + Y\otimes X$$

によりホップ代数となり，1，X，Y，XY はその基底になる。$c = -\alpha^{-1}\gamma$ のとき，$H_{(c)}$ は H_4 の $\sigma = \sigma_{\alpha\beta\gamma}$ によるコサイクル変形 $H_4{}^\sigma$ に一致する。もし $2^{-1} \in k$ なら，写像

$$H_{(c)} \to H_4, \quad X \mapsto X, \quad Y \mapsto Y + 2^{-1}c(1 - X)$$

はホップ代数同形となり，H_4 のコサイクル変形で新しいホップ代数は生じない。

[量子対]　k を体，H を有限次元ホップ代数とする。$A = H^{*cop} \otimes H$ とするとき，

$$\sigma : A \times A \to k, \quad \sigma(p \otimes x, q \otimes y) = \langle p, 1\rangle\langle q, x\rangle\langle \varepsilon, y\rangle$$

が A の 2-コサイクルになることが容易に確かめられる($p, q \in H^{*cop}$, $x, y \in H$)。このコサイクル変形 A^σ を $H^{*cop} \bowtie H$ で表す。これは H^{*cop}，H を部分ホップ代数にもち，積の定義から

$$(p \otimes 1) \cdot (1 \otimes x) = p \otimes x,$$

$$(1 \otimes x) \cdot (p \otimes 1) = \Sigma\, \sigma(1 \otimes x_1, p_3 \otimes 1)(p_2 \otimes x_2)\sigma^{-1}(1 \otimes x_3, p_1 \otimes 1)$$

$$= \Sigma \langle p_3, x_1\rangle(p_2 \otimes x_2)\langle p_1, S(x_3)\rangle$$

となる。これより $A^\sigma = H^{*cop} \bowtie H$ はホップ代数 H^{*cop}，H を次の関係で match させたものとわかる：

$$x \cdot p = \Sigma \langle p_3, x_1\rangle p_2 \cdot x_2 \langle p_1, S(x_3)\rangle, \quad x \in H, \ p \in H^*$$

このホップ代数は H の量子対(quantum double) と呼ばれ通常 D(H) で表す。これは Drinfeld によって(もっと別の方法で)導入され，量子群論において重要な役割を果たす。われわれの構成法は最も簡潔でわかりやすいと思われる[DT2]。

[${}_\sigma A$ と A^σ の関係のついての補足]　ホップ代数のコサイクル変形 A^σ は余加群代数 ${}_\sigma A$ から，ある意味で“じかに”構成できる。多少テクニカルになるが，その構成を簡単に述べてみる。A がホップ代数で $\sigma \in Z^2(A, k)$ とするとき，次の線形同形が存在する。

$$\theta : A^\sigma \cong ({}_\sigma A \otimes {}_\sigma A)^{coA}, \quad \theta(x) = \Sigma x_1 \otimes {}_\sigma S(x_2), \quad \theta^{-1}(x \otimes y) = \Sigma x_1 \sigma(x_2, y)$$

ただし ${}_\sigma S = \mathrm{id}^{-1} : A \to {}_\sigma A$, $x \mapsto \Sigma S(x_1)\sigma^{-1}(S(x_2), x_3)$。

(実際，$x \in A^\sigma$ のとき $\Sigma x_1 \sigma(x_2, {}_\sigma S(x_3)) = \Sigma x_1 \sigma(x_2, S(x_3))\sigma^{-1}(S(x_4), x_5)$

$= \Sigma x_1 \varepsilon(x_2) = x$。逆に $x \otimes y \in ({}_\sigma A \otimes {}_\sigma A)^{coA}$ とする。一般に

$\sigma(a, b) = \Sigma a_1 \circ b_1 \circ {}_\sigma S(a_2 b_2)$ だから，$\Sigma x_1 \otimes {}_\sigma S(x_2)\sigma(x_3, y)$

$= \Sigma x_1 \otimes {}_\sigma S(x_2) \circ x_3 \circ y_1 \circ {}_\sigma S(x_4 y_2) = \Sigma x_1 \otimes y_1 \circ {}_\sigma S(x_2 y_2)$

$= x \otimes y \circ {}_\sigma S(1)$ (by $x_1 \otimes y_1 \otimes x_2 y_2 = x \otimes y \otimes 1$) $= x \otimes y$ となり θ 全単射となる。)

また ${}_\sigma A$ は次の右 A-作用(これを Miyashita-Ulbrich 作用という)

$$x \leftharpoonup a = {}_\sigma S(a_1) \circ x \circ a_2$$

をもち, Yetter-Drinfeld 圏 $\mathbf{YD}^A{}_A$ の object になる。$\mathbf{YD}^A{}_A$ の定義については [Mo, 10.6.10] をみよ。この事実から ${}_\sigma A \otimes {}_\sigma A$ は積

$$(x \otimes y)(z \otimes w) = \Sigma x \circ z_1 \otimes (y \leftharpoonup z_2) \circ w$$

に関して右 A-余加群代数となる。よってその不変環である $({}_\sigma A \otimes {}_\sigma A)^{coA}$ は k-代数である。そして線形同形射 θ は実は代数射となる:

$\theta(x \cdot y) = \Sigma \sigma(x_1, y_1)\theta(x_2 y_2)\sigma^{-1}(x_3, y_3)$

$= \Sigma \sigma(x_1, y_1) x_2 y_2 \otimes {}_\sigma S(x_3 y_3) \circ x_4 y_4 \circ {}_\sigma S(y_5) \circ {}_\sigma S(x_5) = \Sigma x_1 \circ y_1 \otimes {}_\sigma S(y_2) \circ {}_\sigma S(x_2)$,

一方 $\theta(x)\theta(y) = (\Sigma x_1 \otimes {}_\sigma S(x_2))(\Sigma y_1 \otimes {}_\sigma S(y_2))$

$= \Sigma x_1 \circ y_1 \otimes [{}_\sigma S(x_2) \leftharpoonup y_2] \circ {}_\sigma S(y_3) = \Sigma x_1 \circ y_1 \otimes {}_\sigma S(y_2) \circ {}_\sigma S(x_2) \circ y_3 \circ {}_\sigma S(y_4)$

$= \Sigma x_1 \circ y_1 \otimes {}_\sigma S(y_2) \circ {}_\sigma S(x_2)$.

