数理解析研究所講究録
944巻 1996年 112-117

有限要素法における最近の話題

広島大学理学部　田端正久 (Masahisa Tabata)

1 はじめに

最近の有限要素法に関する研究から，2つの話題を取り上げる．初めの話題は，外部問題を等価な有界領域の問題に変換して解く方法 (Han-Bao[1]) である．新たに必要となる境界条件に，いわゆる DtoN (Dirichlet データを Neumann データに写す作用素) が現れる．この作用素は非局所的 (non-local) なので，対応する剛性行列に非零成分が増える．次の話題は，3次元軸対称問題の解析 (Tabata [2],[3]) である．円筒座標系を用いて，問題は2次元化されるが，そのために軸での特異性を持った微分作用素が現れる．複数の重み付関数空間の設定とそこでの種々の解析が展開される．

以下では，領域Ωの要素分割に関して，正則な分割列 [4] を考え，hは各分割の最大要素長を表すものとする．

2 外部問題の有限要素解析

Ωを $\mathbf{R}^2$の領域で，ある有界閉領域の補集合とする．流速 $u:\Omega\to\mathbf{R}^2$，圧力 $p:\Omega\to\mathbf{R}$ を未知関数とする Stokes 方程式

$$-\nu\Delta u+\mathrm{grad}p=f, \tag{1}$$

$$\mathrm{div}u=0 \tag{2}$$

を考える．ここに，νは粘性係数，$f:\Omega\to\mathbf{R}^2$は与えられた関数であり，$\mathrm{supp}[f]$ はコンパクトであるとする．境界条件は

$$u=0 \qquad (x\in\partial\Omega) \tag{3}$$

であり，

$$|u|=O(1),\quad |p|=O(|x|^{-1}),\quad |\mathrm{grad}p|=O(|x|^{-2})\quad (|x|\to+\infty) \tag{4}$$

となるものを求める．非有界領域Ωでの問題 (1)-(4) を解くのが目標である．

$R>0$を

$$\Omega_a\equiv\{x\in\mathbf{R}^2;\ |x|<R\}\cap\Omega$$

が supp[f] を含むように定める．領域Ωでの解 (u,p) をΩ_aに制限した関数は有界領域Ω_aで問題 (1)-(3) と境界条件

$$\sum_{j=1}^{2} \sigma_{ij}(u,p)n_j = T_i(u) \qquad (x \in \Gamma_R,\ i=1,2) \tag{5}$$

の解になっている [1]．ここに，

$$\Gamma_R = \{x;\ |x| = R\},$$

$$\sigma_{ij}(u,p) = -p\delta_{ij} + 2\nu D_{ij}(u), \quad D_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \tag{6}$$

$$T_i(u)(\theta) = \frac{2\nu}{\pi R}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\theta}\int_0^{2\pi}\frac{\cos(\phi-\theta)}{n}\frac{\partial}{\partial\phi}u_i(R\cos\phi, R\sin\phi)d\phi \quad (i=1,2) \tag{7}$$

である．このようにして，元の問題は有界領域Ω_aの問題に帰着されるが，(5) は非局所境界条件である．

境界条件 (5) は次のようにして導かれる．非有界領域Ωでの解 (u,p) は外部領域

$$\Omega_R = \{x;\ |x| > R\}$$

で方程式

$$-\nu\Delta u + \mathrm{grad}p = 0, \tag{8}$$

と (2) を満たし，遠方での条件 (4) も満足している．$g : \Gamma_R \to \mathbf{R}^2$を与えられた関数とし，境界条件

$$u = g \quad (x \in \Gamma_R) \tag{9}$$

を課すると，この問題は一意的に解を持ち，

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(\theta)r^{-n}, \quad p(r,\theta) = \sum_{n=2}^{+\infty} p_n(\theta)r^{-n},$$

と表現できる．ここに，$u_n(\theta), p_n(\theta)$ は gの Fourier 係数を使って陽に表現できる．したがって，Γ_Rでの応力ベクトルである (5) 式左辺を $g = u_{|\Gamma_R}$の Fourier 係数で表現することができ，それが (7) で与えられる $T_i(u)$ に他ならない．この T_iが Dirichlet データを Neumann データに写す作用素である．

