数理解析研究所講究録
946巻 1996年 152-160

BMO を保つ Riemann 面間の正則写像について

防衛大　後藤 泰宏 (Yasuhiro Gotoh)

BMO の擬等角不変性に関連した話題としてここでは BMO を保存する正則写像について考える. §1 では 平面領域間の正則写像の場合を考える. §2 では平面領域上の quasihyperbolic 距離の一般化である Hahn 距離を導入し §3 において Riemann 面間の正則写像の場合を考える.

以下正則写像といえば全て非定数とし被覆写像と言えば正則写像でかつ非分枝非有界な被覆写像のこととする. また $a \approx b$ はある絶対定数 $A > 0$ に対し $A^{-1} \leq a/b \leq A$ なることを, また $a \lesssim b$ はある絶対定数 $A > 0$ に対し $a \leq Ab$ なることをあらわすものとする.

§1. 平面領域上のBMO空間

平面領域 D 上の関数 $g \in L^1_{loc}(D)$ は

$$\|g\|_* = \|g\|_{*,D} = \sup_B |B|^{-1}\int_B |g - g_B| dxdy < \infty,$$

なるとき $BMO(D)$ 関数であるという. ここで sup は D 上の全ての開円板 B について とり g_B は B 上での g の積分平均とする. また調和な, 或は正則な $BMO(D)$ 関数のなす空間をそれぞれ $BMOH(D)$, $BMOA(D)$ とあらわす. $BMO(D)$ 関数は任意の $p < \infty$ に対し $L^p_{loc}(D)$ 関数となる. また有界関数は BMO 関数となるが有界でない BMO 関数も存在する (B5. 参照).

以下においては BMO についての次に述べる性質がくり返し用いられる.

BMO の性質

B1. 調和関数 f については $f \in BMOH(D) \Leftrightarrow |\nabla f(z)| \leq C/d(z, \partial D)$. またこのとき $\inf C \approx \|f\|_*$.

B2. (局所化定理) $BMO(D)$ の定義において sup は $d(B, \partial D) \geq L\,\mathrm{rad}(B)$ なる円盤 $B \subset D$ についてとれば十分.

B3. (除去可能性) D の離散部分集合 E が $d(B, \partial D) \geq C\,\mathrm{rad}(B)$ なる任意の円盤 $B \subset D$ 上 $\sharp(E \cap B) \leq N$ をみたせば $BMO(D \setminus E) = BMO(D)$.

B4. 優調和関数 s, $\Delta s = -\mu$, について $s \in BMO(D)$ であれば $d(B, \partial D) \geq C\,\mathrm{rad}(B)$ なる円盤 $B \subset D$ 上において μ の質量は一様に有界.

B5. $\log|z| \in BMO(\hat{\mathbf{C}})$.

平面領域間の向きを保つ同相写像 $F : D \to D'$ は ACL (absolutely continuous on line) であってかつ定数 $K \geq 1$ が存在し D 上のほとんど至る所の点 z において

$$\max\{\|Df(z)\cdot v\| \mid \|v\|=1\} \leq K \min\{\|Df(z)\cdot v\| \mid \|v\|=1\}$$

なるとき擬等角写像であるといい K をその maximal dilatation という. Maximal dilatation が 1 である擬等角写像は等角写像に限る.

命題 1 (Reimann[8], Jones[5]). $F : D \to D'$ を平面領域間の擬等角写像は BMO を保存する. すなわち

$$C(K)^{-1}\|f\|_{*,D'} \leq \|f\circ F\|_{*,D} \leq C(K)\|f\|_{*,D'}, \quad f \in BMO(D').$$

ここで $C(K)$ は f の *maximal dilatation* K にのみ依存する定数である. 逆に向きを保つ同相写像 $F : D \to D'$ が ACL であってかつ BMO を保存すれば F は擬等角写像でありかつその *maximal dilatation* はその作用素 *norm* によって評価できる.

