数理解析研究所講究録
945巻 1996年 7-15

Minimization Algorithms based on Set-Valued Maps

田中　環 (TAMAKI TANAKA)　弘前大学 理学部 (情報科学科)*

Abstract. The paper presents a study of semicontinuity of set-valued maps. First, connections between optimization algorithms and semicontinuity of set-valued maps are presented with some examples. Next, upper semicontinuity of set-valued maps is extended to a weaker condition, which has a theoretically conformable duality to a kind of improved lower semicontinuity of set-valued maps. The weaker definition is defined in terms of both neighborhoods and sequences.

Key words: Upper semicontinuity, lower semicontinuity, set-valued maps, optimizing algorithms, iterative method, global convergence property, stability.

1 序 論

本論文の目的は，非線形解析学において最近盛んに研究されている集合値解析における問題点の内，最適化に関係するものをいくつか取り上げて解説することである。特に，最適化のアルゴリズムの根本原理の一つとしてデジタルコンピュータでプログラミングすることを前提にしていることがある。そのため，距離空間上に値をとる集合値写像のいろいろな半連続性の中で，点列を用いて定義されたものがある。集合値写像の半連続性は，実数値関数の連続性の拡張であるから，いろいろな定義が考えられ，それらの間の密接な関係もいくつかは期待できる。そこで，それらの比較・検討を行った結果，いくつかの新しい概念の導入により理論的整合性のとれた半連続性の概念の双対関係を明らかにすることができた。従って，本発表の前半でいくつかの例を挙げて，最適化のアルゴリズムと集合値写像の半連続性との関係を述べ，後半では半連続性の概念的双対関係に触れる。

2 最適化アルゴリズムの反復解法と集合値写像

最適化のアルゴリズムは，実行可能解から成る点列による反復解法として定式化するものが多い。つまり，

ある初期点 x^0 から出発して点列 $x^1, x^2, \ldots$ を生成して，有限回で解を発見するか，あるいはこの点列が何らかの意味で解に収束するような手続き

として考えることができる（[5] 第6章アルゴリズムの一般論参照)。一般に，計算機の停止基準は，目的関数 f に対して

$$\|x^{k+1} - x^k\| \text{ や } |f(x^{k+1}) - f(x^k)|$$

*青森県弘前市文京町3．E-mail address: tanaka@si.hirosaki-u.ac.jp

の値の変化に基づいて決められるものが多く，その変化が観察されなくなったら計算を終了している。このことは，Banach 空間などの完備性に依存しており，Cauchy 列が収束列であることにより保証されている（[6]34 頁参照）。ただし，計算機上で扱う大部分の最適化問題は有限次元ベクトル空間であり，この点を心配する必要がない。

ところで，「**何らかの意味で**」収束するとは，

与えられた最適化問題の理想的な解集合とその生成された点列が共通部分を持つか，若しくはその解集合に属する集積点を持っていること

として定義するのが通常である。特に，その初期点と生成点列がいかなる時にもこの性質が成立する時，そのアルゴリズムが「**大域的収束性**」をもつという（[5] 第 6 章アルゴリズムの一般論参照）。この性質を議論する際には，点列生成の原理をある集合値写像の像からベクトルを選ぶ行為とみなした方が都合がよい。つまり， $x^{k+1} \in F(x^k)$ を満足するベクトル x^{k+1} をある決められたルールや規準 (criterion) あるいは方針に従って生成することである。このため，集合値写像 F の半連続性がその収束性の十分条件となる。

一方，感度分析や安定性理論などの研究においても集合値写像の半連続性が重要な役割を果たしており，a marginal function と呼ばれている $f^*(x) := \sup_{y \in F(x)} f(x,y)$ や写像 $F(x) := \bigcup_{y \in G(x)} \{f(x,y)\}$ などの解析に必要となる。

このように集合値写像の半連続性の研究と最適化の研究は密接に関係しており，従来から研究されてきた。しかし，集合値解析自身も最近になって益々盛んになり（[1] 参照），その内容もかなり新しくなっている。この意味では，さらなる研究の余地が以上のような接点にもみられる。以下では，著者の最近の研究に関連した 3 つの具体的な例を示しながら，集合値写像の半連続性の研究がこれからも必要であることを指摘する。