Ω_aでの問題を変分形式で表現するために，関数空間

$$V = \{v \in (H^1(\Omega_a))^2;\ v = 0\ (x \in \partial\Omega_a \backslash \Gamma_R)\}, \quad Q = L^2(\Omega_a)$$

を導入する．変分問題は，$(u,p) \in V \times Q$ で

$$a(u,v) + b(v,p) + a_0(u,v) = \langle f, v\rangle \quad (\forall v \in V), \tag{10}$$

$$b(u,q)=0 \quad (\forall q\in Q) \tag{11}$$

を求めることである．ここに，

$$a(u,v)=2\nu\int_{\Omega_a}\sum_{i,j=1}^{2}D_{ij}(u)D_{ij}(v)\,dx, \quad b(v,q)=-\int_{\Omega_a}q\mathrm{div}v\,dx,$$

$$a_0(u,v)=\frac{2\nu}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos n(\phi-\theta)}{n}\frac{\partial}{\partial\phi}u(R\cos\phi,R\sin\phi)\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}v(R\cos\theta,R\sin\theta)\,d\phi d\theta,$$

$$\langle f,v\rangle=\int_{\Omega_a}fv\,dx$$

である．

補題 1. (i) a_0は $V\times V$上の連続一次形式である．
(ii) a_0は非負

$$a_0(v,v)\geq 0 \quad (\forall v\in V)$$

である．

定理 1 [1]. 任意の $f\in V'$に対して，問題 (10),(11) の解は存在し一意である．

V_h, Q_hを V, Q の有限要素近似空間とする．Nを自然数として，双一次形式 a_0を有限和で近似した

$$a_0^N(u,v)=\frac{2\nu}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos n(\phi-\theta)}{n}\frac{\partial}{\partial\phi}u(R\cos\phi,R\sin\phi)\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}v(R\cos\theta,R\sin\theta)\,d\phi d\theta$$

を定義する．有限要素近似問題は $(u_h,p_h)\in V_h\times Q_h$ で

$$a(u_h,v_h)+b(v_h,p_h)+a_0^N(u_h,v_h)=\langle f,v_h\rangle \quad (\forall v_h\in V_h), \tag{12}$$

$$b(u_h,q_h)=0 \quad (\forall q_h\in Q_h) \tag{13}$$

を満たすものを求めることである．

定理 2 [1]. V_h, Q_hが下限上限条件を満たしていると仮定する，すなわち，ある正定数βが存在して，すべての h に対して，

$$\inf_{q_h\in Q_h}\sup_{v_h\in V_h}\frac{b(v_h,q_h)}{||v_h||_V||q_h||_Q}\geq\beta \tag{14}$$

が成立するとする．さらに，ある正整数 $k(\geq 1)$ が存在して，任意の要素 K上で流速，圧力の近似空間は，それぞれ $k, k-1$ 次の多項式を含んでいるとする，

$$(\mathcal{P}_k)^2\subset V_h(K), \quad \mathcal{P}_{k-1}\subset Q_h(K).$$

このとき，

(i) 任意の $f\in V'$に対して，有限要素解 (u_h^N,p_h^N) は存在して一意である．

(ii) 厳密解 (u,p) が $(H^{k+1}(\Omega_a))^2\times H^k(\Omega_a)$ に属しているとき，誤差評価

$$||(u_h^N,p_h^N)-(u,p)||_{V\times Q}\leq c\{h^k(|u|_{(H^{k+1}(\Omega_a))^2}+|p|_{H^k(\Omega_a)})+\frac{1}{(N+1)^k}|u|_{(H^{k+1/2}(\Gamma_R))^2}\}$$

が成立する．ここに，c は h, N, u, p に依存しない正定数である．

上の定理から，$N \sim 1/h$ なら，

$$||(u_h^N, p_h^N) - (u,p)||_{V\times Q} \leq ch^k(||u||_{(H^{k+1}(\Omega_a))^2} + |p|_{H^k(\Omega_a)})$$

