数理解析研究所講究録
944巻 1996年 41-49

Stokes方程式の有限要素解に対するa priori誤差評価

A Priori Error Estimate for Finite Element Solutions of the Stokes Equations

中尾 充宏 [†] 山本 野人 [†] 渡部 善隆 [‡]
Mitsuhiro T.Nakao Nobito Yamamoto Yoshitaka Watanabe

[†] 九州大学大学院数理学研究科 [‡] 九州大学大型計算機センター

1 introduction

我々は[11]において，Stokes方程式の弱解の存在を保証する条件であるinf-sup conditionに関わる定数を数値評価することによって，厳密な意味でのa posteriori誤差の数値的保証を与えた．本稿では，このa posteriori誤差評価と同様な手法を用いることにより，Stokes方程式の有限要素解に対する構成的a priori誤差評価が得られることを示し，あわせて数値例を与える．

次の同次境界条件を持つStokes問題を考える:

$$\begin{cases} -\nu\Delta u+\nabla p=f & \text{in} \quad \Omega, \\ \operatorname{div} u=0 & \text{in} \quad \Omega, \\ u=0 & \text{on} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

領域 Ω は $\mathbb{R}^2$ の凸多角形，$u=(u_1,u_2)^T$, $f=(f_1,f_2)^T$ は2次元ベクトル値関数, $\nu>0$ である．なお，以下“T”は転置記号とする．$H^k(\Omega)$ を通常の k 次Sobolev空間とし，関数空間を以下で定義する．

$$\begin{aligned} H_0^1(\Omega) &\equiv \{v\in H^1(\Omega)\ ;\ v=0 \text{ on } \partial\Omega\}, \\ L_0^2(\Omega) &\equiv \{v\in L^2(\Omega)\ ;\ \int_\Omega v\,dx\,dy=0\}, \\ \mathcal{S} &\equiv H_0^1(\Omega)^2\times L_0^2(\Omega). \end{aligned}$$

さらに $(\cdot,\cdot)$ を Ω 上の L^2- 内積とし，normを以下で定める．

$$\begin{aligned} |\cdot|_0 &: \ L^2(\Omega)\text{-norm, } |v|_0{}^2=\int_\Omega v^2\,dxdy. \\ |\cdot|_1 &: \ H_0^1(\Omega)\text{-seminorm, } |v|_1=|\nabla v|_0. \end{aligned}$$

このとき，$\mathcal{S}\times\mathcal{S}$ 上のbilinear form $\mathcal{L}$ を

$$\mathcal{L}(\,[u,p],[v,q]\,)\equiv\nu(\,\nabla u,\nabla v\,)-(\,p,\operatorname{div} v\,)-(\,q,\operatorname{div} u\,) \qquad [u,p],\,[v,q]\in\mathcal{S}. \tag{1.2}$$

で定義するとき，Stokes方程式(1.1)は次の同値な問題に置き換えられる：

$$\begin{aligned} &\text{find } \ [u,p]\in\mathcal{S} \ \text{ such that} \\ &\mathcal{L}(\,[u,p],[v,q]\,)=(\,f,v\,) \qquad \forall[v,q]\in\mathcal{S}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

よく知られているように，(1.3) は $\mathcal{S}$ 内に一意解を持つ．

また，[11] の議論から，任意の $[u,p]\in\mathcal{S}$ に対し

$$\delta(u,p)\equiv \sup_{\substack{[v,q]\in\mathcal{S}\\ [v,q]\neq 0}} \frac{\mathcal{L}([u,p],[v,q])}{|v|_1+|q|_0}$$

とおくとき，次の評価が成り立つ：

$$\begin{cases} |u|_1 \le \left(\dfrac{1}{\nu^2}+\dfrac{1}{\beta^2}\right)^{\frac{1}{2}} \delta(u,p), \\ |p|_0 \le \left(\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{\nu}{\beta^2}\right) \delta(u,p). \end{cases} \tag{1.4}$$

ここで，$\beta > 0$ は領域 Ω にのみ依存する定数であり，数値的に算定可能であるとする．実際，Ω が正方領域の場合は $1/\beta < 2.614$，また，正 n 角形のときは $\dfrac{1}{\beta}=\sqrt{\dfrac{2}{1-\sin(\pi/n)}}$ となる (cf. [3])．

