数理解析研究所講究録
946巻 1996年 78-102

Decomposable multiplication operatorsについて

新潟大学大学院　自然科学研究科　　羽鳥　理　(Osamu Hatori)

序。　Gを非離散局所コンパクトabel群とし、$\widehat{G}$でその双対群を表す。$1 \leq p < \infty$なるpに対して$L^p(G)$はG上のHarr測度に関して絶対値がp乗可積分であるような可測関数全体からなるBanach空間とする。$L^p(G)$上の有界線形作用素で平行移動不変なものをL^p-multiplierと呼ぶ。その全体$M_p(G)$は単位元を持つ半単純可換Banach環になる。特に$M_1(G)$は測度環と同一視できる[22]。$T \in M_p(G)$に対して$\widehat{T} \in L^\infty(\widehat{G})$（$= \widehat{G}$上の本質的有界可測関数全体）が一意に存在し、$\widehat{TF} = \widehat{T}\widehat{F}$が$G$上のすべての単関数$F$に対して成立する。ここで、$\widehat{F}$、$\widehat{TF}$はそれぞれ$F$、$TF$のFourier変換を表す。$\widehat{T}$も$T$のFourier変換と呼ぶ。$T \in M_1(G)$に対して$\widehat{T}$は$T$を測度と同一視したときのFourier-Stieltjes変換である。任意の有界正則Borel測度μのスペクトルは$\widehat{\mu}(\widehat{G})$の閉包を部分集合として含むが、両者が一致しない測度の存在がWiener-Pittにより$G = \mathbb{R}$の場合に示されたのは６０年以上前のことである。その後Williamson [23]が任意の非離散局所コンパクトabel群Gに対してこのWiener-Pitt現象が起こっていることを示した。つまり$T \in M_1(G)$の作用素としてのスペクトルとTのFourier変換の値域の閉包が一致しないTが存在することを示した。また、$1 < p < 2$なる$M_p(G)$の中でもWiener-Pitt現象を起こす作用素、特に測度があることを示したのはIgari [9]である。さらにぁ、Rudin [18]、Varopoulos [20] [21]により、Fourier-Stieltjes変換が無限遠点で0になるような測度にもWiener-Pitt現象を起こすものがあることが示された。Fourier変換が$\widehat{G}$上で連続で無限遠点で0になる$T \in M_p(G)$

全体を $C_0M_p(G)$ で表すと、$C_0M_p(G)$ は $M_p(G)$ の単位元を含まない閉部分環である。測度の Fourier-Stieltjes 変換は $\widehat{G}$ 上で連続なので $C_0M_1(G)$ は Fourier-Stieltjes 変換が無限遠点で 0 になる測度全体と同一視できる。だから Rudin と Varopoulos の結果より、$C_0M_p(G)$ でも Wiener-Pitt 現象が起きているのではないかと考えられる。実際、Zafran [25] [26] は $G=\mathbb{R}^n$、$\mathbb{T}^n$、と離散群 $\mathbb{Z}^n$ の場合には正しいことを示した。Wiener-Pitt 現象を起こす測度や作用素の構成方法はいろいろと知られてはいるが、そのような作用素の全体像はよく分かっていない。だから次が問題になる。

問題 1 スペクトルと *Fourier* 変換の本質的値域が一致する L^p*-multiplier* をすべて求めよ。

この問題に対する組織的な研究は Zafran によるところが大きいが、もともとは Fourier 解析学において古くから扱われてきた問題である。

Hörmander [8] や Igari [9] の研究により $M_p(G)$ と $C_0M_p(G)$ ではスペクトルの性質が大きく異なることが知られている。$M_p(G)$ に含まれる測度で $M_p(G)$ の中で Wiener-Pitt 現象を起こすものがあるが、$C_0M_p(G)$ に含まれる測度は Wiener-Pitt 現象を起こさない等のことが知られている。また、$C_0M_p(G)$ の Fourier 変換は無限遠点での振る舞いが単純なので作用素に内在する性質が浮き彫りにされていると考えられる。だから $C_0M_p(G)$ は $M_p(G)$ の扱いやすそうな閉部分環であるというだけでなく、それ自身興味深い可換 Banach 環である。このようなことから、$C_0M_p(G)$ を調べることは自然であり大切でもある。そこでこの小論では上の問題を $C_0M_p(G)$ において考える。

$T\in C_0M_p(G)$ に対して T の $L^p(G)$ 上の作用素としてのスペクトル $\sigma(T)$ が定義でき、可換 Banach 環 $C_0M_p(G)$ や $M_p(G)$ の要素としてのスペクトル $\mathrm{sp}(T, C_0M_p(G))$、$\mathrm{sp}(T, M_p(G))$

も定義されるが、これらはすべて一致している。

定義 1 $T \in C_0M_p(G)$ が $\sigma(T) = \overline{\widehat{T}(\widehat{G})}$ をみたすとき、Tは自然なスペクトルを持つという。自然なスペクトルを持つ $T \in C_0M_p(G)$ 全体を $\mathrm{NS}(C_0M_p(G))$ であらわす。

よって我々の問題は $\mathrm{NS}(C_0M_p(G))$ を求めよと言うことになる。G がコンパクトの場合 Zafran [24] は $T \in C_0M_p(G)$ が自然なスペクトルを持つことと T の Gelfand 変換が $\widehat{G}$ の外側で 0 になることが同値であることを示した。特に、$p = 1$ なら T のスペクトルが可算集合であることとも同値であることを示したのが Izuch-Shimizu [13] である (cf. [11]、[12])。

2。Laursen、Neumann 等は可換 Banach 環とその乗作用素のスペクトルについて論じて、得られた結果を $C_0M_1(G)$ の場合に応用した。

定義 2 *Banach* 空間 X 上の有界線形作用素 S が以下の条件を満たすとき、S は *decomposable* であるといわれる：複素数平面 $\mathbb{C}$ の任意の開被覆 $\{U, V\}$ に対して、X の S-不変閉部分空間 Y_U、Y_V で $X = Y_U + Y_V$ なるものが存在して、$\sigma(S|Y_U) \subset U$、$\sigma(S|Y_V) \subset V$ となる。

定義 3 B を可換 *Banach* 環とする。$\mathrm{Reg}\, B$ により B の最大正則閉部分環、$\mathrm{Dec}\, B$ により *decomposable* 積作用素になる $b \in B$ 全体、つまり、$T_b a = ba$ により定義した T_b が B 上の有界作用素として *decomposable* な $b \in B$ 全体を表す。

最大正則閉部分環の存在については、Albrecht [1] の単位的半単純可換 Banach 環に対する結果が最初のものと思われる。その後、Inoue-Takahasi [10] と Neumann [17] により独立に任意の可換 Banach 環に対する結果として拡張された。また Apostol [2, Theorem 3.6] の古典的な結果により B が単位元を持つとき $\mathrm{Dec}\, B$ は B の閉部分環となることが知ら

れている。。Neumann [17] は半単純可換 Banach 環 A において、$a \in A$ の Gelfand 変換が hull-kernel 位相に関して連続であることと T_a が decomposable であることが同値であることを示した。このことから次が分かる。

定理 N (M. M. Neumann) A を(単位的とは限らない)半単純可換 *Banach* 環とする。このとき、$\mathrm{Dec}\, A$ は A の閉部分環であり、$\mathrm{Reg}\, A \subset \mathrm{Dec}\, A$ となる。