また A^σ の余代数構造は A^σ-coring $A^\sigma \otimes A^\sigma$ の構造射に関手 $(\ )^{coA}$ をほどこしたものと一致する。$(\ )^{coA}$ は相対ホップ加群の圏 $\mathbf{M}^A_B$ (ただし $B = {}_\sigma A$) から k-加群の圏 $\mathbf{M}_k$ への圏同値を与える。($\mathbf{M}^A_B$ の定義については, 例えば[Mo, 8.5.1]をみよ。)

これから ${}_\sigma A$ の左 A^σ-余加群代数構造は次の UMP をもつことがわかる: H を双代数として, ${}_\sigma A$ は左 H-余加群代数でその構造射 λ: ${}_\sigma A \to H \otimes {}_\sigma A$ が $(id_H \otimes \Delta_A)\lambda = (\lambda \otimes id_A)\Delta_A$ をみたすとする, すなわち ${}_\sigma A$ は両側 (H, A)-余加群。このとき次の図式を可換にする双代数射写像 f: $A^\sigma \to H$ が唯一つ存在する:

$$\begin{array}{ccc} \Delta:\ {}_\sigma A & \rightarrow & A^\sigma \otimes {}_\sigma A \\ & \lambda \searrow & \downarrow f \otimes 1 \\ & & H \otimes {}_\sigma A \end{array}$$

(実際 $B = {}_\sigma A$ のとき次の同形がなりたつ: $\mathbf{M}^A(B, H \otimes B) \cong \mathbf{M}^A_B(B \otimes B, H \otimes B)$

$\cong \mathbf{M}_k((B \otimes B)^{coA}, (H \otimes B)^{coA}) \cong \mathbf{M}_k(A^\sigma, H)$ となるから。)

[注意] もっと一般に Schauenburg [S] は, 忠実平坦ガロア(右) A-拡大 $k \subset B$ に対して, あるホップ代数 $L = L(B, A)$ を構成して, B が左 L-余加群代数かつ両側 (L, A)-余加群で上の UMP をみたすことを示している。$B = {}_\sigma A$ のとき $L(B, A) = A^\sigma$ となる。

§4 $U_q(s\ell_2)$ のコサイクル変形

量子群の最も基本的な例である $U_q(s\ell_2)$ を考える。この節では k を体とし，q を k の元で $q \neq 0$, $q^2 \neq 1$ とする。k-代数として $A = U_q(s\ell_2)$ は次で定義される[J]:

生成元 … K, K^{-1}, E, F

関係式 … $KK^{-1} = 1 = K^{-1}K$,　$KE = q^2EK$, $KF = q^{-2}FK$,

$$[E,F] = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}$$

これは次のホップ代数構造をもつ。

$$\Delta(K) = K\otimes K,\quad \varepsilon(K) = 1,\quad S(K) = K^{-1},$$

$$\Delta(E) = 1\otimes E + E\otimes K,\quad \varepsilon(E) = 0,\quad S(E) = -EK^{-1}$$

$$\Delta(F) = K^{-1}\otimes F + F\otimes 1,\quad \varepsilon(F) = 0,\quad S(F) = -KF$$

[クレフト拡大の決定]　$A = U_q(s\ell_2)$, $k\subset B$ を A-クレフト拡大とすると，次の条件をみたす３元 x, y, z が B の中に存在する。

$$x \in U(B),\quad xy = q^2yx,\quad xz = q^{-2}zx$$

$$\rho(x) = x\otimes K,\quad \rho(y) = 1\otimes E + y\otimes K,\quad \rho(z) = x^{-1}\otimes F + z\otimes 1$$

ただし ρ は B の A-余加群構造射 $B \to B\otimes A$ を表す。

証明　ϕ: $A \to B$ を可逆な A-余加群同形射とする。$x = \phi(K)$ とおくと，$x \in U(B)$ $(x^{-1} = \phi^{-1}(K))$ かつ $\rho(x) = x\otimes K$ となる。$y = \phi(E)$ とおくと，

$$\rho(y) = (\phi\otimes 1)\Delta(E) = \phi(1)\otimes E + \phi(E)\otimes K = 1\otimes E + y\otimes K$$

である。しかも

$$\rho(xy) = (x\otimes K)(1\otimes E + y\otimes K) = x\otimes KE + xy\otimes K^2 \text{ かつ}$$

$$\rho(yx) = (1\otimes E + y\otimes K)(x\otimes K) = x\otimes EK + yx\otimes K^2$$

であるから，$KE = q^2EK$ より

$$\rho(xy - q^2yx) = (xy - q^2yx)\otimes K^2$$

となる。よって $xy - q^2yx = cx^2$ (for some $c \in k$) となる。そこで y を $y - c(1-q^2)^{-1}x$ に置き換えれば，

$$\rho(y) = 1\otimes E + y\otimes K \text{ かつ } xy = q^2yx$$

が成り立つ。

次に $x' = \phi(K^{-1})$ とすると，$\rho(xx') = \rho(x)\rho(x') = (x\otimes K)(x'\otimes K^{-1}) = xx'\otimes 1$，よって $xx' \in U(k)$ となる。$d = xx'$，$z = \phi(d^{-1}F)$ とすると，

$$\rho(z) = (\phi\otimes 1)\Delta(d^{-1}F) = d^{-1}\phi(K^{-1})\otimes F + d^{-1}\phi(F)\otimes 1$$
$$= d^{-1}x'\otimes F + z\otimes 1 = x^{-1}\otimes F + z\otimes 1$$

となる。しかも

$$\rho(xz) = (x\otimes K)(x^{-1}\otimes F + z\otimes 1) = 1\otimes KF + xz\otimes K$$
$$\rho(zx) = (x^{-1}\otimes F + z\otimes 1)(x\otimes K) = 1\otimes FK + zx\otimes K$$

であるから，$KF = q^{-2}FK$ より

$$\rho(xz - q^{-2}zx) = (xz - q^{-2}zx)\otimes K$$

となる。よって $xz - q^{-2}zx = c'x$ (for some $c' \in k$) となる。そこで z を $z - c'(1-q^{-2})^{-1}$ に置き換えれば，

$$\rho(z) = x^{-1}\otimes F + z\otimes 1 \text{ かつ } xz = q^{-2}zx$$

が成り立つ。□

次に y と z の交換子を調べる。$[\rho(y), \rho(z)] = \rho(y)\rho(z) - \rho(z)\rho(y)$

$$= (1\otimes E + y\otimes K)(x^{-1}\otimes F + z\otimes 1) - (x^{-1}\otimes F + z\otimes 1)(1\otimes E + y\otimes K)$$
$$= x^{-1}\otimes EF + z\otimes E + yx^{-1}\otimes KF + yz\otimes K - (x^{-1}\otimes FE + x^{-1}y\otimes FK + z\otimes E + zy\otimes K)$$
$$= x^{-1}\otimes [E, F] + [y, z]\otimes K \quad (\text{by } xy = q^2yx \text{ and } q^2KF = FK)$$
$$= x^{-1}\otimes \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}} + [y, z]\otimes K$$

だから，$w = [y, z] - \dfrac{x - x^{-1}}{q - q^{-1}}$ とおくと

$$\rho(w) = [\rho(y), \rho(z)] - \frac{\rho(x) - \rho(x^{-1})}{q - q^{-1}}$$
$$= x^{-1}\otimes \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}} + [y, z]\otimes K - x\otimes \frac{K}{q - q^{-1}} + x^{-1}\otimes \frac{K^{-1}}{q - q^{-1}}$$
$$= [y, z]\otimes K - \frac{x - x^{-1}}{q - q^{-1}}\otimes K = w\otimes K,$$