2.1 ベクトル値ミニマックス定理

著者の研究の一つのブランチとして，ベクトル値関数のミニマックス定理がある（[9, 11] とそれらの参考文献を参照）。これは，最適化理論における多目的計画問題をゲーム理論の立場から考察し，一般のベクトル最適化理論の枠内で一般化された鞍点の存在性を保証する条件やミニマックス不等式が成立するための条件を研究するものである。

この定理に関する論文もかなりあるが，わずかな違いを除けば，ミニマックス定理とその関連結果を次のような設定で論じているといっても良い。対象にする数学的空間は (pointed な) 凸錐によって定義される半順序が与えられた，(ほとんどが実数体上の) あるベクトル空間であって，その空間の部分集合に対して，先の順序に関するある種の最小元集合及び最大元集合がそれぞれ定義される。そして，ある直積集合 $X \times Y$ からそのベクトル空間の中へのある関数 f が与えられた時，次のふたつの集合

$$\operatorname*{minimax}_{x \in X \ y \in Y} f(x,y) \quad と \quad \operatorname*{maximin}_{y \in Y \ x \in X} f(x,y)$$

の間に成り立つ関係を探っている。ここではそれぞれをミニマックス集合及びマックスミニ集合と呼ぶことにする。これらはゲームの理論における普通のミニマックス値とマックスミニ値に対応する。関数 f が実数値関数の時 (順序ベクトル空間が実数空間の時) には，一般

に，マックスミニ値はミニマックス値より大きくはならなく，ある条件が成立する時，これらの値は一致する。このことを実数値関数のミニマックス定理と呼ぶ。ベクトル値関数に対しても，適当な仮定の下では，先のミニマックス集合に含まれるいくつかのベクトルはマックスミニ集合に含まれるいくつかのベクトルよりも (定義された順序に関して) 小さいか又は等しいということが成立する。

まず，Z を線形位相空間とし，C を空間 Z で定義された pointed な凸錐とする。この pointed という性質は proper とも呼ばれ，

$$C \cap (-C) = \{0\}$$

を満たす時をいい，この凸錐 C によって，空間 Z に反対称律が成立する順序を次の二項関係 $\leq_C$ によって与える。

$$z_1 \leq_C z_2 \rightleftharpoons z_2 - z_1 \in C$$

(逆に，順序ベクトル空間の順序に対応する凸錐が定義され，'順序' と '凸錐' が一意に対応することが知られている。[9] の 357 頁を参照せよ。) また，ここではその凸錐 C の内部 $\mathbf{int}\ C$ が空集合でないものとする。すると，$C^0 := (\mathbf{int}\ C) \cup \{0\}$ は C よりも弱い順序を空間 Z に与える。次に，集合 $A \subset Z$ の極小元集合及び極大元集合を定義する。A のある点 z_0 が A の極小元（あるいは非劣解）であるであるとは，$z_0 - z \in C$ を満たす点 z が z_0 以外に A の中に存在しない時をいう。つまり，

$$\{z \in A \,|\, z \leq_C z_0, z \neq z_0\} = \emptyset$$

あるいは

$$A \cap (z_0 - C) = \{z_0\}$$

が成立する時といっても良い。部分集合 A に対して，このような極小元全体の集合を$\mathbf{Min}A$ と表すことにすれば，先の凸錐 C によって定まる順序について，この集合$\mathbf{Min}A$ は集合 A の中の他の元で，より順序の小さなものが存在しない点の集まりと考えられる。同様にして，$\mathbf{Max}A$ を A の極大元集合と呼ぶことにする。また，凸錐 C の代わりに凸錐 C^0 に対する A の極小元集合と極大元集合を $\mathbf{Min_w}A$ と $\mathbf{Max_w}A$ で表す。

さて，X と Y の直積集合上で定義されたベクトル値関数 $f : X \times Y \longrightarrow Z$ に対して，

$$\operatorname*{minimax}_{x \in X \ y \in Y} f(x, y) := \mathbf{Min} \bigcup_{x \in X} \mathbf{Max_w} f(x, Y)$$

$$\operatorname*{maximin}_{y \in Y \ x \in X} f(x, y) := \mathbf{Max} \bigcup_{y \in Y} \mathbf{Min_w} f(X, y)$$