定義 4 A を半単純可換 *Banach* 環とする。A 上の有界線形作用素 T で任意の $a, b \in A$ に対して、$Tab = aTb$ を満たすものを乗作用素といいその全体を $M(A)$ であらわす。

$M(A)$ は A 上の有界線形作用素全体からなる Banach 環の可換な閉部分環であり、$a \in A$ と対応する積作用素を同一視することにより、A は $M(A)$ の(閉とは限らない)イデアルである。だから $M(A)$ の Gelfand 空間 $\Phi_{M(A)}$ は A の Gelfand 空間 Φ_A を開集合として自然に含む。$M_0(A)$ (resp. $M_{00}(A)$) により Gelfand 変換が Φ_A の無限遠点 (resp. $\Phi_{M(A)} \setminus \Phi_A$) で 0 になる $T \in M(A)$ 全体とする。また、$T \in M(A)$ の Gelfand 変換を $\check{T}$ により表すことにし、

$$\mathrm{NS}(M(A)) = \{T \in M(A) : \check{T}(\Phi_{M(A)}) = \overline{\check{T}(\Phi_A)}\}$$

と定める。さらに、$\mathrm{D}\, M(A)$ (resp. $\mathrm{D}\, M_0(A)$) は A 上の作用素として decomposable な $T \in M(A)$ (resp. $M_0(A)$) 全体を表す。すると、Neumann [16, Theorem 1] により $\mathrm{Dec}(M(A)) \subset \mathrm{D}\, M(A)$ (resp. $\mathrm{Dec}(M_0(A)) \subset \mathrm{D}\, M_0(A)$) である。$A$ や $M(A)$ を考えるモチベーションは群環や測度環にある。実際、$A = L^1(G)$ とすると $M(A) = M_1(G)$ となり、$M(A)$ は測度環 $M(G)$ と同一視できる。$\Phi_{L^1(G)} = \widehat{G}$ なので、$M_0(A)$ は Fourier-Stieltjes 変換が無限遠点で 0 になる測度全体と同一視でき、$M_{00}(A)$ は $L^1(G)$-radical と同一視できる。可換 Banach 環の一般論から $T \in M(A)$ に対して $\sigma(T) = \check{T}(\Phi_{M(A)})$ だから $\mathrm{NS}(M(A))$ は自然なスペクトル

を持つ測度全体のことである。$T \in M_0(A)$ に対してTの $M_0(A)$ での Gelfnad 変換を$\tilde{T}$で表す。Φ_Aは $M_0(A)$ の Gelfand 空間$\Phi_{M_0(A)}$の開集合でΦ_A上$\check{T} = \tilde{T}$である。また、

$$\mathrm{NS}(M_0(A)) = \{T \in M_0(A) : \sigma(T) = \overline{\check{T}(\Phi_A)}\}$$

とおくと

$$\overline{\tilde{T}(\Phi_{M_0(A)})} = \check{T}(\Phi_{M(A)}) = \sigma(T)$$

なので

$$\mathrm{NS}(M_0(A)) = \mathrm{NS}(M(A)) \cap M_0(A)$$

である。Laursen-Neumann [15] は次を示した。

定理 L-N (Laursen-Neumann) A を正則な半単純可換 *Banach* 環とする。このとき、

$$\mathrm{Reg}(M_0(A)) = \mathrm{Dec}(M_0(A)) = \mathrm{D}\, M_0(A) = M_{00}(A)$$

であり、これらはNS$(M_0(A))$ の部分集合で和について閉じたものの中で極大な集合である。特に、Φ_Aが *scattered* のときはこれらはNS$(M_0(A))$ と一致して、スペクトルが可算集合であるような$T \in M_0(A)$ 全体とも一致する。

上の定理を $A = L^1(G)$ の場合に適用すれば

$$\mathrm{Reg}(C_0M_1(G)) = \mathrm{Dec}(C_0M_1(G)) = \mathrm{D}\, C_0M_1(G)) = C_{00}M_1(G)$$

であり、これらはNS$(C_0M_1(G))$ の部分集合で和について閉じたものの中で極大であることが分かる。また、G がコンパクトであればNS$(C_0M_1(G))$ と一致し、スペクトルが可算集合であるような$T \in C_0M_1(G)$ 全体と一致することも分かる。また、G がコンパクトの時は任意の$1 \leq p < \infty$ なるpについて$L^p(G)$ は正則な半単純可換 Banach 環で可換 Banach 環とし

ての乗作用素と L^p-multiplier とは一致しているので $C_0M_p(G)$ についても同様のことがいえる。よって定理 L-N は、前述のコンパクト abel 群に対する Zafran の定理、Izuchi-Shimizu の定理の拡張を与えていることが分かる。

3。G がコンパクトでないと $1 < p < \infty$, $p \neq 2$ なる任意の p について $L^p(G)$ は可換 Banach 環でないため $C_0M_p(G)$ 等の解析に Laursen や Neumann の方法を適用することはできない。$C_0M_1(G)$ や G がコンパクトのときの $C_0M_p(G)$ の場合と同様な結果も期待できそうにみえる。Zafran [26] により $\mathrm{NS}(C_0M_p(G))$ は $C_0M_p(G)$ の真部分集合であることが知られていて、$\widehat{G} = \mathbb{T}^n$ がコンパクトであるため $C_{00}M_p(G) = C_0M_p(G)$ であるから $C_0M_1(G)$ の場合とは様子が違っている。この節では、$C_0M_p(G)$ の Fourier 変換にモチベートされた、局所コンパクト Hausdorff 空間上で定義された無限遠点で 0 になる複素数値連続関数からなる可換 Banach 環のスペクトラリティーを調べる。その結果を $C_0M_p(G)$ に適用して $\mathrm{Reg}\, C_0M_p(G) = \mathrm{Dec}\, C_0M_p(G) = \mathrm{D}\, C_0M_p(G)$ を示す。ここで

$$\mathrm{D}\, C_0M_p(G) = \{T \in C_0M_p(G) : T \text{は} L^p(G) \text{ 上の作用素として decomposable}\}$$

とする。以後、Y で局所コンパクト Hausdorff 空間を表し、M により Y 上で定義された複素数値連続関数で無限遠点で 0 になるもの（その全体を $C_0(Y)$ で表す）からなる可換 Banach 環で、共通 0 点が空集合であるものを表す。さらに、Y がコンパクトの時は $1 \in M$ を仮定する。R は M の部分集合とする。Albrecht、Inoue-Takahasi、Neumann の定理より M には最大正則閉部分環 $\mathrm{Reg}\, M$ が存在する。$m \in M$ に対して $\hat{m}$ は m の Gelfand 変換とする。Φ_M で M の Gelfand 空間を表す。

定義 5 $y \in Y$に対して、

$$K_y = \bigcap_{m \in R} \check{m}^{-1}(m(y))$$

$$K_\infty = \bigcap_{m \in R} \check{m}^{-1}(0)$$

と定める。

$$M' = \{m \in M : \text{任意の}\, y \in \text{について}\check{m}\text{は}\, K_y\text{上定数で、}K_\infty\text{で}\, 0\}$$

とする。

Yがコンパクトであれば$K_\infty = \emptyset$である。Y上の sup ノルム$\|\cdot\|_\infty$とMのノルム$\|\cdot\|_M$では$\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_M$が成立しているため$M'$は$M$の閉部分環である。

