

離散付値環の上の群スキームの拡大の例

中央大理工 大野俊明 (Toshiaki Ohno)

1 Introduction

A を離散付値環、 m をその極大イデアル、 K を A の商体、 k を A の剰余体とする。
 B/A を不分岐 2 次拡大とする。 $B = A[\theta]/(\theta^2 - m\theta + n)$ と表す。ただし、 $m, n \in A$ 、 $m^2 - 4n \in A^\times$ 。
 $\mathbb{G}_{m,A}$ を A 上の乗法群、 $\mathcal{G}^{(\lambda)}$ をそのモデルとすると

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_{m,A} &= \text{Spec}A[T, T^{-1}] \\ \mathcal{G}^{(\lambda)} &= \text{Spec}A[X, (\lambda X + 1)^{-1}] \end{aligned}$$

ただし、 $\lambda (\neq 0) \in A$ (cf. [1], 2.5)。
 G を \mathbb{G}_m の自明でない B/A -form、 \mathcal{G} を G のモデルとすると

$$\begin{aligned} G &= \text{Spec}A[\tau, \xi]/(\tau^2 - m\tau\xi + n\xi^2 + m^2 - 4n) \\ \mathcal{G} &= \text{Spec}A[w, v]/(\lambda(w^2 - m w v + n v^2) - (m^2 - 4n)v) \end{aligned}$$

ただし、 $\lambda (\neq 0) \in A$ (cf. [1], 2.6)。
また、 $\prod_{B/A} \mathbb{G}_m$ を \mathbb{G}_m の Weil restriction とすると

$$\prod_{B/A} \mathbb{G}_m = \text{Spec}A[X, Y, Z]/(Z(X^2 + mXY + nY^2) - 1)$$

$\mathcal{G}^{(\lambda)}$ に関する拡大のいくつかは関口、諏訪によって与えられている。例えば、 $\text{Ext}^1(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathcal{G}^{(\mu)})$ 等 (cf. [3], [4], [5], [6])。また、Weisfeiler は $\text{Ext}^1(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathbb{G}_{a,A})$ を計算している (cf. [2])。

ここでは、 $\text{Ext}^1(\mathcal{G}, \mathbb{G}_{m,A})$ と $\text{Ext}^1(\mathcal{G}^{(\lambda)}, G)$ が $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ に同型であることを示し、自明でない元がいずれも $\prod_{B/A} \mathbb{G}_m$ のモデルとして得られることを述べる (2 節)。なお、定理 2.1 は諏訪により予想されている。また、 $\text{Ext}^1(\mathcal{G}, G) = 0$ を用い、3 節において、長さ 2 の Witt 群 W_2 から $G \times G$ への変形を議論する。

最後に、関口先生と諏訪先生の多くの助言に対して、感謝の意を表したい。

2 $\text{Ext}^1(\mathcal{G}, \mathbb{G}_{m,A})$, $\text{Ext}^1(\mathcal{G}^{(\lambda)}, G)$

簡単な計算により、以下のことがわかる。

$$\begin{aligned} \text{Ext}^1(G, \mathbb{G}_{m,A}) &\simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ \text{Ext}^1(\mathbb{G}_{m,A}, G) &\simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \end{aligned}$$

自明でない元は、それぞれ $\prod_{B/A} \mathbb{G}_m$ で、

$$0 \rightarrow \mathbb{G}_{m,A} \rightarrow \prod_{B/A} \mathbb{G}_m \rightarrow G \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow G \rightarrow \prod_{B/A} \mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_{m,A} \rightarrow 0$$

である。

実は、これらの拡大は次のように拡張できる。

定理 2.1 (cf. [7], 4.1)

$$\text{Ext}^1(\mathcal{G}, \mathbb{G}_{m,A}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

自明でない元は $\prod_{B/A} \mathbb{G}_m$ の中の $\mathbb{G}_{m,k}$ を何回か Néron blow-up して得られる。

$$0 \rightarrow \mathbb{G}_{m,A} \xrightarrow{\alpha} \overline{\prod_{B/A} \mathbb{G}_m} \xrightarrow{\beta} \mathcal{G} \rightarrow 0$$

ここで、

$$\overline{\prod_{B/A} \mathbb{G}_m} = \text{Spec} A[X, Y, Z] / (Z(X^2 + m\lambda XY + n\lambda^2 Y^2) - 1)$$