2 有限要素解と a priori 誤差評価

この節では，(1.3) の有限要素近似解に対し，(1.4) の評価を用いた真の解と離散解との定量的 a priori な誤差評価を導く．まず，有限要素近似空間を設定する．

$\mathcal{T}_h$ を領域 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ の三角形または四角形分割，h を $\mathcal{T}_h$ の scale parameter とする．$h>0$ は領域の分割幅を通常表す．次に，$X_h\subset H_0^1(\Omega)\cap C(\bar\Omega)$ を速度場 u の各成分を近似する有限要素部分空間，$Y_h\subset L_0^2(\Omega)\cap C(\bar\Omega)$ を圧力場 p を近似する有限要素部分空間とする．

続いて，無限次元空間から有限次元空間への projection を定義する．P_0 は $L^2(\Omega)$ から X_h への L^2-projection，P_1 を $H_0^1(\Omega)$ から X_h への $H_0^1(\Omega)$-projection とする．

(1.3) の離散解は次で与える：

$$\begin{aligned} &\text{find}\ \ [u_h,p_h]\in X_h^2\times Y_h\ \ \text{such that} \\ &\mathcal{L}(\,[u_h,p_h],[v_h,q_h]\,)=(\,f,v_h\,) \qquad \forall[v_h,q_h]\in X_h^2\times Y_h. \end{aligned} \tag{2.1}$$

また，X_h の近似性として次を仮定する：

$$\inf_{\xi\in X_h}|v-\xi|_1\le C_0h|v|_2 \qquad \forall v\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega). \tag{2.2}$$

ただし，C_0 は数値的に算定可能な正定数，$|\cdot|$ は Ω 上の H^2-seminorm とする．仮定 (2.2) は，一般の有限要素空間で成立することが知られている．また，C_0 が数値的に決められるような X_h の例は多い．例えば，1 次元の区分 1 次要素の空間では $C_0=1/\pi$ となる ([6])．また，1 次元の区分 2 次要素のテンソル積として定義される 2 次元矩形要素では，一様メッシュの場合 $C_0=1/(2\pi)$，また，三角形一様分割の区分 1 次要素では $C_0\le 0.81$ となることがいえる．

(2.2) から，projection の性質と Aubin-Nitsche's trick を用いると，$\forall v\in H_0^1(\Omega)$, $v_h=P_1v$ とおくと，以下の不等式が成立する：

$$|v-v_h|_0\le C_0h|v|_1. \tag{2.3}$$

ここで，(1.3) の解 $[u,p]$ と (2.1) の有限要素解 $[u_h,p_h]$ の誤差を

$$\begin{cases} e_h\equiv u-u_h \\ \varepsilon_h\equiv p-p_h \end{cases}$$

とおくと，

$$\mathcal{L}([e_h,\varepsilon_h],[v,q])=\nu(\,\nabla(u-u_h),\nabla(v-\xi_h)\,)-(\,p-p_h,\operatorname{div}(v-\xi_h)\,)+(\,q,\operatorname{div}u_h\,)$$

が各 $[v,q]\in\mathcal{S}$, $\xi_h\in X_h^2$ について成立する．ここで，ξ_h を $v=(v_1,v_2)^T$ の各成分の H_0^1-projection として

$$v_h=(P_1v_1,P_1v_2)^T$$

とおけば，H_0^1-projection の性質より

$$\mathcal{L}([e_h,\varepsilon_h],[v,q])=\nu(\nabla u,\nabla(v-v_h))-(p-p_h,\operatorname{div}(v-v_h))+(q,\operatorname{div}u_h)$$

が成り立つ．従って，Green の公式，Schwarz の不等式，(2.3) より，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}([e_h,\varepsilon_h],[v,q]) &= (f-\nabla p_h,v-v_h)-(q,\operatorname{div}u_h)\\ &\le |f-\nabla p_h|_0\,C_0h\,|v|_1+|q|_0\,|\operatorname{div}u_h|_0\\ &\le (C_0h|f-\nabla p_h|_0+|\operatorname{div}u_h|_0)(|v|_1+|q|_0)\end{aligned}$$

を得る．以上より，次の lemma が成立する．

Lemma 2.1 $0\ne\forall[v,q]\in\mathcal{S}$,

$$\frac{\mathcal{L}([e_h,\varepsilon_h],[v,q])}{|v|_1+|q|_0}\le C_0h|f-\nabla p_h|_0+|\operatorname{div}u_h|_0.$$