をそれぞれミニマックス集合，マックスミニ集合と呼ぶことにする。ただし，

$$f(x, Y) := \bigcup_{y \in Y} \{f(x, y)\}$$

$$f(X, y) := \bigcup_{x \in X} \{f(x, y)\}$$

とする。ここで，

$$G(x) := \mathbf{Max_w} f(x, Y), H(y) := \mathbf{Min_w} f(X, y)$$

とおくと，G と H は集合値写像となり，先のミニマックス集合とマックスミニ集合が次のようになる。

$$\operatorname*{minimax}_{x \in X \ y \in Y} f(x, y) := \mathbf{Min} \bigcup_{x \in X} G(x), \ \operatorname*{maximin}_{y \in Y \ x \in X} f(x, y) := \mathbf{Max} \bigcup_{y \in Y} H(y)$$

ここで重要なことは，$G(X)$ や $H(Y)$ がどんな性質を持つ集合と成るかである。通常，コンパクト性が期待されるが，そのためには X と Y のコンパクト性だけでなく，G や H の集合値写像の半連続性が要求される。上の場合は，それぞれ上半連続・下半連続な集合値写像となるが，

$$G_1(x) := \mathbf{Max} f(x, Y), H_1(y) := \mathbf{Min} f(X, y)$$

の場合は，そうなるとは言えない。

2.2 Ekeland のアルゴリズム

次に，Ekeland の変分原理を考えてみる。X を完備距離空間として，$f : X \to \boldsymbol{R} \cup \{+\infty\}$ と非負値関数 $g : X \times X \to \boldsymbol{R} \cup \{+\infty\}$ を考える。f の実行定義域を

$$\mathbf{dom}\ f := \{x \in X \mid f(x) < +\infty\}$$

と表して，$\mathbf{dom}\ f \neq \emptyset$ の時 f が 'strict' であるという。f のエピグラフとハイポグラフを

$$\mathbf{epi}\ f := \{(x, \mu) \in X \times \boldsymbol{R} \mid f(x) \leq \mu\}$$

$$\mathbf{hyp}\ f := \{(x, \mu) \in X \times \boldsymbol{R} \mid f(x) \geq \mu\}$$

で表すことにする。

最小化問題の解の存在性に対して，定義域のコンパクト性が極めて重大な役割を果たすが，解が存在しなくても目的関数の下限が実数値として存在すれば，コンパクトか否かに関わらず，次の Ekeland の変分原理が成立する。これは，近似解の点列が生成できることを保証している。その概略を図 1 において，グラフで説明してあるが，詳しくは，[8] や [10] 等を参照するとよい。

Ekeland の変分原理(Ekeland's variational principle) Let (X, d) be a complete metric space, and let $f : X \to \boldsymbol{R} \cup \{+\infty\}$ be strict, positive, lower semicontinuous (l.s.c., in short). Then, for $x_0 \in \mathbf{dom}\ f$ and $\varepsilon > 0$ there exists $\bar{x} \in X$ such that

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &\leq f(x_0) - \varepsilon d(x_0, \bar{x}), \\ f(x) &> f(\bar{x}) - \varepsilon d(\bar{x}, x) \qquad \forall x \in X, x \neq \bar{x}. \end{aligned}$$