定義 6 $\mathrm{Ns}(M) = \{m \in M : \overline{\check{m}(\Phi_M)} = \overline{m(Y)}\}$ と定める。

$\mathrm{Ns}(M)$はMのなかで自然なスペクトルを持つ関数全体とみてよい。実際、Mが$C_0M_p(G)$の Fourier 変換の場合を考えれば$T \in C_0M_p(G)$に対して$\sigma(T) = \overline{\check{T}(\Phi_M)}$であり、Fourier 変換が同型写像を与えるためTの Fourier 変換を$\widehat{C_0M_p(G)}$で Gelfand 変換したものは$\check{T}$（$= T$を$C_0M_p(G)$の中で Gelfand 変換したもの）と一致する。よって、$(\mathrm{NS}(C_0M_p(G)))\hat{} = \mathrm{Ns}(\widehat{C_0M_p(G)})$である。

定理 1 Rが$C_0(Y)$で稠密でそれ自身正則な半単純可換$Banach$環であるとする。このとき、

$$\mathrm{Reg}\, M = \mathrm{Dec}\, M = M'$$

である。$R \subset L \subset \mathrm{Ns}(M)$なる$L$が和について閉じている（*i.e.*, $L + L \subset L$）ならば$L \subset \mathrm{Reg}\, M$である。

注）定理1では$\mathrm{Reg}\,M = \mathrm{Dec}\,M = M'$がNs$(M)$の和について閉じた部分集合の中で極大になっていること、特に$\mathrm{Reg}\,M = \mathrm{Dec}\,M = M'$より真に大きくしかも和について閉じた部分集合はないことを示している。Ns(M)が和について閉じていないようなMはたくさんあるので、上の結果はある意味でbestである。

注）$\mathrm{Reg}\,M$が$C_0(Y)$で稠密でなくともYの点を分離し、共通零点を持たなければ十分であるが、証明は煩雑さをさけるため他で述べることにする。一般に、半単純可換Banach環Bについては$\mathrm{Reg}\,B \subset \mathrm{Dec}\,B$であることがNeumann [16, Theorem 5]により示されているが、$\mathrm{Reg}\,B \neq \mathrm{Dec}\,B$である例を著者は知らない。

この定理に類似な結果とその証明は平成6年の関数環論研究集会の報告集でも述べた[7]ことを注意しておく。

補題 2 各$x \in Y \cup \{\infty\}$に対してK_xはΦ_Mの閉集合である。また、$x, y \in Y \cup \{\infty\}$が異なっているときは$F_x \cap F_y = \emptyset$である。さらに$\mathrm{Reg}\,M$が*Šilov*環のとき、即ち、$Y$自身が$\mathrm{Reg}\,M$の極大イデアル空間であるときは、

$$\bigcup_{x \in Y \cup \{\infty\}} K_x = \Phi_M$$

である。

証明. $f \in R$のMでのGelfand変換$\check{f}$はΦ_Mで（Gelfand位相に関して）連続である。よって、$\check{f}^{-1}(0)$はΦ_Mの閉集合であるからK_∞は閉集合である。同様に任意の$x \in Y$に対してK_xはΦ_Mの閉集合である。RがYの点を分離し、共通零点を持たないので、異なる$x, y \in Y \cup \{\infty\}$に対して$K_x \cap K_y = \emptyset$となる。

次に$\cup K_x = \Phi_M$を示す。$p \in \Phi_M \setminus \cup K_x$があったとする。すると$\check{f}_\infty(p) \neq 0$なる$f_\infty \in R$が存在する。また任意の$x \in Y$に対して$\check{f}_x(p) \neq f_x(x)$となる$f \in R$が存在する。そこで$B = \{f \in \mathrm{Reg}\, M : \check{f}(p) = 0\}$とおく。すると$\check{f}_\infty(p) \neq 0$であることから$B$は$R$の正則なproper idealである。よって極大なproper ideal $\tilde{B} \supset B$が存在する。RegがŠilov環なので$x_B \in Y$が存在し$\tilde{B} = \{f \in \mathrm{Reg}\, M : f(x_m) = 0\}$となる。一方$0 = \check{g}(p) \neq g(x_B)$となる$g \in R$が存在することがわかるので$g \in B$であるが$g(x_B) \neq 0$より$g \notin \tilde{B}$となり矛盾が起きた。Q.E.D.

定理１の証明. まずRがŠilov環であることが分かるので$R \subset NS(B)$であることがわかる。また$f \in M$とすると補題1より$\mathrm{sp}(f, M) = \overline{\check{f}(\Phi_M)} = \overline{\check{f}(\cup K_x)}$であり、$x \in Y$なら$\check{f}|K_x = f(x)$で$\check{f}|K_\infty = 0$だから$\overline{\check{f}(\cup K_x)} = \overline{f(Y)}$となる。よって$f \in \mathrm{NS}(M)$である。つまり$M' \subset NS(B)$である。つぎに、$R \subset L \subset \mathrm{NS}(B)$なる$L$が和について閉じているとすると$L \subset M'$であることを示す。そこでもし$f \in L \setminus M'$があったとすると$\check{f}|K_x$が定数とならない$x \in Y \cup \{\infty\}$が存在する。一方$R$が$C_0(Y)$で稠密であるため任意の$\varepsilon > 0$に対して

$$\sup_{y \in Y} |f(y) - f_\varepsilon(y)| < \varepsilon$$

なる$f_\varepsilon \in R$が存在する。すると$\check{f}_\varepsilon|F_x$は定数であるが$\check{f}|F_x$が定数でないため$\sup_{p \in F_x} |\check{f}(p) - \check{f}_\varepsilon(p)|$はある正数より小さくならない。よって$f - f_\varepsilon \notin \mathrm{NS}(M)$である。一方$R \subset L$で$L$は和について閉じているので$f - f_\varepsilon \in L$であるが$L \subset \mathrm{NS}(M)$なので矛盾を起こしている。よって$L \subset M'$がわかる。

ところでRが正則環であることから定理Nより

$$R \subset \mathrm{Reg}\, M \subset \mathrm{Dec}\, M \subset \mathrm{NS}(M)$$

である。Dec$M$は和について閉じているので上より Dec$M \subset M'$である。またRが$C_0(Y)$で稠密であるからM'も$C_0(Y)$で稠密であり、$M' \subset \mathrm{NS}(M)$で$M' \subset M$なので$M' = \mathrm{NS}(M')$である。このことから$\Phi_{M'} = Y$であることがわかる。すると$R$が正則なŠilov 環だから$M'$も正則であることになり、$\mathrm{Reg}\, M \subset M'$なので$\mathrm{Reg}\, M = \mathrm{Dec}\, M = M'$が成立する。Q.E.D.