次に，$f\in L^2(\Omega)^2$ に対し，$P_0f\in X_h^2$ を成分毎の L^2-projection として

$$P_0f=(P_0f_1,P_0f_2)^T$$

で定義する．このとき，L^2-projection の性質から

$$|f-P_0f|_0{}^2=|f|_0{}^2-|P_0f|_0{}^2, \tag{2.4}$$

が成り立つことから，ある $0\le\theta\le\pi/2$ を用いることで，$|P_0f|_0$ と $|f-P_0f|_0$ は

$$\begin{cases}|P_0f|_0=|f|_0\sin\theta,\\ |f-P_0f|_0=|f|_0\cos\theta.\end{cases} \tag{2.5}$$

と書ける．

次に，定数 K_1, K_2 が f に依らずに決まり，

$$|\operatorname{div}u_h|_0\le K_1|P_0f|_0, \tag{2.6}$$

$$|-\nabla p_h+P_0f|_0\le K_2|P_0f|_0. \tag{2.7}$$

を満足すると仮定する．具体的な K_1, K_2 の構成方法は次節で考察する．このとき，Stokes 方程式に対する a priori 評価が以下のように成り立つ．

Theorem 2.1 (a priori error estimate) $\forall f\in L^2(\Omega)^2$,

$$\begin{cases}|u-u_h|_1\le\left(\dfrac{1}{\nu^2}+\dfrac{1}{\beta^2}\right)^{\frac12}C(h)\,|f|_0,\\[2ex] |p-p_h|_0\le\left(\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{\nu}{\beta^2}\right)C(h)\,|f|_0,\end{cases} \tag{2.8}$$

where

$$C(h)\equiv\sqrt{(C_0hK_2+K_1)^2+(C_0h)^2}. \tag{2.9}$$

Proof. 任意の $f \in L^2(\Omega)^2$ に対し，Lemma 2.1, (2.6), (2.7) および (2.5) より

$$\begin{aligned}
\delta(e_h, r_h) &\leq C_0 h(\,|-\nabla p_h + P_0 f|_0 + |f - P_0 f|_0\,) + K_1 |P_0 f|_0 \\
&\leq C_0 h(\,K_2 |P_0 f|_0 + |f - P_0 f|_0\,) + K_1 |P_0 f|_0 \\
&= (\,(C_0 h K_2 + K_1)\sin\theta + C_0 h \cos\theta)\,|f|_0 \\
&\leq (\,(C_0 h K_2 + K_1)^2 + (C_0 h)^2)^{\frac{1}{2}}\,|f|_0 \\
&= C(h)\,|f|_0.
\end{aligned}$$

よって，(1.4) より結論が得られる. □

3 定数 K_1, K_2 の評価

この節では，(2.6), (2.7) を満足する定数 K_1, K_2 の評価方法を述べる．これらの定数が数値的に評価可能であれば，(2.9) によって $C(h)$ が求まり，定量的な a priori 誤差評価が可能となる．

まず，有限要素空間 X_h, Y_h の次元をそれぞれ n, m とし，基底をそれぞれ $\{\phi_j\}_{1\leq j\leq n}$, $\{\psi_j\}_{1\leq j\leq m}$ で定義する．このとき，実係数 $\{a_j^{(1)}\}_{1\leq j\leq n}$, $\{a_j^{(2)}\}_{1\leq j\leq n}$ および $\{b_j\}_{1\leq j\leq m}$ によって，有限要素近似解 $u_h = (u_h^{(1)}, u_h^{(2)})^T \in X_h^2$, $p_h \in Y_h$ は

$$\begin{aligned}
u_h^{(1)} &= \sum_{i=1}^{n} a_i^{(1)} \phi_i, \\
u_h^{(2)} &= \sum_{i=1}^{n} a_i^{(2)} \phi_i, \\
p_h &= \sum_{i=1}^{m} b_i \psi_i.
\end{aligned}$$