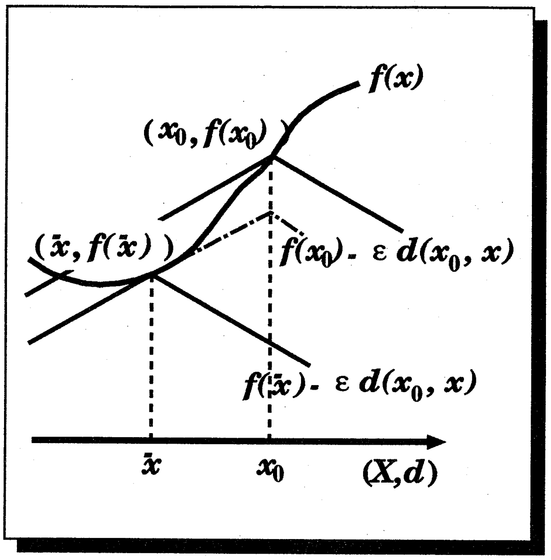

図 1: **Ekeland** の変分原理

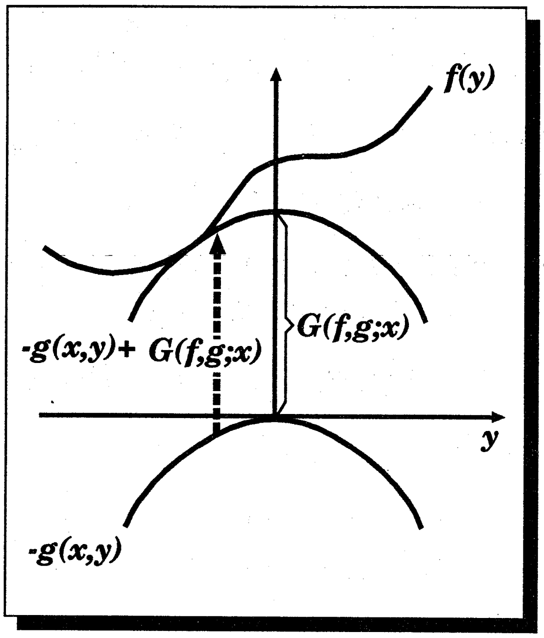

図 2: f のグラフを越えないように$-g(x,\cdot)$ のグラフを持ち上げる時の最大量

この原理から次のアルゴリズムを考えることが出来る。図 2 において，f のグラフを越えないように$-g(x,\cdot)$ のグラフを持ち上げる。この時の最大量を $G(f,g;x)$ で表す。つまり，

$$G(f,g;x) := \sup\{\mu \mid f(y) \geq -g(x,y)+\mu, \forall y \in X\} \qquad x \in X.$$

とする。'Ekeland の変分原理' では，$g = \varepsilon d(y,x)$ としてあることが理解できる。この時，各 x_0 に対して，集合値写像

$$\Gamma(x_0) := \{x \in X \mid f(x) = -h(x-x_0) + G(f,h;x_0)\}$$

を考えることが出来る。これは，$\bar{x} \in \Gamma(x_0)$ となる $\bar{x}$ が $f(\bar{x}) \leq f(x_0) - h(\bar{x}-x_0)$ を満足するので，アルゴリズム $x \mapsto \Gamma(x)$ があらかじめ与えられた関数 h によって定められる許容減少量より小さくなる最小化逐次近似アルゴリズムであると考えてよい。この場合，この章の最初で述べたように，アルゴリズムの「大域的収束性」を議論するために，集合値写像 Γ の半連続性を解析しなければならない。

2.3 Marginal Functions

最後に，'勾配法' や '摂動法' に現れる特別な形をした **Max** 型関数を説明する。これらは，一般に "marginal functions" と呼ばれていて，次の形をしている。

$$f^*(x) := \sup_{y \in F(x)} f(x,y)$$

ここで，$f(x,y)$ は 2 変数実数値関数で，F が集合値写像であり，それらの半連続性によって，f^* の（上または下）半連続性が保証されるかどうかが研究されてきた。(最近の著者の研究により，集合値写像の半連続性の詳しい解析からこれらの新しい結果が期待できる。)

まず，勾配法のアルゴリズムを考えてみよう。目的関数 f の勾配ベクトル ∇f は，点 x において f の増加率が最大となる方向なので，最小化を考える時の有効な情報量となる。

勾配法のアルゴリズム　([4] 第 4 章参照)

Step 1 (初期化) 適当な初期点 $x^{(0)} \in \boldsymbol{R}^n$ を選び，$k := 0$ とおく。

Step 2 (探索方向の計算) 適当な正定値対称行列 $H^{(k)}$ を用いて，探索方向ベクトル $d^{(k)} := -H^{(k)}\nabla f(x^{(k)})$ を計算する。($\nabla f(x^{(k)}) = 0$ ならば計算を終了する。)

Step 3 (直線探索) 1 次元の最適化問題

$$\min_{t \geq 0} f(x^{(k)} + td^{(k)})$$

を解いてステップ幅 $t = t^{(k)}$ を求め，$x^{(k+1)} := x^{(k)} + t^{(k)}d^{(k)}$ とする。$k := k+1$ とおいて Step 2 へ戻る。