が得られる．

3　軸対称問題の有限要素解析

$\tilde{\Omega}$を 3 次元軸対称領域とし，Stokes 方程式 (1),(2) を考える．流れは軸対称であるとする．Ωを子午面とし，円筒座標系 $x=(x_1,x_2)$ を用いる．x_1は軸からの距離，x_2は軸方向の座標である．このとき，$u=(u_1,u_2)(x)$ を流速，$p=p(x)$ を圧力として，元の問題は 2 次元領域Ωでの問題

$$\nu Lu + \text{grad}\ p = f \qquad (x \in \Omega), \tag{15}$$

$$\text{div}_1\ u = 0 \quad (x \in \Omega) \tag{16}$$

に帰着される．ここに

$$\text{div}_1 u = \frac{1}{x_1}\text{div}(x_1 u), \quad \Delta_1 = \text{div}_1 \cdot \text{grad}, \quad L = \begin{bmatrix} -\Delta_1 + \frac{1}{x_1^2} & 0 \\ 0 & -\Delta_1 \end{bmatrix}$$

である．Ωの境界$\partial\Omega$は 3 つの部分

$$\partial\Omega = \Gamma_0 + \Gamma_1 + \Gamma_2 \quad (\Gamma_0 \equiv \partial\Omega \cap \{x_1 = 0\})$$

に分かれており，境界条件

$$u = g^1 \quad (x \in \Gamma_1), \quad [\sigma(u,p)]n = g^2 \quad (x \in \Gamma_2) \tag{17}$$

が課されている．ここに，$\sigma(u,p)$ は応力テンソル (6) である．

この問題の微分作用素は軸上で特異性をもっている．重み付関数空間

$$X_{1/2}^{\ell,2}(\Omega) = \{v \in \mathcal{D}'(\Omega);\ x_1^{\frac{1}{2}-\ell+|\beta|} D^\beta v \in L^2(\Omega),\ 0 \leq |\beta| \leq \ell\},$$

$$W_{1/2}^{\ell,2}(\Omega) = \{v \in \mathcal{D}'(\Omega);\ x_1^{\frac{1}{2}} D^\beta v \in L^2(\Omega),\ 0 \leq |\beta| \leq \ell\}$$

を導入し，

$$V(g^1) = \{v \in X_{1/2}^{1,2}(\Omega) \times W_{1/2}^{1,2}(\Omega);\ v = g^1\ (x \in \Gamma_1)\ \},$$
$$V = V(0), \quad Q = L_{1/2}^2(\Omega) \equiv W_{1/2}^{0,2}(\Omega)$$

を定義する．

(15)-(17) に対応する変分問題は，$(u,p) \in V(g^1) \times Q$ で

$$a(u,v) + b(v,p) = < f, v > \quad (\forall v \in V), \tag{18}$$

$$b(u,q)=0 \quad (\forall q \in Q) \tag{19}$$

を満たすものを求めることである．ここに，

$$a(u,v)=2\nu\int_\Omega\{\sum_{i,j=1}^{2}D_{ij}(u)D_{ij}(v)+\frac{u_1v_1}{x_1^2}\}x_1dx, \quad b(v,q)=-\int_\Omega q\ \mathrm{div}_1 v\ x_1dx,$$

$$<f,v>=\int_\Omega f\cdot v\ x_1dx+\int_{\Gamma_2}g^2\cdot v\ x_1ds$$

である．

ϕ_i,ψ_jをそれぞれ節点 $P_i,P_j(\in\bar\Omega)$での流速，圧力の基底関数とする．これらは，Descartes 座標系で下限上限条件 (14) を満たしているとする (例えば，P2/P1 要素，P1+/P1 要素 [5])．各要素上で，

$$\mathcal{P}_k\subset\{\phi_i\},\quad \mathcal{P}_{k-1}\subset\{\psi_j\}$$

であると仮定する．ここに，$\mathcal{P}_k$は k次の多項式である (P2/P1要素のときは $k=2$，P1+/P1 要素のときは $k=1$ となる)．