系 3 .

$$\mathrm{Reg}\, C_0M_p(G) = \mathrm{Dec}\, C_0M_p(G) = \mathrm{D}\, C_0M_p(G)$$

である。

証明. $p = 1$の場合は Albrecht [1, Corollary 3.3] と Neumann [16] の結果である。$p > 1$とする。定理 1 より$\mathrm{Reg}\, C_0M_p(G) = \mathrm{Dec}\, C_0M_p(G)$がわかるので$\mathrm{Dec}\, C_0M_p(G) = \mathrm{D}\, C_0M_p(G)$を示す。Neumann [16, Theorem 1] より$\mathrm{Dec}\, C_0M_p(G) \subset \mathrm{D}\, C_0M_p(G)$なので逆向きの inclusion を示せば十分である。そこで$T \in \mathrm{D}\, C_0M_p(G)$とする。$\widehat{C_{00}M_1(G)}$は$C_0(\widehat{G})$で稠密なので$C_{00}M_1(G)$の列$\{T_n\}$で$n \to \infty$としたとき$\|\widehat{T_n} - \widehat{T}\|_{\infty(\widehat{G})} \to 0$なるものがとれる。また、Neumann [16, Theorem 8] と Albrecht[Corollary 3.3]2 より

$$\mathrm{Dec}\, C_0M_1(G) = C_{00}M_1(G) = \mathrm{D}\, C_0M_1(G)$$

であり、さらに$T - Tn \in \mathrm{D}\, C_0M_p(G)$である。また、Albrecht [1, Lemma 3.2] より$\mathrm{Dec}\, C_0M_p(G) \subset \mathrm{NS}(C_0M_p(G))$なので、任意の$\phi \in \Phi_{C_0M_p(G)}$に対して$n \to \infty$とすると

$$|\phi(T - T_n)| \leq \|(T - T_n)\check{}\,\|_{\infty(\Phi_{C_0M_p(G)})} = \|\widehat{T - t_n}\|_{\infty(\widehat{G})} \to 0$$

となる。また、

$$C_{00}M_1(G) = \mathrm{Reg}\, C_0M_1(G) \subset \mathrm{Reg}\, C_0M_p(G) = \mathrm{Dec}\, C_0M_p(G)$$

なので T は $\mathrm{Dec}\, C_0M_p(G)$ による $\Phi_{C_0M_p(G)}$ の level set それぞれの上で定数になる。さらに、これらの level set は $L^1(G)$ のそれと一致するので、定理1より $T \in \mathrm{Dec}\, C_0M_p(G)$ となる。

4。Zafran の結果 [25] [26] より $1 < p < \infty$, $p \neq 2$ で $G = \mathbb{Z}^n$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{T}^n$ の場合には $\mathrm{NS}(C_0M_p(G))$ は $C_0M_p(G)$ の真部分集合である。さらに、系1より

$$\mathrm{Reg}\, C_0M_p(G) = \mathrm{Dec}\, C_0M_p(G) = \mathrm{D}\, C_0M_p(G)$$

である。一方定理 L-N により

$$\begin{aligned}\mathrm{Reg}\, C_0M_p(\mathbb{T}^n) = \mathrm{Dec}\, C_0M_p(\mathbb{T}^n) = \mathrm{D}\, C_0M_p(\mathbb{T}_n)&\\ = C_{00}M_p(\mathbb{T}^n) = \{T \in C_0M_p(\mathbb{T}^n) : \sigma(T)\ \text{は高々可算集合}\}&\end{aligned}$$

であるが $C_{00}M_p(\mathbb{Z}^n) = C_0M_p(\mathbb{Z}^n)$ であるため

$$\mathrm{Reg}\, C_0M_p(\mathbb{Z}^n) = \mathrm{Dec}\, C_0M_p(\mathbb{T}^n) = \mathrm{D}\, C_0M_p(\mathbb{T}) \neq C_{00}M_p(\mathbb{Z}^n)$$

となる。以下で $\mathbb{R}^n$ の場合を考える。

定義 7 $\mathbb{R}$ の *dyadic decomposition* $(\Delta_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ を

$$\Delta_j = \begin{cases} [2^{j-1}, 2^j), & j > 0 \\ (-1, 1), & j = 0 \\ (-2^{-j}, -2^{-j-1}], & j < 0 \end{cases}$$

により定める。$f \in C_0(\mathbb{R})$ に対して $Var_{\Delta_j} f$ で Δ_j 上での f の全変動を表す。

定義 8

$$C_c(\mathbb{R}^n) = \{f \in C_0(\mathbb{R}^n) : f\ \text{はコンパクト台を持つ}\},$$

$$C_v(\mathbb{R}) = \{f \in C_0(\mathbb{R}) : f\ \text{は}\ \mathbb{R}\ \text{の任意の有界閉集合上有界変動}\}$$

とし、

$$C_0^v M_p(\mathbb{R}) = \{T \in C_0M_p(\mathbb{R}) : \widehat{T} \in C_v(\mathbb{R})\}$$

とする。

補題 4 任意の $1 < p < \infty$ に対して

$$C_c(\mathbb{R}) \cap C_v(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Dec}\,\widehat{C_0M_p}(\mathbb{R})$$

である。

証明. $f \in C_c(\mathbb{R}) \cap C_v(\mathbb{R})$ とすると $\sup_j Var_{\Delta_j} f < \infty$ である。すると strong Marcinkiewicz multiplier theorem [4, Theorem 8.3.1] により $1 < q < \infty$ なる任意の q に対して $f \in \widehat{C_0M_q(\mathbb{R})}$ である。また、Hörmander [8, Theorem 1.16] により $|1/p - 1/2| < |1/q - 1/2|$ なるとき $C_0M_q(\mathbb{R}) \subset m_p(\mathbb{R})$ である。ここで $m_p(\mathbb{R})$ は $L^1(\mathbb{R})$ の $C_0M_p(\mathbb{R})$ での閉包である。(この包含関係は任意の局所コンパクト abel 群に対して成立することが Zafran により [27] の Theorem 3.1 の証明の中で実質的に示されている。)

$$m_p(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Reg}\, C_0M_p(\mathbb{R}) = \mathrm{Dec}\, C_0M_p(\mathbb{R})$$

であるから $C_0M_q(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Dec}\, C_0M_p(\mathbb{R})$ である。よって、$f \in \mathrm{Dec}\,\widehat{C_0M_p}(\mathbb{R})$ となる。

定理 5 $1 < p < \infty$ なる任意の p に対して

$$\mathrm{Dec}\, C_0M_p(\mathbb{R}) C_0^v M_p(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Dec}\, C_0M_p(\mathbb{R})$$

が成立する。

証明. 補題2より

$$(C_c(\mathbb{R})\cap C_v(\mathbb{R}))\widehat{C_0^v M_p}(\mathbb{R})\subset \mathrm{Dec}\,\widehat{C_0 M_p}(\mathbb{R})$$

である。$\Phi_{C_0M_p(\mathbb{R})}$を$C_0M_p(\mathbb{R})$のGelfand空間とする。$C_c(\mathbb{R})\cap C_v(\mathbb{R})$が$C_0(\mathbb{R})$で稠密で

$$C_c(\mathbb{R})\cap C_v(\mathbb{R})\subset \mathrm{Dec}\,\widehat{C_0 M_p}(\mathbb{R})\subset C_0(\mathbb{R})$$

であることから、$C_c(\mathbb{R})\cap C_v(\mathbb{R})$の$C_0M_p(\mathbb{R})$におけるGelfand変換による$\Phi_{C_0M_p(\mathbb{R})}$の分割と、$\mathrm{Dec}\,C_0M_p(\mathbb{R})$によるそれとが一致することが分かる。よって、任意の$x\in\mathbb{R}$について$C_c(\mathbb{R})\cap C_v(\mathbb{R})$の$C_0M_p(\mathbb{R})$におけるGelfand変換によるlevel setでxを含むものの上で、$\mathrm{Dec}\,C_0M_p(\mathbb{R})$のGelfand変換は定数値をとる。また、定理1より

$$\mathrm{Dec}\,C_0M_p(\mathbb{R})=\{T\in C_0M_p(\mathbb{R}):\check{T}|K_x\text{は定数}\ (\forall x\in\mathbb{R}),\ \check{T}|K_\infty=0\}$$