よって $[y, z] = \dfrac{\alpha x - x^{-1}}{q - q^{-1}}$ (for some $\alpha \in k$) となる。

[定義] $\alpha \in k$ に対し k-代数 $B_{(\alpha)}$ を次で定義する。

$$B_{(\alpha)} := k\langle x, x^{-1}, y, z \mid xy = q^2yx,\ \ xz = q^{-2}zx,\ \ [y, z] = \frac{\alpha x - x^{-1}}{q - q^{-1}} \rangle$$

$B_{(\alpha)}$ は k-基底 $z^ix^jy^l$ $(i, \ell \in \mathbf{N}, j \in \mathbf{Z})$ をもつ. また右 A-余加群代数構造

$$\rho(x) = x \otimes K,\ \ \rho(y) = 1 \otimes E + y \otimes K,\ \ \rho(z) = x^{-1} \otimes F + z \otimes 1$$

をもち, $k \subset B_{(\alpha)}$ は A-クレフト拡大になる。(ϕ: $A \to B_{(\alpha)}$, $\phi(F^iK^jE^l) = z^ix^jy^l$ とすればよい。) 以上より,

<u>定理 4</u> $B_{(\alpha)}$, $\alpha \in k$ はすべての k 上の $U_q(s\ell_2)$-クレフト拡大を尽す。
しかも $\alpha \neq \beta$ なら $B_\alpha \ncong B_\beta$ (余加群代数として)となり, つまり

$$H^2(U_q(s\ell_2), k) = k.$$

[$B_{(\alpha)}$ に対応するコサイクル変形は何か?] 左余加群構造 λ: $B_{(\alpha)} \to A^\sigma \otimes B_{(\alpha)}$ は

$$\lambda(x) = K \otimes x,\ \ \lambda(y) = 1 \otimes y + E \otimes x,\ \ \lambda(z) = K^{-1} \otimes z + F \otimes 1$$

となる。$\lambda(x)\lambda(y) = q^2\lambda(y)\lambda(x)$ より

$$(K \otimes x)(1 \otimes y + E \otimes x) = q^2(1 \otimes y + E \otimes x)(K \otimes x),$$

$$\text{よって } K \otimes xy + KE \otimes x^2 = q^2K \otimes yx + q^2EK \otimes x^2 \ \ \therefore\ \underline{KE = q^2EK}$$

$\lambda(x)\lambda(z) = q^{-2}\lambda(z)\lambda(x)$ より $(K \otimes x)(K^{-1} \otimes z + F \otimes 1) = q^{-2}(K^{-1} \otimes z + F \otimes 1)(K \otimes x)$,

$$\therefore\ 1 \otimes xz + KF \otimes x = q^{-2}1 \otimes zx + q^{-2}FK \otimes x \ \ \therefore\ \underline{KF = q^{-2}FK}$$

$\lambda(y)\lambda(z) - \lambda(z)\lambda(y) = \alpha\lambda(x) - \dfrac{\lambda(x^{-1})}{q - q^{-1}}$ より

$(1 \otimes y + E \otimes x)(K^{-1} \otimes z + F \otimes 1) - (K^{-1} \otimes z + F \otimes 1)(1 \otimes y + E \otimes x)$

$= \alpha K \otimes \dfrac{x}{q - q^{-1}} - K^{-1} \otimes \dfrac{x^{-1}}{q - q^{-1}}$, よってこれから

$$EF - FE = \frac{\alpha(K - K^{-1})}{q - q^{-1}}$$

このようにして,

<u>定理 5</u> $B_{(\alpha)}$ に対応するコサイクル変形 $U_q(s\ell_2)^\alpha$ は,

生成元 K, K^{-1}, E, F と次の関係式で定義される:

$$KE = q^2EK,\quad KF = q^{-2}FK,\quad EF - FE = \frac{\alpha(K-K^{-1})}{q-q^{-1}}$$

(Δ の式は $U_q(s\ell_2)$ と同じ)

$\alpha \neq 0$ なら $U_q(s\ell_2) \cong U_q(s\ell_2)^\alpha$ ($K \leftrightarrow K$, $E \leftrightarrow \alpha^{-1}E$, $F \leftrightarrow F$) となる。したがって $U_q(s\ell_2)$ のコサイクル変形は $\alpha = 0, 1$ の2つしかない.

§5 Braided 双代数と $M(C, \sigma)$

Drinfeld[Dr]は準三角双代数(quasi-triangular bialgebra)の概念を導入した。D(H) はその基本的な例。その双対概念として braided 双代数(または余準三角双代数)の概念が Larson-Towber[LT], 林[H]らにより導入され, 土井[D2]でコサイクルの立場から十分整理して展開された。(これらの概念については [Mo, §10] で簡潔にまとめられている。) この節では, braided 双代数の概念をコサイクル変形の立場で説明する。

双代数 A に対し, 右 A-余加群の圏を $\mathbf{M}^A$ で表す。V, W $\in \mathbf{M}^A$ のとき, $V\otimes W$ は

$$\rho: V\otimes W \to V\otimes W\otimes A,\quad v\otimes w \mapsto \Sigma v_0\otimes w_0\otimes v_1w_1$$

を構造射として右 A-余加群になる。これにより $\mathbf{M}^A = (\mathbf{M}^A, \otimes, k)$ はいわゆるモノイダル圏になる。σ が双代数 A 上の 2-コサイクルで, $A^\sigma = A^{op}$ (A の積のみ反対にした双代数)となる場合を考える。これに加えて $\mathbf{M}^A$ が braided 圏[Mo, §10.4]になる条件を考えると, 次に述べる braided 双代数の概念が導かれる。

[定義] 双代数 A に対し, 次の3条件をみたす可逆2次形式 $\sigma: A\times A \to k$ を A の <u>braiding</u> と呼ぶ(存在するとは限らない)。このような σ と A の組を <u>braided</u> 双代数, または CQT(coquasitriangular) 双代数と呼ぶ。

(B1) $\Sigma y_1x_1\sigma(x_2, y_2) = \Sigma\sigma(x_1, y_1)x_2y_2$

(B2) $\sigma(xy, z) = \Sigma\sigma(x, z_1)\sigma(y, z_2)$

(B3) $\sigma(x, yz) = \Sigma\sigma(x_1, z)\sigma(x_2, y),\quad x, y, z \in A$

このとき, σ は 2-コサイクルになる。条件(B1)は $A^\sigma = A^{op}$ ということに他ならな

い。条件(B1)からさらに, V, W $\in$ $\mathbf{M}^A$ に対し次の A-余加群同形が従う:

$$\sigma_{V,W}: V\otimes W \cong W\otimes V,\ v\otimes w \mapsto \Sigma\sigma(v_1, w_1)w_0\otimes v_0$$

