数理解析研究所講究録
945 巻 1996 年 79-82

Controllability of coupled Euler-Bernoulli beams

埼玉大学大学院理工学研究科　　大成　承 (Sho Ohnari)

0. 序

棒の自由振動を記述する偏微分方程式の 1 つにオイラー・ベルヌーイ・ビーム方程式がある. 位置 $x(0\leq x\leq 1)$, 時刻 $t(0\leq t\leq T)$ における棒の静止状態からの変位を $y(x,t)$ とすると, オイラー・ベルヌーイ・ビーム方程式は次のようになる :

$$my_{tt}(x,t)+\alpha y_{xxxx}(x,t)=0, \qquad x\in(0,1), t\in(0,T).$$

ここで m,α は正の定数で, 棒の材質による. このように振動している棒に外力 f を加えて棒の振動を制御できるか, 例えば静止させられるかという問題を可制御問題という.

外力 f を棒の端, すなはち $x=1$ で与えた時の棒 (オイラー・ベルヌーイ・ビーム方程式) の可制御性の結果は数多くある ([2]参照).

[3]においていくつかの棒 (ティモシェンコ・ビーム方程式) がネットワーク状につなげられたシステムの可制御性が考察されていた. この場合にも制御が棒の端にある時システムは可制御であるが, 特に制御が棒と棒のつなぎ目のみにある場合には可制御でないシステムの例が示されていた. ここではネットワークとしてもっとも簡単な 2 つの棒 (オイラー・ベルヌーイ・ビーム方程式) が直線状につながっている場合を考え, そのつなぎ目に制御を課した時の棒の可制御性を考察する.

1. 定義と結果

棒のつなぎ目 $(x=m)$ において加える外力として棒の曲げモーメント f_1 と棒のせん断力 f_2 を考える. さらに棒の両端 $(x=0,1)$ は固定してあるとするとシステムは以下のように記述される.

$$(1) \qquad \begin{cases} m_1y_{tt}+\alpha_1y_{xxxx}=0, & x\in(0,m), t\in(0,T),\\ m_2y_{tt}+\alpha_2y_{xxxx}=0, & x\in(m,1), t\in(0,T),\end{cases}$$

$$(2) \qquad y(0,t)=y_{xx}(0,t)=y(1,t)=y_{xx}(1,t)=0, \qquad t\in(0,T),$$

$$(3) \qquad \begin{cases} y(m^-,t)=y(m^+,t), y_x(m^-,t)=y_x(m^+,t),\\ \alpha_1y_{xx}(m^-,t)-\alpha_2y_{xx}(m^+,t)=f_1(t), \qquad t\in(0,T).\\ \alpha_1y_{xxx}(m^-,t)-\alpha_2y_{xxx}(m^+,t)=f_2(t),\end{cases}$$

ここで $m_i,\alpha_i,i=1,2$ は正の定数とする. 制御関数 $f=(f_1,f_2)$ は制御空間 $V=L^2(0,T)\times L^2(0,T)$ に属するものとする. また, システムの状態空間 X を $H_0^1(0,1)\times H^{-1}(0,1)$ とする. ただし $H^{-1}(0,1)$ は $H_0^1(0,1)$ の双対空間. 初期条件を初期データ $(y^0,y^1)\in X$ に対して

$$(4) \qquad y(x,0)=y^0(x), \quad y_t(x,0)=y^1(x), \qquad x\in(0,1)$$

で与えると, 初期値境界値問題 (1)(2)(3)(4) の解は一意に存在する.

定義（完全可制御性） 任意の初期データ $(y^0, y^1) \in X$に対して, 制御関数 $f \in V$が存在して, 対応するシステム (1)(2)(3)(4) の解 $y = y(x,t)$ が終期条件

$$y(x,T) = y_t(x,T) = 0, \qquad x \in (0,1)$$

を満たすように出来るとき, システム (1)(2)(3)(4) は**完全可制御**であるという.

定義（近似可制御性） 任意の初期データ $(y^0, y^1) \in X$と任意の正数εに対して, 制御関数 $f \in V$が存在して, 対応するシステム (1)(2)(3)(4) の解 $y = y(x,t)$ が

$$\|(y(\cdot,T), y_t(\cdot,T))\|_X < \varepsilon$$

を満たすように出来るとき, システム (1)(2)(3)(4) は**近似可制御**であるという.

係数 $m_i, \alpha_i, i = 1,2$ は次の仮定を満たすとする:

$$m_1\alpha_1 = m_2\alpha_2.$$

更に

$$\Lambda = \frac{(1-m)\left(\frac{m_2}{\alpha_2}\right)^{\frac{1}{4}}}{m\left(\frac{m_1}{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{4}}}$$

とおく. このとき次の結果を得た.