と一意に表現される．従って，(2.1) は

$$\left\{\begin{array}{lcll}
\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i^{(1)} (\,\nabla\phi_i, \nabla\phi_j\,) - \sum_{i=1}^{n} b_i\,(\,\psi_i, \frac{\partial \phi_j}{\partial x}\,) &=& (\,f_1, \phi_j\,) & 1 \leq j \leq n, \\
\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i^{(2)} (\,\nabla\phi_i, \nabla\phi_j\,) - \sum_{i=1}^{n} b_i\,(\,\psi_i, \frac{\partial \phi_j}{\partial y}\,) &=& (\,f_2, \phi_j\,) & 1 \leq j \leq n, \\
\displaystyle -\sum_{i=1}^{m} a_i^{(1)} (\,\psi_j, \frac{\partial \phi_i}{\partial x}\,) - \sum_{i=1}^{m} a_i^{(2)} (\,\psi_j, \frac{\partial \phi_i}{\partial y}\,) &=& 0 & 1 \leq j \leq m.
\end{array}\right. \tag{3.1}$$

を満たす $\{a_j^{(1)}\}$, $\{a_j^{(2)}\}$, $\{b_j\}$ を求めることと同値となる．

ここで，ベクトルを以下で定義する：

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_1 &= (a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \ldots, a_n^{(1)})_{1\times n}, \\
\mathbf{a}_2 &= (a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, \ldots, a_n^{(2)})_{1\times n}, \\
\mathbf{a} &= (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)_{1\times 2n}, \\
\mathbf{b} &= (b_1, b_2, \ldots, b_m)_{1\times m}, \\
\mathbf{f}_1 &= (\,(\,f^{(1)}, \phi_1\,), (\,f^{(1)}, \phi_2\,), \ldots, (\,f^{(1)}, \phi_n\,)\,)_{n\times 1}^T, \\
\mathbf{f}_2 &= (\,(\,f^{(2)}, \phi_1\,), (\,f^{(2)}, \phi_2\,), \ldots, (\,f^{(2)}, \phi_n\,)\,)_{n\times 1}^T, \\
\mathbf{f} &= \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{pmatrix}_{2n\times 1}.
\end{aligned}$$

さらに，行列を以下で定義する：

$$
\begin{aligned}
(D_0)_{ij} &= (\nabla\phi_i, \nabla\phi_j)_{n\times n},\\
(D)_{ij} &= \begin{pmatrix} D_0 & 0 \\ 0 & D_0 \end{pmatrix}_{2n\times 2n},\\
(E_x)_{ij} &= (\psi_i, \frac{\partial\phi_j}{\partial x}) = -(\frac{\partial\psi_i}{\partial x}, \phi_j)_{m\times n},\\
(E_y)_{ij} &= (\psi_i, \frac{\partial\phi_j}{\partial y}) = -(\frac{\partial\psi_i}{\partial y}, \phi_j)_{m\times n},\\
(E)_{ij} &= (E_x \;\; E_y)_{m\times 2n},\\
(G)_{ij} &= \begin{pmatrix} D & -E^T \\ -E & 0 \end{pmatrix}_{(2n+m)\times(2n+m)}.
\end{aligned}
$$

以上の定義により，(3.1) は連立 1 次方程式

$$
G\begin{pmatrix} \mathbf{a}^T \\ \mathbf{b}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.2}
$$

に帰着される．さらに，G の可逆性を仮定し，逆行列 G^{-1} を

$$
(G^{-1})_{ij} = \begin{pmatrix} G_a & G_b^T \\ G_b & G_* \end{pmatrix}_{2n\times 2n},
$$

の形に分解する．G_a, G_b および G_* はそれぞれ $2n\times 2n$, $m\times 2n$, $m\times m$ 行列として定義される．従って，与えらえた $f\in L^2(\Omega)^2$ に対し，(2.1) を満たす有限要素解 $[u_h, p_h]\in X_h^2\times Y_h$ は，次の演算で与えられる：

$$
\begin{cases} \mathbf{a}^T = G_a\mathbf{f}, \\ \mathbf{b}^T = G_b\mathbf{f}. \end{cases} \tag{3.3}
$$

次に，各 L^2-norm $|P_0 f|_0$, $|\mathrm{div}\, u_h|_0$, $|-\nabla p_h + P_0 f|_0$ を行列の 2 次形式で表現することで，K_1, K_2 の評価式を求める．

Lemma 3.1 $n\times n$ 行列 L および $2n\times 2n$ 行列 F を

$$
\begin{aligned}
(L)_{ij} &= (\phi_i, \phi_j)_{n\times n},\\
(F)_{ij} &= \begin{pmatrix} L^{-1} & 0 \\ 0 & L^{-1} \end{pmatrix}_{2n\times 2n}.
\end{aligned}
$$