逆写像は $w\otimes v \mapsto \Sigma\sigma^{-1}(v_1, w_1)v_0\otimes w_0$ で与えられる。条件(B2)と(B3)から, 次の braiding 条件がなりたち, $\mathbf{M}^A$ が braided 圏になる。

$$\sigma_{U\otimes V,W} = (\sigma_{U,W}\otimes \mathrm{id}_V)(\mathrm{id}_U\otimes\sigma_{V,W}) \text{ in } \mathrm{Hom}(U\otimes V\otimes W,\ W\otimes U\otimes V)$$

$$\sigma_{U,V\otimes W} = (\mathrm{id}_V\otimes\sigma_{U,W})(\sigma_{U,V}\otimes \mathrm{id}_W) \text{ in } \mathrm{Hom}(U\otimes V\otimes W,\ V\otimes W\otimes U).$$

また, (B1)と(B2)から次の Yang-Baxter 条件

(B4) $\Sigma\sigma(x_1, y_1)\sigma(x_2, z_1)\sigma(y_2, z_2) = \Sigma\sigma(y_1, z_1)\sigma(x_1, z_2)\sigma(x_2, y_2)$

もなりたつ。これと(B3)を合わせると $\sigma \in Z^2(A, k)$ がでる。

$A = H_4$ の場合, $\sigma_{\alpha\beta\gamma}$ が braiding になるための条件は $\alpha = -1$, $\gamma = 0$ (β 任意) となる。とくに H_4 は braided 双代数。

[例] 行列代数のテンサー積 $M(n,k)\otimes M(n,k)$ の可逆行列 R に対し, FRT-構成と呼ばれる k-代数 A(R) が構成できる。A(R) は生成元 $x_{11}, ..., x_{nn}$ と次の関係式

$$R(X\otimes I)(I\otimes X) = (I\otimes X)(X\otimes I)R$$

で定義される, ただし $X = (x_{ij})$。

$$\Delta(x_{ij}) = \Sigma_{s=1}^{n}\ x_{is}\otimes x_{sj},\quad \varepsilon(x_{ij}) = \delta_{ij}$$

で A(R) は双代数になる。もし R が Yang-Baxter 条件 "$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}$" をみたせば, A(R) の braiding σ で次の条件をみたすものが唯一つ存在する:

$$\Sigma_{i,j,k,l}\ \sigma(x_{ij}, x_{kl})E_{ij}\otimes E_{kl} = R \quad (E_{ij}\ \text{行列単位})$$

この構成は次のように一般化される[D1, D2]。

[$M(C,\sigma)$ について] 一般の余代数 C とその上の可逆な２次形式 $\sigma: C\times C \to k$ を考える。テンソル代数 $T(C) = \oplus_m C^{\otimes m}$ は次の自然な双代数構造をもつ:

$xy\cdots z = x\otimes y\otimes\cdots\otimes z \in C^{\otimes m}$ に対し, $\Delta(xy\cdots z) = \Sigma x_1y_1\cdots z_1\otimes x_2y_2\cdots z_2.$

σ は T(C) の２次形式 $\sigma: T(C)\times T(C) \to k$ に条件(B2, 3)をみたしながら延長できる。$\{\Sigma\sigma(x_1, y_1)x_2y_2 - \Sigma y_1x_1\sigma(x_2, y_2) \mid x, y \in C\}$ で生成された T(C) のイデアル I_σ による商 $T(C)/I_\sigma$ を $M(C,\sigma)$ で表す。I_σ は T(C) の biideal だから, $M(C,\sigma)$ は双代数になる。もし $\sigma(T(C)\otimes I_\sigma + I_\sigma\otimes T(C)) = 0$ なら $\sigma: T(C)\times T(C) \to k$ は $M(C,\sigma)\otimes M(C,\sigma)$ を経由し, $M(C,\sigma)$ は braided になる。

$\sigma(T(C)\otimes I_\sigma + I_\sigma\otimes T(C)) = 0 \Leftrightarrow \forall x, y, z \in C$ に対し,

$\sigma(\Sigma\sigma(x_1, y_1)x_2y_2 - \Sigma y_1x_1\sigma(x_2, y_2), z) = 0$ かつ

$\sigma(x, \Sigma\sigma(y_1, z_1)y_2z_2 - \Sigma z_1y_1\sigma(y_2, z_2)) = 0$

$\Leftrightarrow$ $\Sigma\sigma(x_1, y_1)\sigma(x_2y_2, z) = \Sigma\sigma(y_1x_1, z)\sigma(x_2, y_2)$ かつ

$\Sigma\sigma(y_1, z_1)\sigma(x, y_2z_2) = \Sigma\sigma(x, z_1y_1)\sigma(y_2, z_2)$

$\Leftrightarrow$ $\Sigma\sigma(x_1, y_1)\sigma(x_2, z_1)\sigma(y_2, z_2) = \Sigma\sigma(y_1, z_1)\sigma(x_1, z_2)\sigma(x_2, y_2)$ (B4である!)

そこで, 任意の $x, y, z \in C$ に対し(B4)がなりたつような組 (C, σ) を Yang-Baxter 余代数と呼ぶことにする。$C = M(n, k)^*$ の場合, (B4) は "$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}$" に他ならない。このようにして次の定理を得る:

定理 6 (C, σ) が Yang-Baxter 余代数なら, σ は $M(C, \sigma)$ 上の braiding に一意的に拡張され, $M(C, \sigma)$ は braided 双代数になる。

[例] (2-パラメーター量子行列代数)

$C = M(n, k)^*$ とする。$\alpha, \beta \in U(k)$ に対し, $\sigma_{\alpha,\beta}: C \times C \to k$ を次で定義する:

$i = 1, 2, \ldots, n \Rightarrow \sigma_{\alpha,\beta}(x_{ii}, x_{ii}) = \alpha\beta$,

$i < j \Rightarrow \sigma_{\alpha,\beta}(x_{jj}, x_{ii}) = \alpha$, $\sigma_{\alpha,\beta}(x_{ii}, x_{jj}) = \beta$, $\sigma_{\alpha,\beta}(x_{ij}, x_{ji}) = \alpha\beta - 1$

その他は 0 とおく。ここで $\{x_{ij}\}$ は行列単位 $\{E_{ij}\}$ の双対基底。

このとき, $(C, \sigma_{\alpha,\beta})$ は Yang-Baxter 余代数になる。$M(C, \sigma_{\alpha,\beta})$ はいわゆる竹内の 2-パラメーター量子行列代数 $O_{\alpha,\beta}(M(n))$ [T1]と一致する:

生成元 E_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$

関係式 $E_{is}E_{ir} = \alpha E_{ir}E_{is}$ (if $r < s$), $E_{jr}E_{ir} = \beta E_{ir}E_{jr}$ (if $i < j$),

$E_{jr}E_{is} = \alpha^{-1}\beta E_{is}E_{jr}$ (if $i < j$ & $r < s$),

$E_{ir}E_{js} - E_{js}E_{ir} = (\alpha^{-1} - \beta)E_{is}E_{jr}$ (if $i < j$ & $r < s$).