結果 係数 $m_i, \alpha_i, i = 1,2$ が上の仮定を満たすとし, Tは任意の正数とする. このときΛの値とシステムの可制御性の関係は次のようになる.
(i) 制御 $f = (f_1, 0)$ の時

Λ	$\frac{\text{奇数}}{\text{奇数}}$	$\frac{\text{奇数}}{\text{偶数}}, \frac{\text{偶数}}{\text{奇数}}$	無理数
システム	近似可制御でない	完全可制御	近似可制御

(ii) 制御 $f = (0, f_2)$ の時

Λ	有理数	無理数
システム	近似可制御でない	近似可制御（完全可制御でない）

(iii) 制御 $f = (f_1, f_2)$ の時

システムは近似可制御

2. n 個のつながった棒のシステム

この節では n 個の棒が直線状につなげられているシステムをつなぎ目において制御をした時の近似可制御性について考察する. 次のシステムを考える.

(5) $$m_i y_{tt}(x,t) + \alpha_i y_{xxxx}(x,t) = 0, \qquad x \in (x_{i-1}, x_i), t \in (0,T), i = 1,\cdots,n$$

(6) $$y(0,t) = y_x(0,t) = y(1,t) = y_x(1,t) = 0 \qquad t \in (0,T),$$

(7) $$\begin{cases} y(x_i^-,t) = y(x_i^+,t), y_x(x_i^-,t) = y_x(x_i^+,t), \\ \alpha_i y_{xx}(x_i^-,t) - \alpha_{i+1} y_{xx}(x_i^+,t) = f_{1,i}(t), \qquad t \in (0,T), i = 1,\cdots,n, \\ \alpha_i y_{xxx}(x_i^-,t) - \alpha_{i+1} y_{xxx}(x_i^+,t) = f_{2,i}(t), \end{cases}$$

(8) $$y(x,0) = y^0(x), \quad y_t(x,0) = y^1(x), \qquad x \in (x_0, x_n).$$

制御関数 $\mathbf{f}_i = (f_{1,i}, f_{2,i}), i = 1,\cdots,n$ は制御空間 $V = L^2(0,T) \times L^2(0,T)$ に属すものとする. さらにシステム (6)(7)(8)(9) の状態空間 Xを $L^2(x_0,x_n) \times H^{-1}(x_0,x_n)$ とする. ただ

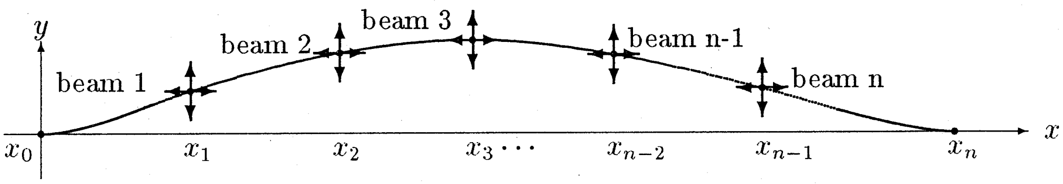

図 : n coupled beams

し $H^{-1}(x_0,x_n)$ は $H_0^1(x_0,x_n)$ の双対空間. 係数 $m_i, \alpha_i, i = 1,\cdots,n$ は次の仮定を満たすものとする:

$$m_i \leq m_{i+1}, \quad \alpha_i \geq \alpha_{i+1}, \quad i = 1,\cdots,n.$$

$F = (\mathbf{f}_1,\cdots,\mathbf{f}_n)$ とおく. この時, 次の結果を得た.

結果 係数 $m_i, \alpha_i, i = 1,\cdots,n$ は上の仮定を満たし, Tは任意の正数とする. このとき次が成り立つ.

(i) $n = 2$ の時, システム (6)(7)(8) は制御 $F = (\mathbf{f}_1)$ によって近似可制御である.

(ii) $n \geq 3$ の時, システム (6)(7)(8) は制御 $F = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, 0,\cdots,0)$ または制御 $F = (0,\cdots,0,\mathbf{f}_{n-2},\mathbf{f}_{n-1})$ によって近似可制御である.

(iii) $n \geq 6$ の時, システム (6)(7)(8) は制御 $F = (0,\cdots,0,\mathbf{f}_i,\mathbf{f}_{i+1},\mathbf{f}_{i+2},0,\cdots,0), i = 2,\cdots,n-4$ によって近似可制御である.

参考文献

[1] Ho, L.F., Controllability and stabilizability of coupled strings with control applied at the coupled points, SIAM J. Control Optim., 31(1993), pp.1416-1437.

[2] Komornik, V., *Exact Controllability and Stabilization,* Masson, Paris, 1994.

[3] Lagnese, J.E., Leugering, G. and Schmidt, E.J.P.G., Control of planar networks of Timoshenko beams, SIAM J. Control Optim., 31(1993), pp.780-811.

[4] Ohnari, S., Approximate controllability of coupled vibrating strings with coupled point control, Adv. Math. Sci. Appl., 6(1996), pp.641-651, to appear.

[5] Ohnari, S., Controllability of coupled vibrating beams with control applied at coupled point, Saitama Math. J., 13(1995), to appear.

[6] Ohnari, S., Approximate controllability of coupled Euler-Bernoulli beams with controls applied at the coupled points, preprint.

[7] Russell, D.L., Non-harmonic fourier series in control theory of distributed parameter systems, J. Math. Anal. Appl., 18(1967), pp.542-560.