補題 2. 次の式が成立する，

$$\phi_i\in X^{1,2}_{1/2}(\Omega)\quad (P_i\notin\Gamma_0),\quad \phi_i\in W^{1,2}_{1/2}(\Omega)\quad (\forall i),\quad \psi_j\in L^2_{1/2}(\Omega)\quad (\forall j).$$

近似空間 W_h を

$$(\phi_i,0)^T\quad (P_i\notin\Gamma_0),\quad (0,\phi_i)^T\quad (\forall i),$$

の線形結合の全体，Q_h を ψ_j $(\forall j)$ の線形結合の全体とする．$V_h(g^1)$ と V_h を

$$V_h(g^1)=\{v_h\in W_h;\ v_h(P_i)=g^1(P_i)\quad (P_i\in\Gamma_1)\},\qquad V_h=V_h(0)$$

により定義する．

問題 (18),(19) の有限要素近似は，$(u_h,p_h)\in V_h(g^1)\times Q_h$ で

$$a(u_h,v_h)+b(v_h,p_h)=<f,v_h>\quad (\forall v_h\in V_h), \tag{20}$$

$$b(u_h,q_h)=0\qquad (\forall q_h\in Q_h) \tag{21}$$

を満たすものを求めることである．Descartes 座標系のときと同様に，円筒座標系でも上述の要素に対して下限上限条件が成立する．

補題 3 [2]. h に依存しない正定数βが存在して

$$\inf_{q_h\in Q_h}\sup_{v_h\in V_h}\frac{b(v_h,q_h)}{||q_h||_Q||v_h||_V}\geq\beta$$

が成立する．

関数空間 $X^{\ell,2}_{1/2}(\Omega)$ と $W^{\ell,2}_{1/2}(\Omega)$ での近似理論を構成して，次の誤差評価を得ることができる．

<u>定理 3</u> [3]. (i) 問題 (20), (21) の解 (u_h, p_h) は存在して一意である.
(ii) (18),(19) の厳密解 (u,p) が $(W^{k+1,2}_{1/2}(\Omega))^2 \times W^{k,2}_{1/2}(\Omega)$, $k \geq 1$, に属しているなら,

$$||u-u_h||_V + ||p-p_h||_Q \leq ch^k\{|u|_{(W^{k+1,2}_{1/2}(\Omega))^2} + |p|_{W^{k,2}_{1/2}(\Omega)}\}$$

が成立する. ここに, c は h,u,p に依存しない正定数である.

安定化有限要素法 [6] を用いれば下限上限条件は必要でない. 軸対称問題 (18),(19) の安定化有限要素近似に対しても, 定理 3 と同様な結果が得られる [3].

4 おわりに

最近の有限要素近似の研究から 2 つの話題を取り上げた. これらは, 無限領域の問題, 特異性の問題を解決している. どちらの話題でも Stokes 問題を取り扱ったが, 得られた解析結果は, 流体問題だけでなく構造問題でも有用である. その手法は一般的であり, いろいろな方向への発展が可能である.

参考文献

[1] H. Han and W. Bao. The artificial boundary conditions for incompressible viscous materials on an unbounded domain. in preprint, 1995.

[2] M. Tabata. Mixed and stabilized finite element approximations to axisymmetric flow problems. In S. Wagner et al., editors, *Computational Fluid Dynamics '94*, pages 176–180, John Wiley & Sons, Baffins Lane, Chichester, 1994.

[3] M. Tabata. Finite element analysis of axisymmetric flow problems. In *Proceedings of ICIAM 95*, Akademie Verlag, Berlin, to appear.

[4] P. G. Ciarlet. *The Finite Element Method for Elliptic Problems.* North-Holland, Amsterdam, 1978.

[5] V. Girault and P. A. Raviart. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations, Theory and Algorithms.* Springer, Berlin, 1986. Springer Series in Computational Mathematics, Vol. 5.

[6] L. P. Franca, S. L. Frey, and T. J. R. Hughes. Stabilized finite element methods: I. Application to the advective-diffusive model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 95:253–276, 1992.