である。よって結論が得られた。

$C_0^vM_p(\mathbb{R})$は$\mathrm{Dec}C_0M_p(\mathbb{R})$の部分集合ではないことを注意しておく。実際Zafran [25]によりFourier変換がC^∞級であるような$T\in C_0M_p(\mathbb{R})$でWiener-Pitt現象を起こすものが知られている。$\mathrm{Dec}C_0M_p(\mathbb{R})$に含まれる任意の作用素はWiener-Pitt現象を起こさないので、Zafranによるこの例が$C_0^vM_p(\mathbb{R})$に含まれ$\mathrm{Dec}C_0M_p(\mathbb{R})$に含まれないものの例を与える。

研究集会の後で$\mathrm{Dec}C_0M_p(\mathbb{R})$は$C_0M_p(\mathbb{R})$のイデアルにはならないことが分かった。さらに、$C_{00}M_p(\mathbb{R})=\{0\}$であることも分かった。これらは「第4回関数空間セミナー」において報告したが、ここで詳しい証明を与える。$C_0M_p(\mathbb{R})$のGelfand空間$\Phi_{C_0M_p(\mathbb{R})}$の$L^1(\mathbb{R})$によるlevel set分解を考える。即ち、$x\in\mathbb{R}$に対して

$$L_x=\{p\in\Phi_{C_0M_p(\mathbb{R})}:\check{f}(p)=\hat{f}(x)\ \forall f\in L^1(\mathbb{R})\},$$

$$L_\infty = \{p \in \Phi_{C_0M_p(\mathbb{R})} : \check{f}(p) = 0 \ \forall f \in L^1(\mathbb{R})\}$$

とする。補題1より

$$\Phi_{C_0M_p(\mathbb{R})} = \bigcup_{y \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}} L_y$$

となる。ここで右辺はdisjoint unionである。

補題 6

$$\widehat{T} \in C_c(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{NS}(\widehat{C_0M_p}(\mathbb{R}))$$

なる $T \in C_0M_p(\mathbb{R})$ が存在する。

証明. まず

$$\widehat{C_0M_p(\mathbb{R})} \bigcap C_c(\mathbb{R}) \not\subset \mathrm{Dec}\,\widehat{C_0M_p}(\mathbb{R})$$

を示す。そこで、

$$\widehat{C_0M_p(\mathbb{R})} \bigcap C_c(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Dec}\,\widehat{C_0M_p}(\mathbb{R})$$

と仮定して矛盾を示す。

$f \in \widehat{C_0M_p(\mathbb{Z})}$とする。$\widehat{\mathbb{Z}} = \mathbb{T}$なので$f$は区間$[0, 2\pi]$上の連続関数で$f(0) = f(2\pi)$なるものとみることができる。$f - f(0)$を改めて$f$とおく。$f$の$\mathbb{R}$へのperiodic extensionを$F$とするとde Leeuwの定理[3, Theorem 4.5]より$F \in \widehat{M_p(\mathbb{R})}$である。次に区間$(0, 2\pi)$の特性関数$\chi_{(0,2\pi)}$を考える。$1 \in \mathbb{T}$に対するDirac測度$\delta_0$のFourier変換$\hat{\delta}_0$は$\widehat{M_p(\mathbb{T})}$の要素である。ここで、

$$\hat{\delta}_0 = \begin{cases} 1, & z = 0 \\ 0, & z \neq 0 \end{cases}$$

である。するとJodeitのmultiplier extension theorem [14, Theorem 3.7]より$\chi_{(0,2\pi)} \in \widehat{M_p(\mathbb{R})}$である。$F(0) = F(2\pi) = 0$でありさらに$F$は連続なので$F\chi_{(0,2\pi)} \in \widehat{C_0M_p(\mathbb{R})}$とな

る。すると最初の仮定より $F\chi_{(0,2\pi)} \in \mathrm{Dec}\,\widehat{C_0M_p}(\mathbb{R})$ となり $F\chi_{(0,2\pi)} \in \mathrm{NS}(\widehat{C_0M_p}(\mathbb{R}))$ である。よって、$\lambda \in \mathbb{C} \setminus f(\pi)$ に対して

$$(\lambda - F\chi_{(0,2\pi)})^{-1} - \lambda^{-1} \in \widehat{C_0M_p(\mathbb{R})}$$

となるから Jodeit の multiplier restriction theorem [14, Theorem 2.3] より

$$(\lambda - f)^{-1} - \lambda^{-1} \in \widehat{C_0M_p(\mathbb{Z})}$$

となることが分かる。即ち $f \in \mathrm{NS}(C_0M_p(\mathbb{Z}))$ となる。このことはNS$(C_0M_p(\mathbb{Z}))$ が $C_0M_p(\mathbb{Z})$ の真部分集合であることに矛盾する。よって

$$\widehat{C_0M_p(\mathbb{R})} \bigcap C_c(\mathbb{R}) \not\subset \mathrm{Dec}\,\widehat{C_0M_p}(\mathbb{R})$$

が示された。$\hat{T} \in C_c(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{Dec}\,\widehat{C_0M_p}(\mathbb{R})$ なる $T \in C_0M_p(\mathbb{R})$ を考える。$L^1(\mathbb{R})$ が regular なので$\hat{T}$の台で 1 をとる$\hat{g} \in \widehat{L^1(\mathbb{R})}$が存在する。すると$\hat{T} = \hat{T}\hat{g} = \widehat{Tg}$ であって

$$\mathrm{Dec}\,C_0M_p(\mathbb{R}) = \{T \in C_0M_p(\mathbb{R}) : \check{T}|L_x\text{は定数}\,(\forall x \in \mathbb{R}),\, \check{T}|L_\infty = 0\}$$

であるから$\check{T}|L_\infty$ である。従ってある $x \in \mathbb{R}$ に対して$\check{T}|L_x$は定数ではない。$L^1(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Dec}\,C_0M_p(\mathbb{R})$ なので、必要であればコンパクト台を持つ適当な$\widehat{L^1(\mathbb{R})}$を$\hat{T}$に足すことにより、

$$\hat{T} \in C_c(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{NS}(\widehat{C_0M_p}(\mathbb{R}))$$

としてよい。

補題 7

$$\hat{T} \in C_c(\mathbb{R}^n) \setminus \mathrm{NS}(\widehat{C_0M_p}(\mathbb{R}^n))$$

なる $T \in C_0M_p(\mathbb{R}^n)$ が存在する。

証明. $n=1$ の場合は補題4で示したので $n>1$ の場合を考える。まず

$$\widehat{C_0M_p(\mathbb{R}^n)} \bigcap C_c(\mathbb{R}^n) \not\subset \mathrm{Dec}\,\widehat{C_0M_p}(\mathbb{R}^n)$$