で定義する．このとき，$|P_0 f|_0{}^2$ は

$$
|P_0 f|_0{}^2 = \mathbf{f}^T F\mathbf{f} \tag{3.4}
$$

と表現される．

Proof. $\forall f = (f_1, f_2)^T$ は，実係数 $\{q_j^{(1)}\}_{1\le j\le n}$，$\{q_j^{(2)}\}_{1\le j\le n}$ を用いて

$$
P_0 f_1 = \sum_{i=1}^{n} q_i^{(1)}\phi_i, \qquad P_0 f_2 = \sum_{i=1}^{n} q_i^{(2)}\phi_i.
$$

と書ける．従って

$$\mathbf{q_1} = (q_1^{(1)}, \ldots, q_n^{(1)})_{1\times n}, \qquad \mathbf{q_2} = (q_1^{(2)}, \ldots, q_n^{(2)})_{1\times n}.$$

とおけば，L^2-projection の定義より，$1 \le j \le n$ に対し

$$\sum_{i=1}^{n} q_i^{(1)} (\,\phi_i, \phi_j\,) = (\,f_1, \phi_j\,),$$

$$\sum_{i=1}^{n} q_i^{(2)} (\,\phi_i, \phi_j\,) = (\,f_2, \phi_j\,)$$

であるので，

$$\mathbf{q}_1^T = L^{-1}\,\mathbf{f}_1, \qquad \mathbf{q}_2^T = L^{-1}\,\mathbf{f}_2.$$

を得る．よって

$$\begin{aligned}
|P_0 f|_0{}^2 &= (\,P_0 f_1, P_0 f_1\,) + (\,P_0 f_2, P_0 f_2\,) \\
&= \sum_{i=1}^{n} q_i^{(1)}(\,\phi_i, P_0 f_1\,) + \sum_{i=1}^{n} q_i^{(2)}(\,\phi_i, P_0 f_2\,) \\
&= \mathbf{q}_1 L \mathbf{q}_1^T + \mathbf{q}_2 L \mathbf{q}_2^T \\
&= \mathbf{f}_1{}^T L^{-1} L L^{-1} \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2{}^T L^{-1} L L^{-1} \mathbf{f}_2 \\
&= \mathbf{f}^T F\, \mathbf{f}.
\end{aligned}$$

□

次に，$n \times n$ 行列 D^{xx}, D^{xy}, D^{yy} を

$$\begin{aligned}
(D^{xx})_{ij} &= \left(\,\frac{\partial \phi_i}{\partial x}, \frac{\partial \phi_j}{\partial x}\,\right)_{n\times n}, \\
(D^{xy})_{ij} &= \left(\,\frac{\partial \phi_i}{\partial x}, \frac{\partial \phi_j}{\partial y}\,\right)_{n\times n}, \\
(D^{yy})_{ij} &= \left(\,\frac{\partial \phi_i}{\partial y}, \frac{\partial \phi_j}{\partial y}\,\right)_{n\times n}.
\end{aligned}$$

で，さらに $2n \times 2n$ 行列 Q_1 を

$$(Q_1)_{ij} = \begin{pmatrix} D^{xx} & D^{xy} \\ (D^{xy})^T & D^{yy} \end{pmatrix}_{2n\times 2n}.$$

で定義する．このとき，次が成り立つ．

Lemma 3.2 $2n \times 2n$ 行列 A_1 を

$$(A_1)_{ij} = (\,G_a Q_1 G_a\,)_{2n\times 2n}.$$

で定める．このとき K_1 は行列 A_1, F に対し，次で評価される

$$K_1 \le \left(\sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{2n}} \frac{\mathbf{x}^T A_1\,\mathbf{x}}{\mathbf{x}^T F\,\mathbf{x}}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.5}$$