$q = \alpha = \beta$ のとき, 通常の量子行列双代数 $O_q(M(n))$ になる。

§6 $M(C, \sigma)$ のコサイクル変形

まず, A^σ について一般論からはじめる。

<u>定理 7</u>　A を可換環 k 上の双代数で，$\sigma \in Z^2(A,k)$ とする。このとき，

(a) $\sigma^{-1} \in Z^2(A^\sigma,k)$ かつ $(A^\sigma)^{\sigma^{-1}} = A$ となる。

(b) A が部分余代数 C で生成されていれば A^σ も C で生成される.

(c) 2次形式 $\tau: A \times A \to k$ に対し，

$$\tau^\sigma(x,y) := \Sigma\sigma(y_1,x_1)\tau(x_2,y_2)\sigma^{-1}(x_3,y_3),\quad x,y \in A$$

とおく。(A,τ) が braided 双代数なら，(A^σ,τ^σ) もそう。

証明 (a): $\Sigma\sigma^{-1}(x_1,y_1)\sigma^{-1}(x_2\cdot y_2,z)$

$= \Sigma\sigma^{-1}(x_1,y_1)\sigma^{-1}(\sigma(x_2,y_2)x_3y_3\sigma^{-1}(x_4,y_4),z)$

$= \Sigma\sigma^{-1}(x_1,y_1)\sigma(x_2,y_2)\sigma^{-1}(x_3y_3,z)\sigma^{-1}(x_4,y_4) = \Sigma\sigma^{-1}(x_1y_1,z)\sigma^{-1}(x_2,y_2)$

一方，$\Sigma\sigma^{-1}(y_1,z_1)\sigma^{-1}(x,y_2\cdot z_2) = \Sigma\sigma^{-1}(y_1,z_1)\sigma^{-1}(x,\sigma(y_2,z_2)y_3z_3\sigma^{-1}(y_4,z_4))$

$= \Sigma\sigma^{-1}(y_1,z_1)\sigma(y_2,z_2)\sigma^{-1}(x,y_3z_3)\sigma^{-1}(y_4,z_4) = \Sigma\sigma^{-1}(x,y_1z_1)\sigma^{-1}(y_2,z_2)$

よって $\sigma^{-1} \in Z^2(A^\sigma,k)$. しかも $\Sigma\sigma^{-1}(x_1,y_1)x_2\cdot y_2\sigma(x_3,y_3)$

$= \Sigma\sigma^{-1}(x_1,y_1)\sigma(x_2,y_2)x_3y_3\sigma^{-1}(x_4,y_4)\sigma(x_5,y_5) = xy$ だから $(A^\sigma)^{\sigma^{-1}} = A$.

(b): A^σ において C が生成する部分代数を H とすると

$$C \subset H^{\sigma^{-1}} \subset (A^\sigma)^{\sigma^{-1}} = A \quad \text{ゆえ} \quad H^{\sigma^{-1}} = A \quad \therefore H = A^\sigma.$$

(c): (A,τ) における関係式 $\Sigma\tau(x_1,y_1)x_2y_2 = \Sigma y_1x_1\tau(x_2,y_2),\ x,y \in A$ に

$$xy = \Sigma\sigma^{-1}(x_1,y_1)x_2\cdot y_2\sigma(x_3,y_3)$$

を代入すると

$$\Sigma\tau(x_1,y_1)\sigma^{-1}(x_2,y_2)x_3\cdot y_3\sigma(x_4,y_4) = \Sigma\sigma^{-1}(y_1,x_1)y_2\cdot x_2\sigma(y_3,x_3)\tau(x_4,y_4)$$

これは　$\Sigma\tau^\sigma(x_1,y_1)x_2\cdot y_2 = \Sigma y_1\cdot x_1\tau^\sigma(x_2,y_2)$ と同じ。つまり (B1) が成立。
(B2)(B3) は略。□

以下，C を余代数，$\tau: C \times C \to k$ を可逆な2次形式として，$A = M(C,\tau)$ のコサイクル変形を考える。ただし (C,τ) が Yang-Baxter であることを仮定しない。

双代数 $M(C,\tau)$ は次の UMP をもつことに注意する:
任意の双代数 A と "$\Sigma\tau(x,y)f(x)f(y) = \Sigma f(y)f(x)\tau(x,y),\ x,y \in C$" なる線形写像 $f: C \to A$ に対し，$f^\sim(c) = f(c)$ $(c\in C)$ をみたす双代数射 $f^\sim: M(C,\tau) \to A$ が唯一つ存在する。

さて $M(C,\tau)^{\sigma}$ において

$$\Sigma\tau^{\sigma}(x,y)x\cdot y = \Sigma y\cdot x\tau^{\sigma}(x,y,)\quad x,y\in C$$

がなりたつ(これは定理7(c) の計算と同じようにしてできる)。よって $M(C,\tau^{\sigma})$ の UMP から，C 上恒等的な双代数射 $M(C,\tau^{\sigma})\to M(C,\tau)^{\sigma}$ が定まる。定理7(b)より，これは全射である。(τ^{σ} は $\sigma|_{C\otimes C}$ のみから決まることに注意。) そして

$$(\tau^{\sigma})^{\sigma^{-1}}(x,y) = \Sigma\sigma^{-1}(y,x)\tau^{\sigma}(x,y)\sigma(x,y)$$
$$= \Sigma\sigma^{-1}(y,x)\sigma(y,x)\tau(x,y)\sigma^{-1}(x,y)\sigma(x,y) = \tau(x,y)\ \text{より}$$

次の写像の合成は恒等写像になる。

$$M(C,\tau) = M(C,(\tau^{\sigma})^{\sigma^{-1}})\to M(C,\tau^{\sigma})^{\sigma^{-1}}\to (M(C,\tau)^{\sigma})^{\sigma^{-1}} = M(C,\tau)$$

よって次の定理を得る。

定理 8　$M(C,\tau^{\sigma})\cong M(C,\tau)^{\sigma}$

系　σ_1, $\sigma_2\in Z^2(M(C,\tau),k)$ が $C\times C$ 上一致するとき，$M(C,\tau)^{\sigma_1}$ から $M(C,\tau)^{\sigma_2}$ への双代数同形射で C 上恒等的なものが存在する。

つまり $M(C,\tau)$ のコサイクル変形 $M(C,\tau)^{\sigma}$ は制限 $\sigma|C\times C$ のみによることになる。これから次の問が生ずる。