ここで，

$$F^{(k)}(x) := \left\{ y \in Y \ \mid y = x + t\left(-H^{(k)}\nabla f(x)\right), t \geq 0 \right\}$$

とおくと，Step 3 は目的関数 f の a marginal function $f^*(x) = \inf_{y \in F^{(k)}(x)} f(y)$ を求めていることになる。従って，$M^{(k)}(x) := \{y \in F(x) \ \mid f(y) \leq f^*(x)\}$ とおくと，勾配法のアルゴリズムは $x \mapsto M^{(k)}(x)$ と考えられ，その大域的収束性を議論する上で，集合値写像 F や $M^{(k)}$ の半連続性が問題となる。

また，安定性理論で扱われる摂動法に関しても以下のようにおけば，同じような a marginal function $f^*(x) = \inf_{y \in F(x)} f(y)$ が得られる。

$$F(x) := \{y \in Y \ \mid g(y) \leq x\}$$

ただし，主問題を $\min_{x \in X} f(x)$ **subject to** $g(x) \leq 0$ とする。

3　集合値写像の半連続性の双対関係

集合値写像の半連続性には，上半連続性・下半連続性という 2 つの概念がある。これらは，必ずしも同値でない形で様々に定義されている。Hogan (1963 年) においては，Berge の定義する上半連続性・下半連続性と Hogan 自身がその論文の中で定義している開性・閉性の比較がなされている。一般に，上半連続性・下半連続性は近傍のことばを使って定義されており，一方，Hogan の開性・閉性は写像のグラフの位相的な性質を点列を用いて定義されている。多くの論文において，上半連続性と閉性，下半連続性と開性がそれぞれ似たような概念であり，上半連続性と下半連続性，閉性と開性がそれぞれ双対的な性質として解釈されている。しかし，実際にはそれらの同値性や双対性は完全ではなく，何らかの条件を課すことでその整合性を補っているのが現状である。

ここでは，以下のような各種の上半連続性の概念間の包含関係 (図 3) と集合値写像の理論的整合性のとれた半連続性の概念の双対関係 (図 4) を説明する。また，空間 Y が線形位相空間あるいは位相群の場合の equally w-u.s.c. と equally w-l.s.c. の定義も与えられる。

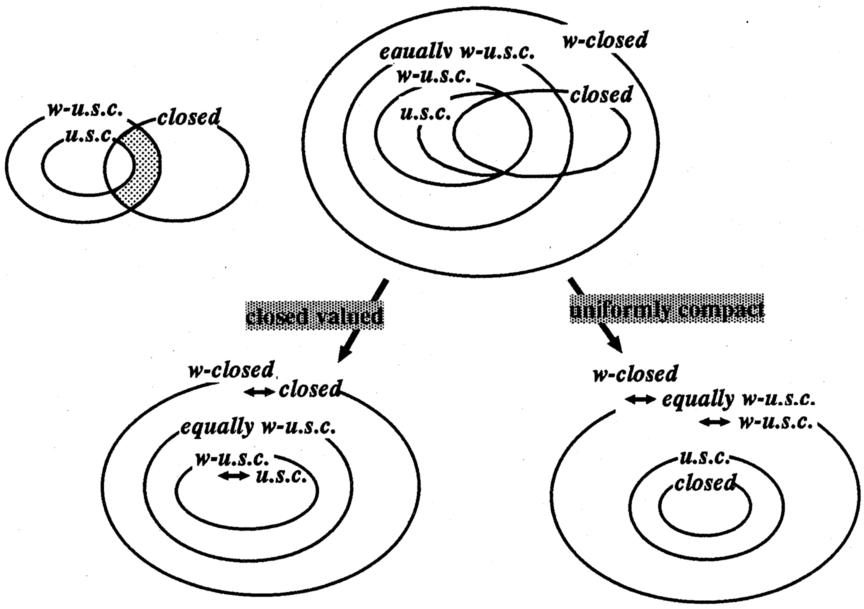

図 3: 上半連続性の概念間の包含関係

これらの詳細な研究については，[7] や [12] を参考にするとよい。以下では，いくつかの半連続性の定義を与えておく。それらの強弱関係はほとんど明らかである。また，図 3において，w-u.s.c. であって閉 (closed) な集合値写像は存在しない。さらに，閉集合値 (closed-value) や一様コンパクト性 (uniformly compact) 等の条件の下ではいくつかの拡張概念が同値になり，古典的な結果が得られる。

Definition 1. **(Berge's u.s.c.)** A set-valued map F is said to be upper semicontinuous at x_0 if for any open set U with $F(x_0) \subset U$, there exists a neighborhood V of x_0 such that $F(x) \subset U$ for all $x \in V$.