Proof. 行列の定義と (3.3) より

$$
\begin{aligned}
|\operatorname{div} u_h|_0{}^2 &= (\operatorname{div} u_h, \operatorname{div} u_h) \\
&= (\frac{\partial u_h^{(1)}}{\partial x}, \frac{\partial u_h^{(1)}}{\partial x}) + (\frac{\partial u_h^{(1)}}{\partial x}, \frac{\partial u_h^{(2)}}{\partial y}) + (\frac{\partial u_h^{(2)}}{\partial y}, \frac{\partial u_h^{(1)}}{\partial x}) + (\frac{\partial u_h^{(2)}}{\partial y}, \frac{\partial u_h^{(2)}}{\partial y}) \\
&= \mathbf{a}_1 D^{xx} \mathbf{a}_1{}^T + \mathbf{a}_1 D^{xy} \mathbf{a}_2{}^T + \mathbf{a}_2 (D^{xy})^T \mathbf{a}_1{}^T + \mathbf{a}_2 D^{yy} \mathbf{a}_2{}^T \\
&= \mathbf{a} Q_1 \mathbf{a}^T \\
&= \mathbf{f}^T G_a Q_1 G_a \mathbf{f} \\
&= \mathbf{f}^T A_1 \mathbf{f}.
\end{aligned}
$$

従って結論が得られる. □

次に, $m \times m$ 行列 $\tilde{D}$ を

$$(\tilde{D})_{ij} = (\nabla\psi_i, \nabla\psi_j)_{m\times m}$$

とするとき, K_2 について次の lemma が成り立つ.

Lemma 3.3 $2n \times 2n$ 行列 A_2 を

$$(A_2)_{ij} = (G_b^T EF + (G_b^T EF)^T + G_b^T \tilde{D} G_b + F)_{2n\times 2n}.$$

で定義する. このとき K_2 は行列 A_2, F に対し, 次で評価される

$$K_2 \le \left(\sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{2n}} \frac{\mathbf{x}^T A_2 \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T F \mathbf{x}} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.6}$$

Proof. $|-\nabla p_h + P_0 f|_0{}^2$ を展開することにより,

$$
\begin{aligned}
|-\nabla p_h + P_0 f|_0{}^2 &= (\nabla p_h, \nabla p_h) - (\nabla p_h, P_0 f) - (P_0 f, \nabla p_h) + |P_0 f|_0{}^2 \\
&= \mathbf{b} EF \mathbf{f} + \mathbf{f}^T F^T E^T \mathbf{b} + \mathbf{b} \tilde{D} \mathbf{b}^T + \mathbf{f}^T F \mathbf{f} \\
&= \mathbf{f}^T G_b^T EF \mathbf{f} + \mathbf{f}^T (G_b^T EF)^T \mathbf{f} + \mathbf{f}^T G_b^T \tilde{D} G_b \mathbf{f} + \mathbf{f}^T F \mathbf{f} \\
&= \mathbf{f}^T A_2 \mathbf{f}.
\end{aligned}
$$

従って結論が得られる. □

(3.5), (3.6) の評価は, A を対称行列, B を対称正定値行列とするときの一般固有値問題

$$Ax = \lambda Bx$$

の最大固有値を求める問題に帰着することができ, [10] で提案された手法を用いることで, これらの値が評価できる.

4 数値例

領域 Ω は $(0,1)\times(0,1)$ の正方領域, $\nu = 1$ として, 以下の Stokes 方程式を考える :

$$
\begin{cases}
-\Delta u + \nabla p = f & \text{in} \quad \Omega = (0,1)\times(0,1), \\
\operatorname{div} u = 0 & \text{in} \quad \Omega. \\
u = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega.
\end{cases} \tag{4.1}
$$

正方領域 Ω は矩形要素に等分割する. x(または y) 軸方向の分割数を N とおく. 分割の parameter h は $h = 1/N$ となる. 有限要素空間 $X_h \subset H_0^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ の基底は区分的 2 次要素 (piecewise bi-quadratic) を用いる. また, $Y_h \subset L^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ の基底は区分的 1 次要素 (piecewise bilinear) を用いる. 区分的 2 次の基底も, 同じく 1 次元の区分 2 次要素のテンソル積で定義する.

数値計算はFUJITSU VP2600/10，言語はFortran，精度は倍精度計算で行なった．もちろん，数値結果には丸め誤差が混入しているため，正確なa priori評価を得るためには有理数演算，または精度保証付きソフトウェアでの計算が必要である．

図1は(2.9)の速度・圧力に対するa priori定数

$$\left(\frac{1}{\nu^2}+\frac{1}{\beta^2}\right)^{1/2} C(h) \quad \text{and} \quad \left(\frac{1}{\beta}+\frac{\nu}{\beta^2}\right) C(h),$$