問 可逆２次形式 σ: $C\times C\to k$ はいつ $M(C,\tau)$ 上の 2-コサイクルに拡張可能か? (C,τ) が Yang-Baxter のときは，定理7(c) より次の必要条件が従う:

σ が 2-コサイクルに拡張可能 $\Rightarrow$ (C,τ^{σ}) も Yang-Baxter

[例] 可逆な２次形式 τ, σ: $C\times C\to k$ に対し，$\tau^{\sigma}=\tau$ すなわち

$$\Sigma\sigma(y_1,x_1)\tau(x_2,y_2) = \Sigma\tau(x_1,y_1)\sigma(x_2,y_2),\quad x,y\in C$$

を仮定する。このとき σ は $M(C,\tau)$ のコバウンダリに拡張できる。すなわち可逆かつ $u(1)=1$ である u: $M(C,\tau)\to k$ が存在して

$$\sigma(x,y) = \Sigma u(x_1)u(y_1)u^{-1}(x_2y_2),\quad x,y\in C$$

となる。

証明　$M(C,\tau)$ は次数付代数である。２次以外の項の上では $u = \varepsilon$ と定義し，２次の項 C^2 の上では，(上の式より)

$$u(xy) = \sigma^{-1}(x,y)$$

と定義する。$\Sigma\tau(x_1,y_1)x_2y_2 = \Sigma y_1x_1\tau(x_2,y_2)$ に u を apply して得られる $\Sigma\tau(x_1,y_1)\sigma^{-1}(x_2,y_2) = \Sigma\sigma^{-1}(y_1,x_1)\tau(x_2,y_2)$ は仮定から成立しているので u は well-defind である。しかも可逆 ($u^{-1}(xy) = \sigma(x,y)$ も well-defind)。この u が求めるものである。□

$\tau = \varepsilon\otimes\varepsilon$ (自明) のとき，$M(C,\tau)$ は対称代数 S(C) にほかならない。$(\varepsilon\otimes\varepsilon)^\sigma(x,y) = \Sigma\sigma(y_1,x_1)\sigma^{-1}(x_2,y_2)$ より次の系を得る。系 2 は上の証明に対する系である。

<u>系 1</u> $\sigma(x,y) = \sigma(y,x)$ ならば σ は S(C) 上のコバウンダリに拡張可能である。
<u>系 2</u>　任意の可逆２次形式 $\sigma\colon C\times C \to k$ は T(C) 上のコバウンダリに拡張可能。

[$M(\tau_2,C,\tau_1)$ について]　$\tau_i\colon C\times C \to k$ を可逆な２次形式とするとき($i = 1,2$)，$M(C,\tau_2)$ がいつ $M(C,\tau_1)$ のコサイクル変形 $M(C,\tau_1)^\sigma$ に同形か? もし $\tau_2 = \tau_1{}^\sigma$ なる $\sigma \in Z^2(M(C,\tau_1),k)$ が存在すれば OK である(必要とは限らない!):

$$M(C,\tau_2) = M(C,\tau_1{}^\sigma) \cong M(C,\tau_1)^\sigma$$

そこで代数 $M(\tau_2,C,\tau_1)$ を生成空間 C と次の関係式で定義する:

$$\Sigma\tau_2(x,y)xy = \Sigma yx\tau_1(x,y) \quad x,y\in C$$

明らかに $M(\tau,C,\tau) = M(C,\tau)$ である。余積 $\Delta\colon C \to C\otimes C$ は次の代数射を引き起す

$$\rho\colon M(\tau_2,C,\tau_1) \to M(\tau_2,C,\tau_1)\otimes M(C,\tau_1) \ (\text{右余加群構造})$$

$$\lambda\colon M(\tau_2,C,\tau_1) \to M(C,\tau_2)\otimes M(\tau_2,C,\tau_1) \ (\text{左余加群構造})$$

これで $M(\tau_2,C,\tau_1)$ は両側余加群代数となる。これが両側にクレフト拡大，つまり

$$(A^\sigma, A)\text{-余加群代数 } {}_\sigma A$$

のタイプであれば，$M(C,\tau_2)$ は $M(C,\tau_1)$ のコサイクル変形となる。

[例]　{g, c, h} を基底とする階数３の自由加群 C_3 を考える。

$$\Delta(g) = g\otimes g,\ \Delta(c) = g\otimes c + c\otimes h,\ \Delta(h) = h\otimes h,$$

$$\varepsilon(g) = 1,\ \varepsilon(c) = 0,\ \varepsilon(h) = 0$$

によって C_3 は余代数になる。

$\alpha \in U(k)$, $\lambda, \mu \in k$ に対し $\tau = \tau_{\alpha\lambda\mu}$: $C_3 \times C_3 \to k$ を次により定める:

τ	g	h	c
g	1	α^{-1}	$-\lambda\alpha^{-1}$
h	α	1	$-\mu$
c	λ	$\mu\alpha^{-1}$	$-\lambda\mu\alpha^{-1}$

このとき $M(C_3, \tau)$ の定義関係式は

$$gh = hg, \quad cg = \alpha gc + \lambda g(g - h), \quad ch = \alpha hc + \mu(g - h)h$$

となる。従って $M(C_3, \tau)$ は k 上 $g^i h^j c^l$ $(i.j.\ell \geqq 0)$ で張られる。さらに次の結果がなりたつ。

$\{g^i h^j c^l\}$ が線形独立, つまり $M(C_3, \tau)$ が g, h, c の(非可換)多項式環

$\Leftrightarrow$ $\tau = \tau_{\alpha,\lambda,\mu}$ が Yang-Baxter 条件をみたす

$\Leftrightarrow$ $(1 - \alpha)(\lambda - \mu) = 0$

<u>命題</u>　任意の可逆２次形式 τ: $C_3 \times C_3 \to k$ に対し,

$M(C_3, \tau)$ が g, h, c の多項式環

$\Leftrightarrow$ $\exists$ $u, \alpha \in U(k)$, $\exists$ $\lambda, \mu \in k$ s.t. $\tau = u\tau_{\alpha\lambda\mu}$ かつ $(\alpha - 1)(\lambda - \mu) = 0$

(証明は tedious)

そこで $\tau_{\alpha\lambda\mu}$ の形の τ のみを考え, $\tau = \tau_{\alpha\lambda\mu}$, $\tau' = \tau_{\alpha'\lambda'\mu'}$ とする。

$B = M(\tau', C_3, \tau)$ は g, c, h を生成元とし次の定義関係式をもつ。

(1) $hg = \alpha(\alpha'^{-1})gh$

(2) $cg = \alpha gc + g(\lambda g - \alpha(\alpha'^{-1})\lambda' h)$

(3) $ch = \alpha' hc + (\mu g - \mu' h)h$

このもとで chg を２通りに計算すると

$$\alpha^2 ghc + \alpha\alpha'^{-1}(\mu + \alpha\lambda)g^2h - (\alpha\alpha'^{-1})^2(\mu' + \alpha'\lambda')gh^2$$
$$= \alpha^2 ghc + \alpha\alpha'^{-1}(\lambda + \alpha\mu)g^2h - (\alpha\alpha'^{-1})^2(\lambda' + \alpha'\mu')gh^2$$