Definition 2. **(Berge's l.s.c.)** A set-valued map F is said to be lower semicontinuous at

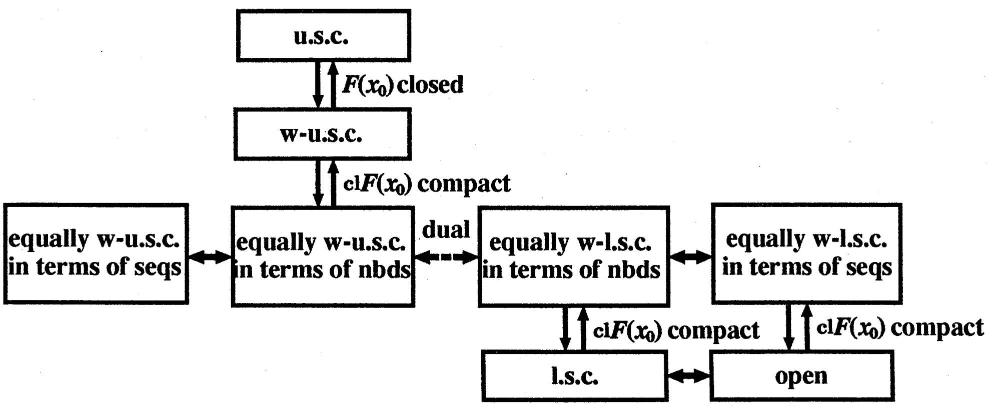

図 4: 半連続性の概念の双対関係

x_0 if for any open set U with $F(x_0) \cap U \neq \emptyset$, there exists a neighborhood V of x_0 such that $F(x) \cap U \neq \emptyset$ for all $x \in V$.

Definition 3. (Hogan's u.s.c.) A set-valued map F is said to be closed at x_0 if for any sequence $\{x_n\}$ with $x_n \to x_0$ and $\{y_n\}$ with $y_n \in F(x_n)$, $y_n \to y_0$ for some $y_0 \in Y$ implies that $y_0 \in F(x_0)$.

Definition 4. (Hogan's l.s.c.) A set-valued map F is said to be open at x_0 if for any sequence $\{x_n\}$ with $x_n \to x_0$ and $y_0 \in F(x_0)$, there exists a sequence $\{y_n\}$ such that $y_n \in F(x_n)$ and $y_n \to y_0$.

ここで，下半連続性と開性は同値であるが，上半連続性と閉性が同値になるには，閉集合値 (closed-value) や一様コンパクト性 (uniformly compact) 等の条件が必要である。そこで，この非整合性を説明するために，次のような概念の拡張を行う。

Definition 5. (w-u.s.c.) A set-valued map F is said to be weakly upper semicontinuous at x_0 if for any open set U with $\mathbf{cl}\, F(x_0) \subset U$, there exists a neighborhood V of x_0 such that $F(x) \subset U$ for all $x \in V$.

Definition 6. (equally w-u.s.c.) A set-valued map $F : X \to 2^Y$ is said to be equally weak upper semicontinuous (equally w-u.s.c. for short) at x_0 if for any $\varepsilon > 0$ there exists a neighborhood V of x_0 such that $F(x) \subset B_Y(F(x_0), \varepsilon)$ for all $x \in V$, where $B_Y(F(x_0), \varepsilon) := \{y \in Y \mid d_Y(y, F(x_0)) < \varepsilon\}$.

Definition 7. (equally w-l.s.c.) A set-valued map $F : X \to 2^Y$ is said to be equally weak lower semicontinuous (equally w-l.s.c. for short) at x_0 if for any $\varepsilon > 0$ there exists a neighborhood V of x_0 such that $F(x_0) \subset B_Y(F(x), \varepsilon)$ for all $x \in V$.