を示す。そこで $\widehat{C_0M_p(\mathbb{R}^n)} \cap C_c(\mathbb{R}^n) \subset \mathrm{Dec}\,\widehat{C_0M_p}(\mathbb{R}^n)$ と仮定して矛盾を示す。写像

$$L : \widehat{C_0M_p(\mathbb{R}^n)} \to C_0(\mathbb{R})$$

を $L(f) = f(\cdot, 0, \cdots, 0)$ により定めると

$$L(\widehat{C_0M_p(\mathbb{R}^n)} \bigcap C_c(\mathbb{R}^n)) = \widehat{C_0M_p(\mathbb{R})} \bigcap C_c(\mathbb{R})$$

となる。実際 de Leeuw [3, Proposition 3.2] の定理から $\subset$ がわかる。逆向きの包含関係を調べる。Saeki [19, Lemma 3.1] の定理を $G=\mathbb{R}^n$, $H=\{(x,0,\cdots,0)\in\mathbb{R}^n : x\in\mathbb{R}\}$ の場合に適用すると $f\circ\pi \in C_0M_p(\mathbb{R}^n)$ となる。ここで $\pi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ は $\pi(x_1,\cdots,x_n)=x_1$ により定める。$X=\mathrm{supp}f\times[-1,1]^{n-1}$ とし U は X のコンパクト近傍とする。$L^1(\mathbb{R}^n)$ が regular であることから

$$G = \begin{cases} 1, & \text{on } X \\ 0, & \text{on } \mathbb{R}^n \setminus U \end{cases}$$

なる $G \in \widehat{L^1(\mathbb{R}^n)}$ が存在する。すると

$$G\cdot f\circ\pi \in \widehat{C_0M_p(\mathbb{R}^n)} \bigcap C_c(\mathbb{R}^n)$$

で、$L(G\cdot f\circ\pi) = f$ となる。よって $\supset$ が示された。

一方

$$L|\mathrm{Dec}\,\widehat{C_0M_p}(\mathbb{R}^n) : \mathrm{Dec}\,\widehat{C_0M_p}(\mathbb{R}^n) \to \widehat{C_0M_p}(\mathbb{R})$$

は準同型写像で Dec$C_0M_p(\mathbb{R}^n)$ =Reg$C_0M_p(\mathbb{R}^n)$ なので Laursen-Neumann [15, Proposition 1.1] より

$$L(\mathrm{Dec}\,\widehat{C_0M_p}(\mathbb{R}^n)) \subset \mathrm{Dec}\,\widehat{C_0M_p}(\mathbb{R})$$

となる。よって最初の仮定より

$$\widehat{C_0M_p(\mathbb{R})}\bigcap C_c(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Dec}\,\widehat{C_0M_p}(\mathbb{R})$$

となるが、これは補題4と矛盾する。よって

$$\widehat{C_0M_p(\mathbb{R}^n)}\bigcap C_c(\mathbb{R}^n) \not\subset \mathrm{Dec}\,\widehat{C_0M_p}(\mathbb{R}^n)$$

が示された。あとは補題4の証明の最後の部分と同様にして結論が得られる。

Zafran [25] は$\widehat{T} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ である $T \in C_0M_p(\mathbb{R}^n) \setminus \mathrm{NS}(C_0M_p(\mathbb{R}^n))$ の存在を示している。補題5で得られる Tは$\widehat{T}$がコンパクト台を持つ作用素である。特に $n=1$ のときこの$\widehat{T}$は、strong Marcinkiewicz theorem より、局所有界変動にならないことが分かる。よってこの T は Zafran のものとは異なることを注意する。また、この Tは $C_0M_p(\mathbb{R}^n)$ で Wiener-Pitt 現象を起こすので、Fourier 変換がコンパクト台を持つような測度は $C_0M_1(\mathbb{R}^n)$ で Wiener-Pitt 現象を起こさない（実際、Dec $C_0M_1(\mathbb{R}^n)$ が $C_0M_p(\mathbb{R}^n)$ のイデアルであるから

$$C_c(\mathbb{R}^n)\bigcap \widehat{C_0M_1(\mathbb{R}^n)} \subset \mathrm{Dec}\,\widehat{C_0M_1}(\mathbb{R}^n)$$

となり、Fourier 変換がコンパクト台を持つような測度は Wiener-Pitt 現象を起こさない）のとは様子が違う。

補題 8 任意の $x \in \mathbb{R}^n$に対して $L_x \neq \{x\}$ である。

証明. $n=1$の場合は補題4の最後の部分で、実質的に、$L_x \neq \{x_0\}$となる$x_0 \in \mathbb{R}$の存在が示されている。$n>1$の場合も同様に証明される。つまり$x_0 \in \mathbb{R}^n$と$f \in C_0\widehat{M_p(\mathbb{R}^n)} \bigcap C_c(\mathbb{R}^n) \setminus \mathrm{Dec}\,\widehat{C_0M_p}(\mathbb{R}^n)$が存在して$f$は$L_{x_0}$で定数でない。そこで、任意の$x \in \mathbb{R}^n$にたいして$f_x$を

$$f_x(t) = f(t - x + x_0)$$

と定めれば

$$f_x \in C_0\widehat{M_p(\mathbb{R}^n)} \bigcap C_c(\mathbb{R}^n) \setminus \mathrm{Dec}\,\widehat{C_0M_p}(\mathbb{R}^n)$$

であり、f_xはL_xで定数ではない。

以上の定理、補題等より次が分かる。

定理 9 $1<p<\infty,\ p \neq 2$とする。

$$\mathrm{Reg}\,C_0M_p(\mathbb{R}^n) = \mathrm{Dec}\,C_0M_p(\mathbb{R}^n) = \mathrm{D}\,C_0M_p(\mathbb{R}^n) \subset \mathrm{NS}(C_0M_p(\mathbb{R}^n))$$

であり、左辺は$NS(C_0M_p(\mathbb{R}^n)$の部分集合で和について閉じているものの中で極大である。また、$\mathrm{Dec}\,C_0M_p(\mathbb{R}^n)$は$C_0M_p(\mathbb{R}^n)$のイデアルではない。そして、

$$C_{00}M_p(\mathbb{R}^n) = \{0\}$$

である。

次に$m_p(\mathbb{R}^n)$と$\mathrm{Dec}\,C_0M_p(\mathbb{R}^n)$の関係を調べる。任意の局所コンパクトabel群$G$について、$\widehat{L^1(G)}$は$\widehat{G}$は$C_0(\widehat{G})$で稠密であることから、$m_p(G)$による$\Phi_{C_0M_p(G)}$の分解と$C_0M_p(G)$によるそれとは一致することが分かる。さらに、$p=1$で$G$が非離散の場合は$m_1(G)=L^1(G)$は$\mathrm{Dec}\,C_0M_1(G)$の真部分集合であることがが古典的に知られている。$1<p<\infty, p \neq 2$の

場合、Zafran [24, Proposition 2.9] はFigà-Talamanca and Gaudry [6] のTheorem Bの証明の中にでてくる関数$\varphi \in \mathrm{Dec}\, C_0M_p(\mathbb{T})$ は$m_p(\mathbb{T})$ には属さないが、$\varphi^2 \in m_p(\mathbb{T})$ であることを示した。このことから、$\varphi \in \mathrm{Dec}\,\widehat{C_0M_p}(\mathbb{T})$であることが分かる。さらに、$n \geq 1$ なる$\mathbb{T}^n$においてもφを$\mathbb{Z}^n$に適当に拡張した関数が同様の性質を有していることが分かる。