となるから, $M(\tau', C_3, \tau)$ が g, c, h の多項式環 $\Leftrightarrow$

$$(\alpha - 1)(\lambda - \mu) = 0 = (\alpha' - 1)(\lambda' - \mu')$$

が成り立つ。つまり $A = M(C_3, \tau)$, $L = M(C, \tau')$ がともに多項式環となり, (L.A)-両

側余加群代数 B は両側クレフト拡大であることが分かる。よって

<u>定理 9</u> $(\alpha - 1)(\lambda - \mu) = 0 = (\alpha' - 1)(\lambda' - \mu')$ なら，$\tau' = \tau^\sigma$ なる $\sigma \in Z^2(M(C_3, \tau), k)$ が存在する。

[注意] 任意の可逆２次形式 $\sigma: C_3 \times C_3 \to k$ に対し，$(\tau_{\alpha\lambda\mu})^\sigma = \tau_{\alpha'\lambda'\mu'}$ となる，ただし，

$$\alpha' = \alpha\sigma(g, h)\sigma(h, g)^{-1},$$
$$\lambda' = \alpha'\sigma(g, c)\sigma(g, h)^{-1} + \lambda\sigma(g, g)\sigma(h, g)^{-1} - \sigma(c, g)\sigma(h, g)^{-1},$$
$$\mu' = \alpha'\sigma(h, c)\sigma(h, h)^{-1} + \mu\sigma(g, h)\sigma(h, h)^{-1} - \sigma(c, h)^{-1}。$$

従って次の結論を得る： $(\alpha - 1)(\lambda - \mu) = 0$ なる $\tau = \tau_{\alpha\lambda\mu}$ に対し，

σ が $M(C_3, \tau)$ 上の 2-コサイクルに拡張可能

$\Leftrightarrow$ 上の α'，λ'，μ' が $(\alpha' - 1)(\lambda' - \mu') = 0$ をみたす

$\Leftrightarrow$ τ^σ が Yang-Baxter 条件をみたす。

§7 量子ホップ代数のコサイクル変形

量子群でコサイクル変形を考える意味として，量子型のホップ代数を古典型のホップ代数のコサイクル変形として表せないか，という問題が考えられる。§3 でみたように，量子対 D(H) は確かに，“自明な”ホップ代数 $H^{*cop} \otimes H$ のコサイクル変形になっている。しかし $U_q(s\ell_2)$ や H_4 のコサイクル変形を考えても本質的に新しいホップ代数は現れない。多分このような pointed ホップ代数については，コサイクル変形により新型のホップ代数を得ることは余り見込めないように思われる。それでは §5 で導入した双代数 $O_{\alpha,\beta}(M(n))$，$O_q(M(n))$ 及びそのホップ化である $O_{\alpha,\beta}(GL(n))$，$O_q(GL(n))$ についてはどうであろうか？（これらの定義，基本性質については [T1, T2, T3]，[Mo, Appendix. 5] などを参照されたい。）

研究集会の際の講演で我々は次の問を提起した。

問 $O_q(GL(n))$ は $O(GL(n))$ のコサイクル変形か？

この問は集会終了後，次のように否定的に解決された[T4]。この節では k を体とし，α, β, α', β', q, q$'$ を k の 0 でない元とする。

<u>定理 10</u>　$q^2 \neq 1$ とする。

(a) $O_q(GL(n))$ は可換ホップ代数のコサイクル変形とは同形にならない。

(b) $O_q(M(n))$ は可換双代数のコサイクル変形とは同形にならない。

<u>定理 11</u>　$O_{\alpha,\beta}(M(n))$ が $O_{\alpha',\beta'}(M(n))$ のコサイクル変形と同形になるための必要条件は

$$\alpha'\beta' = \alpha\beta \quad \text{または} \quad \alpha'\beta' = (\alpha\beta)^{-1}$$

である。

<u>系</u>　$O_q(M(n))$ が $O_{q'}(M(n))$ のコサイクル変形と同形であるための必要十分条件は

$$(q')^2 = q^{\pm 2}$$

である。(同様のことが $O_{\alpha,\beta}(GL(n))$, $O_q(GL(n))$ についても成立つと予想される。)

証明を簡単にスケッチしておく。一般に A^σ の部分双代数は必ず B^σ (B は A の部分双代数)の形をしているので，定理 10 の (a) は (b) から従う。(b) の証明は，定理 11 の必要性の証明とほとんどパラレルである。定理 11 の十分性は次のように容易である:

[$\alpha\beta = \alpha'\beta' \Rightarrow O_{\alpha',\beta'}(M(n))$ は $O_{\alpha,\beta}(M(n))$ のコサイクル変形]

証明　標準的な極大トーラス $T \subset M(n)$ を考える。対応する射影

$$O_{\alpha,\beta}(M(n)) \to O(T) = k[x_{11}, x_{22}, \cdots, x_{nn}]$$

を経由して次の $O(T)$ 上の 2-コサイクル

$$\tau_q(x_{11}{}^{e(1)} \cdots x_{nn}{}^{e(n)},\ x_{11}{}^{f(1)} \cdots x_{nn}{}^{f(n)}) = \prod_{i<j} q^{e(i)f(j)}$$

を $O_{\alpha,\beta}(M(n))$ 上の 2-コサイクルとみなす。$\sigma = \sigma_{\alpha,\beta}$ (§5参照) と $\tau = \tau_q$ に対し，σ^τ (§6参照) を計算すると $\sigma_{q\alpha,q^{-1}\beta}$ に一致することが容易に確かめられる。仮定から $\alpha' = q\alpha$, $\beta' = q^{-1}\beta$ と表せるので，$C = M(n,k)^*$ とすると定理 8 より

$$O_{\alpha',\beta'}(M(n)) = M(C, \sigma_{q\alpha, q^{-1}\beta}) \cong M(C, \sigma_{\alpha,\beta})^{\tau} = O_{\alpha,\beta}(M(n))^{\tau}$$

となる。□

一方 $O_{\alpha,\beta}(M(n)) \cong O_{\alpha^{-1},\beta^{-1}}(M(n))$ なので，上記と合せて定理 11 の十分性が従う。