である。ただし、 $\lambda (\neq 0) \in A$ 。

準同型 α, β は、次の α^*, β^* によって定義される (cf. [1], 3.1)。

$$\begin{aligned} \alpha^* : A[X, Y, Z] / (Z(X^2 + m\lambda XY + n\lambda^2 Y^2) - 1) \\ \rightarrow A[T, T^{-1}] \end{aligned}$$

$$(X, Y, Z) \mapsto (T, 0, T^{-2})$$

$$\begin{aligned} \beta^* : A[w, v] / (\lambda(w^2 - m w v + n v^2) - (m^2 - 4n)v) \\ \rightarrow A[X, Y, Z] / (Z(X^2 + m\lambda XY + n\lambda^2 Y^2) - 1) \end{aligned}$$

$$(w, -v) \mapsto (XY Z, Y^2 Z)$$

定理 2.2 (cf. [7], 4.2)

$$\text{Ext}^1(\mathcal{G}^{(\lambda)}, G) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

自明でない元は $\prod_{B/A} \mathbb{G}_m$ の中の G_k を何回か Néron blow-up して得られる。

$$0 \rightarrow G \xrightarrow{\gamma} \overline{\prod_{B/A} \mathbb{G}_m} \xrightarrow{\delta} \mathcal{G}^{(\lambda)} \rightarrow 0$$

ここで、

$$\overline{\prod_{B/A} \mathbb{G}_m} = \text{Spec} A[X, Y, Z, (\lambda Z + 1)^{-1}] / (X^2 + mXY + nY^2 + (m^2 - 4n)(\lambda Z + 1))$$

である。ただし、 $\lambda (\neq 0) \in A$ 。

準同型 γ, δ は、次の γ^*, δ^* によって定義される。

$$\begin{aligned} \gamma^* &: A[X, Y, Z, (\lambda Z + 1)^{-1}] / (X^2 + mXY + nY^2 + (m^2 - 4n)(\lambda Z + 1)) \\ &\quad \rightarrow A[\tau, \xi] / (\tau^2 - m\tau\xi + n\xi^2 + m^2 - 4n) \\ &\quad (X, Y, Z) \mapsto (\tau, -\xi, 0) \\ \delta^* &: A[X, (\lambda X + 1)^{-1}] \\ &\quad \rightarrow A[X, Y, Z, (\lambda Z + 1)^{-1}] / (X^2 + mXY + nY^2 + (m^2 - 4n)(\lambda Z + 1)) \\ &\quad X \mapsto Z \end{aligned}$$

3 W_2 から $G \times G$ への変形

定理 3.1 (cf. [7], 4.3)

$$\text{Ext}^1(\mathcal{G}, G) = 0$$

ここで、 \mathcal{G}' を

$$\mathcal{G}' = \text{Spec} A[w, v] / (\mu(w^2 - m w v + n v^2) - (m^2 - 4n)v)$$

とし ($\mu (\neq 0) \in A$)、短完全系列 (cf. [7], 2.3)

$$0 \rightarrow \mathcal{G}' \rightarrow G \rightarrow i_* G_{A/(\mu)} \rightarrow 0$$

から ($i : \text{Spec} A/(\mu) \hookrightarrow \text{Spec} A$)、長完全系列

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \text{Hom}_{A\text{-gr}}(\mathcal{G}, \mathcal{G}') \rightarrow \text{Hom}_{A\text{-gr}}(\mathcal{G}, G) \xrightarrow{\tau} \text{Hom}_{A\text{-gr}}(\mathcal{G}, i_* G_{A/(\mu)}) \\ &\rightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{G}, \mathcal{G}') \rightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{G}, G) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

を得、これに定理 3.1 を適用することにより、次の定理を得る。

定理 3.2 (cf. [8], 2.1)

$$\text{Ext}^1(\mathcal{G}, \mathcal{G}') \simeq M/N$$

ここで、 M, N は

$$\begin{aligned} M &= \{F(X) \mid F(X) \in B/(\mu)[X]^\times, \\ &\quad F_1(v, w), F_2(v, w) \in A/(\mu)[v, w], \\ &\quad F(X \otimes 1 + 1 \otimes X + \lambda X \otimes X) = F(X) \otimes F(X)\} \\ N &= \{a(\lambda X + 1)^n \mid n \in \mathbb{Z}, a \in B^\times, \\ &\quad a(\lambda X + 1)^n + a^{-1}(\lambda X + 1)^{-n}, \\ &\quad \theta a(\lambda X + 1)^n + (m - \theta)a^{-1}(\lambda X + 1)^{-n} \in A[v, w]\} \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned} F_1(v, w) &= F(X) + F(X)^{-1} \\ F_2(v, w) &= \theta F(X) + (m - \theta)F(X)^{-1} \end{aligned}$$

F_1 と F_2 は $\text{Ext}^1(\mathcal{G}, \mathcal{G}')$ の元を定める。それを $E^{(\lambda, \mu; F_1, F_2)}$ と書くことにすると、次の命題を得る。