Reimann は $D = \mathbf{C}$ なるときにこの結果を証明し Jones はその証明が一般の擬等角写像に対しても通用する事を注意している. この意味で BMO を保存するという性質が擬等角写像を特徴づける. 擬等角写像は等角写像の一般化であるが正則写像も同様に擬正則写像として一般化される. 我々は Reimann-Jones の結果において写像の単射性をはずすときどうなるかを問題としたい. そのとき必然的に擬正則写像を考えることになるが 2 次元空間上の擬正則写像は 3 次元以上の場合とは大きく状況が異なり擬正則写像 F は常に擬等角写像 G 及び正則写像 H の合成 $F = H\circ G$ とあらわされる. よって BMO の擬等角不変性により F としては最初から正則写像だけを考えれば十分である. よって以下では正則写像のみを考察の対象とする.

正則写像 $F : D \to D'$ について, 任意の $f \in BMO(D')$ (resp.$BMOH(D)$, $BMOA(D)$) に対し $T_F f = f\circ F \in BMO(D)$ なるとき F を BMO ($BMOH$, $BMOA$) 写像 と呼ぶことにする. Reimann-Jones の結果から等角写像 F は常に BMO 写像でかつ $\|T_F\|_{BMO} \lesssim 1$ (定義域, 値域によらない評価!) である.

定理 1. 平面領域間の正則写像 $F : D \to D'$, について以下は同値:

(1) F は BMO 写像;

(2) ある $L, p > 0$, について $d(B, \partial D) \geq L\,\mathrm{rad}(B)$ なる任意の円盤 $B \subset D$ 上 F は p 葉;

(3) $\log|F'| \in BMO(D)$;

(4) F の分枝点の集合 E は $BMO(D)$ に関し除去可能な集合でありかつある $L > 0$, について $d(B, \partial(D\setminus E)) \geq L\,\mathrm{rad}(B)$ なる任意の円盤 $B \subset D\setminus E$ 上 F は単葉;

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (1) のみ示す. ((1) $\Rightarrow$ (2)): F が BMO 写像 であれば B5 より $\log|F-\zeta|$, $\zeta \in \mathbf{C}$, の BMO norm は有界であり B4 より (2) を得る. ((2) $\Rightarrow$ (4)): これは p-葉関数論の一般論及び B3 による. ((4) $\Rightarrow$ (1)): (4) とする. $f \in BMO(D')$ とすると B2 より $T_F f \in BMO(D\setminus E) = BMO(D)$. ∎

$\Delta^* = \Delta \setminus \{0\} = \{0 < |z| < 1\}$ 上の正則関数 F が BMO 写像 であれば B3, B5 より $\log|F| \in BMO(\Delta^*) = BMO(\Delta)$. よって BMO の指数可積分性 (John-Nirenberg の定理) よりある $\varepsilon > 0$ に対し $|F|^\varepsilon$ は Δ 上可積分となり原点は F の真性特異点ではない. よって

系 1. 平面領域間の正則写像 F が BMO 写像 であれば F は孤立真性特異点を持たない. 特に

(1) Dを $\mathbf{C}$ から高々有限個の点を除いて得られる領域, D' を平面領域とするとき正則写像 $F: D \to D'$ が BMO 写像であるのはそれが有理関数であるときに限る.

(2) 正則写像 $F: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ が BMO 写像 となるのはそれが多項式であるときに限る.

(2) については F の次数を n とするとき $n \leq \|T_F\|_{BMO}$ は B5 より自明だが $\|T_F\|_{BMO} \lesssim n$ となるかどうかは不明である.

定理 2. 平面領域間の正則写像 $F: D \to D'$, $D' \neq \mathbf{C}$, について以下は同値:

(1) F は $BMOH$ 写像;

(2) $D \neq \mathbf{C}$ かつ F は擬双曲距離に関し *Lipschitz* 連続, すなわち

$$\frac{|dF(z)|}{d(F(z), \partial D')} \leq K \frac{|dz|}{d(z, \partial D)}, \quad z \in D;$$

(3) ある $L > 0$ について $d(B, \partial D) \geq L\,\mathrm{rad}(B)$ なる任意の $B \subset D$ に対し $F(B)$ は $\partial D'$ の成分を囲まない.