定理 10 φを上で述べた*Figà-Talamanca*の関数とする。$\mathbb{Z}^n$上の関数Φを

$$\Phi(z_1,\ldots,z_n) = \begin{cases} \varphi(z_1), & \textit{if } z_2 = \cdots = z_n = 0 \\ 0, & \textit{otherwise} \end{cases}$$

と定める。このとき、

$$\Phi \in \mathrm{Dec}\,\widehat{C_0M_p}(\mathbb{T}^n) \setminus \widehat{m_p(\mathbb{T}^n)}, \quad \Phi^2 \in \widehat{m_p(\mathbb{T}^n)}$$

である。

証明. $\mathbb{T}^n$上1をとる恒等関数のFourier変換をΔはpositieve definiteで

$$\Delta(z_1,\ldots,z_n) = \begin{cases} 1, & z_1 = \cdots z_n = 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

であるから、

$$\Phi(z_1,\ldots,z_n) = \sum_{x_1\in\mathbb{Z}} \varphi(x_1)\Delta^2((z_1,\ldots,z_n) - (x_1,0,\ldots,0))$$

である。すると、Figà-Talamanca and Gaudry [5, Theorem 1] より$\Phi \in \widehat{C_0M_p(\mathbb{T}^n)}$がわかる。また、$1 < q < \infty$ なる任意のqに対して$\varphi^2 \in \widehat{C_0M_q(\mathbb{T})}$だから、上と同様にして$\Phi^2 \in \widehat{C_0M_q(\mathbb{T}^n)}$である。Zafran [27] のTheorem 3.1の証明の中で本質的に述べられているように、$|1/2-1/p| < |1/2-1/q|$ のとき$C_0M_q(\mathbb{T}^n) \subset m_p(\mathbb{T}^n)$ である。よって、$\Phi^2 \in \widehat{m_p(\mathbb{T}^n)}$である。

また、$\mathbb{T}^n$がコンパクトなので $L^p(\mathbb{T}^n)$ が可換 Banach 環となり、$M_p(\mathbb{T}^n)$ は $L^p(\mathbb{T}^n)$ の可換 Banach 環としての multiplier である。また、$L^p(\mathbb{T}^n)$ の極大イデアル空間 $\mathbb{Z}^n$は離散空間なので Laursen and Neumann [15, Theorem 3.1] より

$$m_p(\mathbb{T}^n) \subset \mathrm{Reg}\, C_0M_p(\mathbb{T}^n) = \mathrm{Dec}\, C_0M_p(\mathbb{T}^n)$$

$$= NS(C_0M_p(\mathbb{T}^n)) = \{T \in C_0M_p(\mathbb{T}^n) : T\text{のスペクトルは可算集合}\}$$

であるから、Φ^2のスペクトルは可算集合である。よって、Φのスペクトルも可算集合であるので$\Phi \in \mathrm{Dec}\, \widehat{C_0M_p}(\mathbb{T}^n)$となる。

最後に$\Phi \notin \widehat{m_p(\mathbb{T}^n)}$を示す。そこで、$\Phi \in \widehat{m_p(\mathbb{T}^n)}$と仮定する。すると $\mathbb{Z}^n$上の有限台をもつ関数の列 $\{f_n\}$ が存在して、$n \to \infty$ のとき $\|\Phi - f_n\|_{M_p(\mathbb{T}^n)} \to 0$ とできる。一方 de Leeuw の定理 [3, Lemma 3.1] と閉グラフ定理より、正数Kが存在して

$$\|\Phi|\mathbb{Z} - f_n|\mathbb{Z}\|_{M_p(T)} \leq K\|\Phi - f_n\|_{M_p(\mathbb{T}^n}$$

がすべての自然数 n について成立する。ここで $\mathbb{Z}$ と $\{(z, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}^n : z \in \mathbb{Z}\}$ を同一視している。$\Phi|\mathbb{Z} = \varphi$ である。また、$f_n|\mathbb{Z}$ は有限台を持つから $f_n|\mathbb{Z} \in \widehat{L^1(\mathbb{T})}$である。従って $\varphi \in \widehat{m_p(T)}$となるが、これは矛盾を起こしている。以上より$\Phi \notin \widehat{m_p(\mathbb{T}^n)}$が示された。

注) strong Marcinkiewicz theorem [4, Theorem 8.2.1] より $1 < q < \infty$ なる任意の qに対して$\varphi^2 \in C_0\widehat{M_q(\mathbb{T})}$であるから$\Phi^2 \in C_0\widehat{M_q(\mathbb{T}^n)}$である。

この定理のΦを、Figà-Talamanca and Gaudry [5, Theorem 1] を用いて $\mathbb{R}^n$上の multiplier に拡張したものがΦと類似な性質を有していることが分かる。

定理 11

$$f \in \mathrm{Dec}\, \widehat{C_0M_p}(\mathbb{R}^n) \setminus \widehat{m_p(\mathbb{R}^n)}, \quad f^2 \in \widehat{m_p(\mathbb{R}^n)}$$

なる f が存在する。

証明. Φを定理 10 のものとする。Δを台が $\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n : |x_j|\le 1/10\}$ に含まれる positive definite な$\widehat{L^1(\mathbb{R}^n)}$の関数で$\Delta(0)=1$ なるものとする。$\mathbb{R}^n$上の関数 fを

$$f(x)=\sum_{z\in\mathbb{Z}^n}\Phi(z)\Delta^2(x-z)$$

と定める。ただし$x=(x_1,\dots,x_n), z=(z_1,\dots,z_n)$ とする。Figà-Talamanca and Gaudry [5] の Theorem 1 を $X=\mathbb{R}^n$, $X_0=\mathbb{Z}^n$, $U=\{x\in\mathbb{R}^n : |x_j|\le 1/10\}$, $p=q$の場合に適用して $f\in C_0M_p(\mathbb{R}^n)$ が分かる。Figà-Talamanca and Gaudry [6] の Proof of Theorem A の p.486 の部分と同様に $f\notin m_p(\mathbb{R}^n)$ が分かる。また、$f^2(x)=\sum\Phi^2(m)\Delta^4(x-m)$ であり、$1<q<\infty$ なる任意の qに対して$\Phi^2\in C_0\widehat{M_q(\mathbb{T}^n)}$であるから $f^2\in C_0\widehat{M_q(\mathbb{R}^n)}$である。すると Hörmander [8, Theorem 1.16] より $f^2\in\widehat{m_p(\mathbb{R}^n)}$ となり、$m_p(\mathbb{R}^n)\subset \mathrm{Dec}\, C_0M_p(\mathbb{R}^n)$ なので定理 1 を $Y=\mathbb{R}^n$, $M=C_0\widehat{M_p(\mathbb{R}^n)}$, $R=L^1(\mathbb{R}^n)$ の場合に適用すると、$\check{f^2}|L_\infty=0$ である。よって$\check{f}|L_\infty=0$ でもある。ここで、

$$L_\infty=\bigcap_{g\in L^1(\mathbb{R}^n)}\check{g}^{-1}(0)$$

である。ただし$\check{g}$は gの $C_0M_p(\mathbb{R}^n)$ における Gelfand 変換をあらわす。また、$x\in\mathbb{R}^n$に対して

$$L_x=\bigcap_{g\in L^1(\mathbb{R}^n)}\check{g}^{-1}(\hat{g}(x))$$

とする。任意の$x\in\mathbb{R}^n$に対して$\check{f}|L_x$が定数であることが分かれば、定理 1 より $f\in\mathrm{Dec}\,\widehat{C_0M_p}(\mathbb{R}^n)$ が分かる。そこで、$\check{f}|L_{x_0}$が定数でないような$x_0\in\mathbb{R}^n$が存在したとする。$\check{f^2}\in\mathrm{Dec}\,\widehat{C_0M_p}(\mathbb{R}^n)$ なので、$\check{f^2}|L_{x_0}$は定数である。従って$\check{f}|L_{x_0}$が定数でないので異なる 2 つの値を持つことに