の値をプロットしたものである．

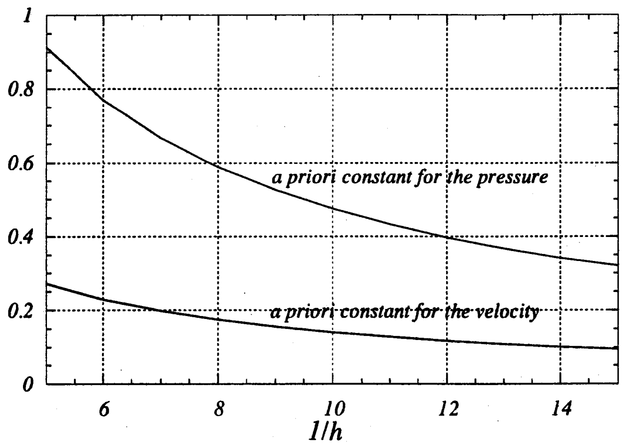

図 1: A priori 誤差評価

また，図2は

$$\begin{aligned} u_1(x,y) &= 20x^2(1-x)^2y(1-y)(1-2y), \\ u_2(x,y) &= 20y^2(1-y)^2x(1-x)(1-2x), \end{aligned}$$

および

$$p(x,y) = 4x(-1+2y)(10x^2-15x^3+6x^4-10y+30xy-20x^2y+10y^2-30xy^2+20x^2y^2)$$

が(4.1)の解となるようにfを選んだ場合の相対誤差を，[11]の手法を用いて計算したa posteriori誤差評価と比較したものである．

参考文献

[1] Bank, R. E., Welfert, B. D. : A Posteriori Error Estimates for the Stokes Problem, *SIAM J. Numer. Anal.*, **28**, 591–623 (1991).

[2] Grisvard, P. : *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, Pitman, Boston (1985).

[3] Horgan, C. O., Payne, L. E. : On Inequalities of Korn, Friedrichs and Babuška-Aziz, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **82**, 165–179 (1983).

[4] Nakao, M. T. : A Numerical Approach to the Proof of Existence of Solutions for Elliptic Problems, *Japan J. Appl. Math.*, **5**, 313–332 (1988).

[5] Girault, V., Raviart, P. A. : *Finite Element Approximation of the Navier-Stokes equations*, Series in Computational Mathematics. Berlin Heidelberg New York : Springer (1986).

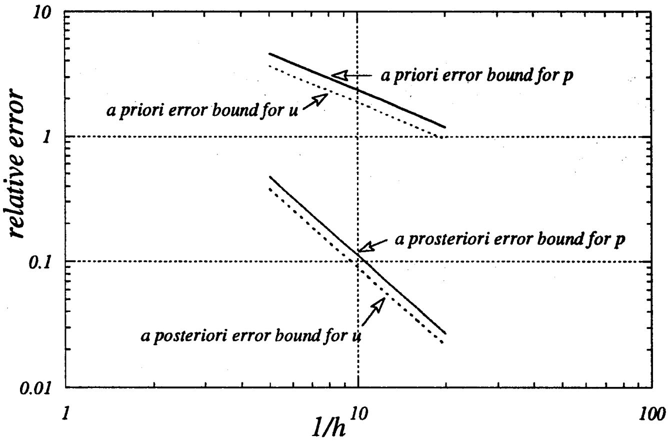

図 2: a posteriori および a priori 誤差評価の比較

[6] Schultz, M. H. : *Spline Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jergey (1973).

[7] Verfürth, R. : A Posteriori Error Estimators for the Stokes Equations, *Numer. Math.*, **55**, 309–325 (1989).

[8] Verfürth, R. : A Posteriori Error Estimators for the Stokes Equations II non-conforming discretizations, *Numer. Math.*, **60**, 235–249 (1991).

[9] Verfürth, R. : A Posteriori Error Estimates for Nonlinear Problems. Finite Element Discretizations of Elliptic Equations. *Math. Comp.*, **62**, 445–475 (1994).

[10] Yamamoto, N., Nakao, M. T. : Numerical Verifications of Solutions for Elliptic Equations in Nonconvex Polygonal Domains. *Numer. Math.*, **65**, 503–521 (1993).

[11] 渡部 善隆, 山本 野人, 中尾 充宏 : Stokes 方程式の有限要素解に対する a posteriori 誤差評価, 短期共同研究・数値計算における品質保証とその応用 – 感度解析から証明まで –, 京都大学数理解析研究所講究録, Vol.928 (1995) pp.20–31.