またこのとき $\|T_F\|_{BMOH} \approx \inf K$, $\inf L^{-1} \lesssim \inf K \lesssim \inf L^{-1} + 1$.

証明. (2) $\Rightarrow$ (1) は B1 による. ((1) $\Rightarrow$ (2)): F が BMO 写像 とする. $z \in D$ に対し $d(F(z), \partial D') = |F(z) - \zeta|$ なる点 $\zeta \in \partial D'$ をとると B1, B5 より $|F'(z)|/|F(z) - \zeta| \leq C/d(z, \partial D)$. ((3) $\Rightarrow$ (2)): (3) とする. $z \in D$ とし z を中心とする $d(B, \partial D) = L\,\mathrm{rad}(B)$ なる円盤 B をとる. 仮定より $F(B) \subset G \subset D'$ なる単連結領域 G が取れるので

$$\begin{aligned}\frac{|dF(z)|}{d(F(z), \partial D')} &\leq \frac{|dF(z)|}{d(F(z), \partial G)} \leq 4\rho_G(F(z))|dF(z)| \\ &\leq 4\rho_B(z)|dz| = \frac{4|dz|}{\mathrm{rad}(B)} \leq \frac{4(L+1)|dz|}{d(z, \partial D)},\end{aligned}$$

ここで ρ_G, ρ_B は hyperbolic 距離とする. ((2) $\Rightarrow$ (3)): (2) とする. $L > K/\pi$ として (3) が成立することを示す. もしそうでないならば $d(B, \partial D) \geq L\,\mathrm{rad}(B)$ なるある円盤 B に対し $F(B)$ は ある点 $w_0 \in \partial D'$ の回りを囲む. $z_1 \neq z_2$, なるある z_1, $z_2 \in B$ に対し $F(z_1) = F(z_2)$ であり z_1, z_2 を結ぶ線分を γ として $w - w_0 = re^{i\theta}$ とすれば

$$2\pi \leq \int_{F(\gamma)} \frac{r|d\theta|}{r} \leq \int_{F(\gamma)} \frac{|dw|}{d(w, \partial D')} \leq \int_\gamma \frac{K|dz|}{d(z, \partial D)} < \frac{2K\,\mathrm{rad}(B)}{d(B, \partial D)} \leq \frac{2K}{L} < 2\pi,$$

となるがこれは矛盾. ∎

被覆写像については定理 1 及び 2 の条件は一致し

系 2. 平面領域間の被覆写像 $\pi : D \to D'$, $D' \neq \mathbf{C}$, について F が BMO 写像 となるのはそれが $BMOH$ 写像となるときに限る.

特に単位円板 Δ を普遍被覆面とする場合についてはΔ 上の quasihyperbolic 距離 $|dz|/d(z,\partial D)$ と hyperbolic 距離 $\rho_\Delta(z)|dz| = |dz|/(1-|z|^2)$ は比較可能なので

系 3. $\pi : \Delta \to D$ を平面領域 D の普遍被覆写像とするとき F が BMO 写像 (或は $BMOH$ 写像) となるのは

$$\frac{|dz|}{d(z,\partial D)} \leq C\rho_D(z)|dz|, \quad z \in D,$$

なる場合に限る. ここで $\rho_D(z)|dz|$ は D 上の *hyperbolic* 距離.

常に $\rho_D(z)|dz| \leq |dz|/d(z,\partial D)$ であるからこのとき $\rho_D(z)|dz|$ と $|dz|/d(z,\partial D)$ は比較可能となる. この条件は $\mathbf{C} \setminus D$ が uniformly perfect set なることと同値であることが知られている. また各 $z \in \Delta$ に対し z を中心とし π が単葉となるような hyperbolic 円盤の最大 hyperbolic 半径 (これを z を中心とする単射半径という) を $r(z)$ とすれば定理 2 よりこの条件は $\inf_{z\in\Delta} r(z) > 0$ ともあらわせる.