なる。それらが 1 と-1だと仮定して一般性を失わないのでそうする。すると$\hat{f}^2(x_0) = 1$である。よって$z_0 \in \mathbb{Z}^n$が存在して$\Delta(x_0 - z_0) \neq 0$となる。gを有限台を持ち、$g(z_0) = 1$なる$\mathbb{Z}^n$上の関数とする。$\mathbb{R}^n$上の関数Gを

$$G(x) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} g(z) \Delta^2(x - z)$$

と定めると有限個のzを除いて$g(z) = 0$で$\Delta \in \widehat{L^1(\mathbb{R}^n)}$なので、$G \in \widehat{L^1(\mathbb{R}^n)}$であり、$G(x_0) = \Delta^2(x_0 - z_0) > 0$となる。strong Marcinkiewicz theorem [4, Theorem 8.2.1] より$1 < q < \infty$なる任意のqに対して$(\Phi + g)^2 \in C_0\widehat{M_q(\mathbb{T}^n)}$となる。$\Delta$の台が小さいことに注意すれば、$(f + G)^2 \in C_0\widehat{M_q(\mathbb{R}^n)}$であることが分かる。従って$(f + G)^2 \in \mathrm{Dec}\,\widehat{C_0M_p}(\mathbb{R}^n)$となるから$(\check{f} + \check{G})^2|L_{x_0}$は定数である。一方、$G \in \widehat{L^1(\mathbb{R}^n)}$で$L^1(\mathbb{R}^n) \subset \mathrm{Dec}\,C_0M_p(\mathbb{R}^n)$だから$\check{G}|L_{x_0} = G(x_0) > 0$である。また、$f|L_{x_0}$は 1 と$-1$と両方の値をとるので、$(f + G)^2|L_{x_0}$は定数にならない。即ち、矛盾が起きた。以上から任意の$x \in \mathbb{R}^n$について$f|L_x$は定数であることがいえ、従って$f \in \mathrm{Dec}\,\widehat{C_0M_p}(\mathbb{R}^n)$が示された。

5。$\mathrm{NS}(C_0M_p(G))$の中身については大きな部分が可換Banach環の言葉で記述できたが、$\mathrm{NS}(M_p(G))$については$p = 1$の場合を含めて不明な点が多い。Albrecht の結果 [1, Lemma 3.2] から$\mathrm{D}\,M_p(G) \subset \mathrm{NS}(M_p(G))$や Neumann や Laursen の結果から

$$\mathrm{Reg}\,M_p(G) \subset \mathrm{Dec}\,M_p(G) \subset \mathrm{D}\,M_p(G)$$

等が知られている程度である。

また$C_0M_p(G)$の最大正則部分環、Apostol 環を Fourier 変換の言葉で記述するという大きな問題が$p = 1$の場合も含めて残っている。

参考文献

[1] E. Albrecht, *Decomposable systems of operators in harmonic analysis*, In Toeplitz Centennial (I. Gohberg, ed.), Birkhäuser, Basel 1982, pp. 19–35

[2] C. Apostol, *Decomposable multiplication operators*, Rev. Roum. Math. Pures Appl. 17(1972), 323–333

[3] K. de Leeuw, *On L_p multipliers*, Ann. of Math. 81(1965), 364–379

[4] R. Edwards and G. Gaudry, *Littlewood-Paley and Multiplier theory*, Springer 1977

[5] A. Figà-Talamanca and G. I. Gaudry *Extension of multipliers*, Boll. U. M. I., ser. iv 3(1970), 1003–1014

[6] A. Figà-Talamanca and G. I. Gaudry *Multipliers of L^p which vanish at infinity*, Jour. Funct. Anal. 7(1971), 475–486

[7] 羽鳥　理, *Spectra of Fourier multipliers*, 平成６年度関数環論研究集会報告集

[8] L. Hörmander, *Estimates for translation invariant operators in L^p spaces*, Acta Math. 104(1960), 93–140

[9] S. Igari, *Functions of L^p-multipliers*, Tôhoku Math. J. 21(1969), 304–320

[10] J. Inoue and S.-E. Takahasi, *A note on the largest regular subalgebra of a Banach algebra*, Proc. Amer. Math. Soc. 116(1992), 961–962

[11] K. Izuchi, *On measures whose spectra are countable sets*, Sci. Rep. Res. Inst. Engrg. Kanagawa Univ. No.2(1979), 73–80

[12] K. Izuchi, *An L-subspace generated by a certain measure with countable spectrum*, Colloq. Math. 44(1981), 327–332

[13] K. Izuchi and C. Shimizu, *On measures with countable spectra*, Approximation theory in functional analysis (Proc. Sympos., Re. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ., Kyoto,1975) Sûrikaisekikenkyûsho Kôkyûroku No.265(1976), 1–9

[14] M. Jodeit, Jr., *Restrictions and extensions of Fourier multipliers*, Studia Math. 34(1970), 215–226

[15] K. B. Laursen and M. M. Neumann, *Decomposable multipliers and applications to harmonic analysis*, Studia Math.101(1992), 193–214

[16] M. M. Neumann, *Banach algebras, decomposable convolution operators, and a spectral mapping property*, In Function Spaces (K. Jarosz, ed.), Marcel Dekker, New York 1992, pp. 307–323

[17] M. M. Neumann, *Commutative Banach algebras and decomposable operators*, Mh. Math. 113(1992), 227–243

[18] W. Rudin, *Fourier-Stieltjes transforms of measures on independent sets*, Bull. Amer. Math. Soc. 66(1960), 199–202

[19] S. Saeki, *Translation invariant operators on groups*, Tôhoku Math. J 22(1970), 409–419

[20] N. Varopoulos, *Sur les measures de Radon d'un groupe localement compact abélian*, C. R. Acad. Sci. Paris 258(1964), 3805–3808

[21] N. Varopoulos, *Sur les measures de Radon d'un groupe localement compact*, C. R. Acad. Sci. Paris 258(1964), 4896–4899

[22] J. G. Wendel, *On isometric isomorphism of group algebras*, Pacific J. Math. 1(1951), 305–311

[23] J. H. Williamson, *A theorem on algebras of measures on topological groups*, Proc. Edinburgh Philos. Soc. 11(1959), 195–206

[24] M. Zafran, *On the spectra of multipliers*, Pacific J. Math. 47(1973), 609–626

[25] M. Zafran, *The spectra of multiplier transformations on the L_p spaces*, Ann. Math. 103(1976), 355–374

[26] M. Zafran, *The function operating on multiplier algebras*, J. Funct. Anal. 26(1977), 289–314

[27] M. Zafran,*Multipliers of L_p and the operational calculus*,Lecture Notes in Math. 908, Springer, Berlin 1982, pp. 228–246