命題 3.3 (cf. [8], 2.2)

$$E^{(\lambda, \mu; F_1, F_2)} = \text{Spec}A[v, w, v', w']/(P, Q)$$

ただし、

$$\begin{aligned} P &= \lambda(nv^2 - mvw + w^2) - (m^2 - 4n)v \\ Q &= \mu^2(nv'^2 - mv'w' + w'^2) \\ &\quad + \mu\{[2nF_1(v, w) - mF_2(v, w)]v' + [2F_2(v, w) - mF_1(v, w)]w'\} \\ &\quad + nF_1(v, w)^2 - mF_1(v, w)F_2(v, w) + F_2(v, w)^2 + m^2 - 4n \end{aligned}$$

群演算は、

$$\begin{aligned} \text{Spec}A[v, w, v', w']/(P, Q) &\rightarrow G \times G \\ (v_1, w_1, v'_1, w'_1) &\mapsto (\lambda v_1 + 2, \lambda w_1 + m, \mu v'_1 + F_1(v_1, w_1), \mu w'_1 + F_2(v_1, w_1)) \end{aligned}$$

を群準同型にするものとして定義される。

次に、関口の定義した多項式 $\phi(b, \lambda; X)$ の説明をする。

$b, \lambda \in \mathfrak{m} \setminus \{0\}$ に対して、

$$\begin{aligned} (b/\lambda)!_i &= b(b - \lambda)(b - 2\lambda) \cdots (b - (i - 1)\lambda) \\ \left[\begin{matrix} b/\lambda \\ i \end{matrix} \right] &= \lambda^i \binom{b/\lambda}{i} = \frac{(b/\lambda)!_i}{i!} \quad \text{for } i = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

とおく。そして、

$$\phi(b, \lambda; X) = 1 + \left[\begin{matrix} b/\lambda \\ 1 \end{matrix} \right] X + \cdots + \left[\begin{matrix} b/\lambda \\ p-1 \end{matrix} \right] X^{p-1}$$

と定義する。ただし、 $i = 0$ のときは

$$(b/\lambda)!_0 = \left[\begin{matrix} b/\lambda \\ 0 \end{matrix} \right] = 1$$

とする。

ここで、

$$\begin{aligned} \phi_1(b, \lambda; v, w) &= \phi(b, \lambda; X) + \phi(b, \lambda; X)^{-1} \\ \phi_2(b, \lambda; v, w) &= \theta\phi(b, \lambda; X) + (m - \theta)\phi(b, \lambda; X)^{-1} \end{aligned}$$

とおけば、

$$\phi_1(b, \lambda; v, w), \phi_2(b, \lambda; v, w) \in A/(\mu)[v, w]$$

の条件を満たす $\phi(b, \lambda; X)$ は $E^{(\lambda, \mu; \phi_1, \phi_2)}$ を定める。

例えば、 $p = 2$ のときは、 $b, \lambda \in \mathfrak{m} \setminus \{0\}$ に対して、

$$\phi(b, \lambda; X) = 1 + bX$$

とできて、

$$\begin{aligned} \phi_1(b, \lambda; v, w) &= 2 + bv \\ \phi_2(b, \lambda; v, w) &= m + bw \end{aligned}$$

となる。

以上の下に、次の命題が得られる。

命題 3.4 (cf. [8], 3.2) A を混標数、 $\mu|p$ と仮定する。 $\mu|(b/\lambda)!_p$ の条件の下で、次の 2 つは同値。

(i) $(b/\lambda)!_p / \mu \neq 0 \pmod{\mathfrak{m}}$

(ii) $E_s^{(\lambda, \mu; \phi_1, \phi_2)} \simeq W_2$

ただし、 $E_s^{(\lambda, \mu; \phi_1, \phi_2)}$ は $E^{(\lambda, \mu; \phi_1, \phi_2)}$ の special fibre を表すものとする。

参考文献

- [1] W.C.Waterhouse and B.Weisfeiler, One-dimensional affine group schemes, J.Algebra 66(1980), 550-568.
- [2] B.Weisfeiler, On a case of extensions of group schemes, Trans. Amer. Math. Soc. 248, No.1(1979), 171-189.
- [3] T.Sekiguchi, On the Deformations of Witt Groups to Tori II, J. Algebra 138(1991), 273-297.
- [4] T.Sekiguchi and N.Suwa, A case of Extensions of Group Schemes over a Discrete Valuation Ring, Tsukuba J. Math 14, No.2(1990), 459-487.
- [5] T.Sekiguchi and N.Suwa, Some cases of Extensions of Group Schemes over a Discrete Valuation Ring I, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA, Math. 38(1991), 1-45.
- [6] T.Sekiguchi and N.Suwa, Some cases of Extensions of Group Schemes over a Discrete Valuation Ring II, Bull. Facul. Sci. & Eng. CHUO UNIVERSITY 32(1989), 17-35.
- [7] T.Ohno, Some cases of Extensions of twisted Group Schemes over a Discrete Valuation Ring, preprint
- [8] T.Ohno, On the Deformations of Witt Groups to twisted Tori, preprint