最後に $BMOA$ に関しては単位円板上の正則関数はその逆関数の Riemann 面が任意に大きい単葉円盤を含まないときに限り Bloch 関数となったので B1 より

定理 3. 平面領域間の正則写像 $F : D \to D'$ は常に $BMOA$ 写像 となりかつ $\|T_F\|_{BMOA} \lesssim 1$.

§2. Hahn 距離

平面領域上の quasihyperbolic 距離 $|dz|/d(z,\partial D)$ は次の意味で等角不変である: $F : D \to D'$ を平面領域間の等角写像として

$$\frac{|dz|}{4d(z,\partial D)} \leq \frac{|dF(z)|}{d(F(z),\partial D')} \leq \frac{4|dz|}{d(z,\partial D)},$$

この距離の一般化となる Riemann 面 R 上の 距離 $\hat{\rho}_R(z)|dz|$ を

$$\hat{\rho}_R(z) = \inf_G \rho_G(z), \quad z \in R$$

により定める. ここで inf は $z \in G \subset D$ なる R 上の単連結領域 G の全体についてとり $\rho_G(z)|dz|$ は G 上の hyperbolic 距離とする. 言い換えれば

$$\hat{\rho}_R(z) = \inf |\phi'(0)|^{-1}$$

ここで inf は $\phi(0)=z$ なる単位円板 Δ から R への単葉な正則写像の全体についてとるものとする. (”単葉”なる仮定をはずしたものが Kobayashi 擬距離 (= hyperbolic 距離) であった.) 平面領域 D については

$$\frac{|dz|}{4d(z,\partial D)} \leq \hat{\rho}_D(z)|dz| \leq \frac{|dz|}{d(z,\partial D)},$$

二重連結領域上の Hahn 距離については Minda[6] に詳しい.

Hahn 距離の基本的な性質

∘ R が hyperbolic 距離 $\rho_R(z)|dz|$ を持てば $\rho_R(z)|dz| \leq \hat{\rho}_R(z)|dz|$.
∘ $S \subset R$ ならば $\hat{\rho}_R(z)|dz| \leq \hat{\rho}_S(z)|dz|$, $z \in S$.
∘ $\pi : \tilde{R} \to R$ が被覆写像であれば $\hat{\rho}_R(\pi(z))|d\pi(z)| \geq \hat{\rho}_{\tilde{R}}(z)|dz|$.
∘ Hahn 距離が退化するのは $R = \hat{\mathbf{C}}$, $\mathbf{C}$ なるときに限る.

平面領域 D 上の擬双曲距離に対しては ∂D を囲む閉曲線 γ に対し常に

$$\int_\gamma \frac{|dz|}{d(z,\partial D)} \geq 2\pi.$$

となり定理 2 ではこの事実を利用した. 同様に

命題 2. 閉曲線 $\gamma \subset R$, $\gamma \not\sim 0$, に対し

$$\int_\gamma \hat{\rho}_R(z)|dz| \geq \pi/2.$$

等号は $R = \mathbf{C} \setminus \{0\}$, $\gamma = \{|z| = r\}$, $0 < r < \infty$, なる場合にのみ成立.

命題 3. 正則写像 $F : R \to R'$, $R, R' \neq \hat{\mathbf{C}}, \mathbf{C}$, に対し以下は同値:
(1) $\hat{\rho}_{R'}(F(z))|dF(z)| \leq C\hat{\rho}_R(z)|dz|$, $z \in R$;
(2) ある $L > 0$ が存在し *Hahn* 距離での直径が高々 L であるような集合 $E \subset R$ に対し $F(E)$ は R' において常に可縮.