空間 Y が線形位相空間あるいは位相群の場合には，equally w-u.s.c. と equally w-l.s.c. の定義はそれぞれ次に同値である。

For any open neighborhood G of the origin θ, there exists a neighborhood V of x_0 such that $F(x) \subset F(x_0) + G$ for all $x \in V$.

For any open neighborhood G of the origin θ, there exists a neighborhood V of x_0 such that $F(x_0) \subset F(x) + G$ for all $x \in V$.

さらに，equally w-u.s.c. と equally w-l.s.c. の定義は次のように点列を用いても定義できる。

A set-valued map $F : X \to 2^Y$ is said to be equally w-u.s.c. at x_0 if for any nets $\{x_\lambda\}$ with $x_\lambda \to x_0$ and $\{y_\lambda\}$ with $y_\lambda \in F(x_\lambda)$, there exists a net (sequence) $\{z_\lambda\}$ such that $z_\lambda \in F(x_0)$ and $d_Y(z_\lambda, y_\lambda) \to 0$.

A set-valued map $F : X \to 2^Y$ is said to be equally w-l.s.c. at x_0 if for any nets $\{x_\lambda\}$ with $x_\lambda \to x_0$ and $\{z_\lambda\}$ with $z_\lambda \in F(x_0)$, there exists a net (sequence) $\{y_\lambda\}$ such that $y_\lambda \in F(x_\lambda)$ and $d_Y(y_\lambda, z_\lambda) \to 0$.

上の半連続性の定義は，Hogan の開性に双対的であることがわかり，同時に，定義 6.と定義 2.も双対的な関係であることが示される。これにより，集合値写像の理論的整合性のとれた半連続性の双対関係が明らかになる。

また，これらすべての半連続性より弱い，弱閉性なるものも定義できる。

Definition 8. (w-closed) A set-valued map F is said to be weakly closed at x_0 if for any sequence $\{x_n\}$ with $x_n \to x_0$ and $\{y_n\}$ with $y_n \in F(x_n)$, $y_n \to y_0$ for some $y_0 \in Y$ implies that $y_0 \in \mathbf{cl}\ F(x_0)$.

参考文献

[1] AUBIN, J.-P. and FRANKOWSKA, H, *Set-Valued Analysis*, Birkhäuser, Boston, 1990.

[2] FIACCO, A.V., *Introduction to Sensitivity and Stability Analysis in Nonlinear Programming*, Mathematics in Science and Engineering, Vol.165, Academic Press, New York, 1983.

[3] HOGAN, W.W., *Point-to-Set Maps in Mathematical Programming*, SIAM Review, Vol.15, No.3, pp.591–603, 1973.

[4] 茨木俊秀・福島雅夫,「最適化の手法」, 情報数学講座１４, 共立出版 1993.

[5] 今野浩・山下浩,「非線形計画法」, ＯＲライブラリ６, 日科技連 1978.

[6] LUENBERGER, D.G., *Optimization by Vector Space Methods*, John Wiley, New York, 1969.

[7] 清野 達雄, 集合値写像における連続性について, 弘前大学大学院理学研究科情報科学専攻修士論文, 1995 年 2 月.

[8] 田中謙輔,「凸解析と最適化理論」, 数理情報科学シリーズ５, 牧野書店 1994.

[9] TANAKA, T., *Generalized Quasiconvexities, Cone Saddle Points, and A Minimax Theorem for Vector-Valued Functions*, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol.81, No.2, pp.355–377, 1994.

[10] TANAKA, T., *On a Relationship between Ekeland's Algorithm and infimal convolutions*, RIMS Kokyuroku, Vol.897, pp.73–79, 1995.

[11] TANAKA, T., *Generalized Semicontinuity and Existence Theorems for Cone Saddle Points*, to appear in Journal of Applied Mathematics and Optimization, **1996**.

[12] TANAKA, T. and SEINO, T., *On a Theoretically Conformable Duallity for Semicontinuity of Set-Valued Mappings*, Abstract, pp.1–2, in RIMS Symposium "Nonlinear Analysis and Convex Analysis," 1995 (September).

[13] ZANGWILL, W.I., *Convergence Conditions for Nonlinear Programming Algorithms*, Management Science, Vol.16, No.1, pp.1–13, 1969.