次に定理 11 の必要性を示すために少し一般的な考察を行う。上記のように $C = M(n,k)^*$ とし，その標準基を $x_{11}, \cdots, x_{nn}$ とする。$V = kv_1 + \cdots + kv_n$ を基本右 C-余加群とする，i.e.,

$$\rho(v_j) = \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes x_{ij}$$

一般に２次形式 $\sigma: C \times C \to k$ に対し，その引き起こす

$$\sigma_{V,V}: V\otimes V \to V\otimes V \quad (\S5)$$

を R_σ と表そう。[T2] で述べたように，双代数 $M(C,\sigma)$ は R_σ を用いて記述できる。即ち $M(C,\sigma)$ は $R_\sigma: V\otimes V \to V\otimes V$ が余加群射となるような $T(C)$ の最大商余代数(自動的に商双代数になる)である。そして σ の Yang-Baxter 条件は $R = R_\sigma$ の braid 条件

$$R_1R_2R_1 = R_2R_1R_2$$

に翻訳される。とくに $\sigma = \sigma_{\alpha,\beta}$ のとき対応する $R_{\alpha,\beta} = R_\sigma$ はこの braid 条件とさらに次の等式

$$(R_{\alpha,\beta} - \alpha\beta)(R_{\alpha,\beta} + 1) = 0$$

をみたす。もう一つ，有限次元ベクトル空間 W の線形変換に関する次の事実に注意する(既知だろうか?)

“$f: W \to W$ の double centralizer は f の多項式に限る。”

これは PID の単因子論から容易に従う。即ち A を 単項イデアル整域で，W が A 上の有限生成加群ならば，$\mathrm{End}_A(W)$ の中心は A の像に一致する。 $M(C,\sigma)$ の２次パートの双対代数は R_σ の centralizer になる[T2]ので，このことより，$V\otimes V$ の $M(C,\sigma)$-余加群射は R_σ の多項式に限る，ことが従う。

以上に注意して，<u>定理 11 の必要性を示そう</u>。ある 2-コサイクル ρ により

$$O_{\alpha,\beta}(M(n)) \cong O_{\alpha',\beta'}(M(n))^{\rho}$$

であるとする。これを

$$M(C, \sigma_{\alpha,\beta}) \cong M(C, (\sigma_{\alpha',\beta'})^{\rho})$$

とみる。両辺は自然な $\mathbb{N}$-gradation をもち，任意の単純部分代数は必ず斉次になるので，この同形は次数を保つ，つまりある余代数自己同形 $C \cong C$ から引き起こされる事が分かる。この余代数同形と両立する semi-colinear 同形 $V \cong V$ が存在する(Skolem-Noether)。右辺 $M(C, (\sigma_{\alpha', \beta'})^{\rho})$ の自然な braiding を上の同形により左辺 $M(C, \sigma_{\alpha, \beta})$ に移したものを τ とする。この τ に対応する $R_\tau : V\otimes V \to V\otimes V$ は次の３条件をみたすことになる。

i) 1, $R_{\alpha,\beta}$ の一次結合である。($\because$ R_τ は $M(C, \sigma_{\alpha,\beta})$-余加群射)

ii) braid 条件

iii) $(R_\tau - \alpha'\beta')(R_\tau + 1) = 0$ ($\because$ R_τ は $R_{\alpha',\beta'}$ と共役)。

簡単な計算から i), ii) をみたす R_τ は定数倍を除き

$$1,\ R_{\alpha,\beta},\quad 1-\alpha\beta + R_{\alpha,\beta}$$

に限ることが分かる。$R_\tau = cR_{\alpha,\beta}$ の場合，iii) と

$$R_\tau{}^2 = c(\alpha\beta - 1)R_\tau + c^2\alpha\beta$$

を比べて $c(\alpha\beta - 1) = \alpha'\beta' - 1$, $c^2\alpha\beta = \alpha'\beta'$ ゆえ，c を消去して

$$\alpha\beta + (\alpha\beta)^{-1} = \alpha'\beta' + (\alpha'\beta')^{-1} \qquad (*)$$

を得る。$1-\alpha\beta + R_{\alpha,\beta}$ の定数倍のときも同様に (*) が成立つ。一方 R_τ は定数にはなりえない(定数 R_τ に対応する τ は $O_{\alpha,\beta}(M(n))$ の braiding に拡張できないことが容易に示される)。

以上から，$O_{\alpha,\beta}(M(n))$ が $O_{\alpha',\beta'}(M(n))$ のコサイクル変換と同形ならば (*) が成立つ。(*) は明らかに

$$(\alpha\beta - \alpha'\beta')(\alpha\beta\alpha'\beta' - 1) = 0$$

と変形できるので，定理 11 の必要性が従う。

参考文献

[A] 阿部英一: ホップ代数，岩波書店 1977.

[D1] Y.Doi: Braided bialgebras, 第10回代数的組合せ論シンポジウム報告集(岐阜大学 1992), 25-38.

[D2] _____: Braided bialgebras and quadratic bialgebras, Comm. Algebra 21(1993), 1731-1749.

[D3] _____: ホップ代数の環への作用，第38回代数学シンポジウム報告集(東北大学 1993)，31-44.

[DT1] Y. Doi and M. Takeuchi: Cleft comodule algebras for a bialgebra, Comm. Algebra 14(1986), 801-817.

[DT2] ____________________: Multiplication alteration by two-cocycles —The quantum version—, Comm. Algebra 22(1994), 5715-5732.

[DT3] ____________________: Quaternion algebras and Hopf crossed products, Comm. Algebra 23(1995), 3291-3325.

[Dr] V. G. Drinfeld: Quantum groups, Proc. Int. Cong. Math, Berkeley, 1(1986), 789-820.

[H] T. Hayashi: Quantum groups and quantum determinants, J. Algebra 152(1992) 146-165.

[J] 神保道夫: 量子群とヤン・バクスター方程式，シュプリンガー東京，1990.

[LT] R. G. Larson and J. Towber: Twodual classes of bialgebras related to the concepts of "quantum group" and "quantum Lie algebra", Comm. Algebra 19(1991), 3295-3345.

[M] A. Masuoka: Cleft extensions for a Hopf algebra generated by a nearly primitive element, Comm. Algebra 22(1994), 4537-4559.

[Mo] S. Montgomery, Hopf algebras and their actions on rings, CBMS Regional Conference Series in Mathematics 82, AMS, Providence, R.I., 1993.

[S] P. Schauenburg, Hopf bigalois extensions, preprint.

[Sw] M. E. Sweedler: Hopf Algebras, Benjamin, New York, 1969.

[T1] M. Takeuchi: A two-parameter quantization of GL(n), Proc. Japan Acad. 66(1990), 112-114.

[T2] _____: Matric bialgebras and quantum groups, Israel J. Math, 72(1990), 232-251.

[T3] _____: Some topics on $GL_q(n)$, J. Algebra 147(1992), 379-410.

[T4] _____: Cocycle deformations of bialgebras and Hopf algebras, Proc. 28th Symp. Ring Theory, Okayama, 1995.

[T5] _____: テンソル積とホップ代数，数理科学，1995年12月号，56-62.