§3. Riemann 面間の BMO 写像

Riemann 面 R 上の関数 $f \in L^1_{loc}(R)$ は

$$\|f\|_{*,R} = \sup_\phi \pi^{-1} \int_\Delta |f\circ\phi - (f\circ\phi)_\Delta|dxdy < \infty,$$

なるとき $BMO(R)$ 関数であるという. ここで sup は injective な正則写像 $\phi : \Delta \to R$ の全体についてとるものとする. R が平面領域の場合には (norm の絶対定数倍をのぞき) 通常の $BMO(R)$ 関数と一致する. Quasihyperbolic 距離を Hahn 距離に置き換えるこ

とで Riemann 面上の BMO 関数に対しても §1 とほぼ同様の議論ができる. たとえば R 上の調和関数 f については $f \in BMOH(R) \Leftrightarrow |\nabla f(z)| \leq C\hat{\rho}_R(z)$.

平面領域においては BMO 写像 の特徴づけに対数関数 (=与えられた点において対数的特異性を持つ調和な BMO 関数) が重要な役割を果たした. 次の補題によって noncompant な Riemann においては同様な役割を果たす potential が常に存在する.

命題 4. *R を noncompact な Riemann 面とする. R が Green 関数 g を持つときには p_z を $z \in R$ に極を持つ Green 関数, また Green 関数を持たないときは p_z を $z \in R$ に極を持つ Evans-Selberg potential とする. そのとき $\|p_z\|_{*,R} \lesssim 1$.*

ここで z に極を持つ Evans-Selberg potential とは点 z において対数的特異性を持ち無限遠で $-\infty$ に発散する調和関数である. Green 関数を持たない noncompact な Riemann 面上では常にこのような potential が存在する.

よって定理 1 の証明と同様にして

定理 4. *正則写像 $F: R \to R'$ について R' は noncompact とする. そのとき以下は同値:*

(1) F は BMO 写像;

(2) ある $L, p > 0$ が取れて Hahn 距離での直径が高々 L であるような R の任意の部分集合 E 上で F は p 葉.

R' が compact なときも (2) $\Rightarrow$ (1) は成立する.

系 4. *$F: R \to R'$ (R, R' は compact であっても構わない) が p-葉であれば F は BMO 写像 で $\|T_F\|_{BMO} \leq C(p)$. 特に R が compact であれば F は常に BMO 写像である.*

系 5. *正則写像 $F: R \to R'$ が BMO 写像 であるかどうかは値域の取り方によらず定まる. すなわち $i_k: R' \to R''_k$, $k = 1, 2$, を injective な正則写像とするとき $i_1 \circ F$ が BMO 写像となるのは $i_2 \circ F$ が BMO 写像 となるときに限る.*

定理 5. *被覆写像 $\pi: R \to R'$, $R \neq \hat{\mathbf{C}}, \mathbf{C}$, に対し以下は同値:*

(1) π は BMO 写像;

(2) ある $L > 0$ がとれて π は Hahn 距離での直径が高々 L であるような R の任意の部分集合上単葉;

(3) $\hat{\rho}_{R'}(\pi(z))|d\pi(z)| \leq K\hat{\rho}_R(z)|dz|, \quad z \in R$.

またこのとき $\|T_F\|_{BMO} \lesssim \inf K \approx \inf(L^{-1}) + 1$. 特に R' is noncompact であれば $\|T_F\|_{BMO} \approx \inf K \approx \inf(L^{-1}) + 1$.

R' が compact な場合はこれらの 3 条件は全て満たされるが $\inf K$ を $\|T_F\|_{BMO}$ によって評価することはできない. (以下の例参照)

定理 6. T を *Riemann moduli* 空間の基本領域 $\{z \in H \mid |z| \geq 1, |\mathrm{Re}\, z| \leq 1/2\}$ に *modulus* τ を持つ *torus*, $\pi : \mathbf{C} \to T$ をその普遍被覆写像とする. そのとき π は *BMO* 写像 でかつ $\|T_\pi\|_{BMO} \approx \mathrm{Im}\, \tau$. 言い換えれば $\|T_\pi\|_{BMO} \approx \exp(\rho_H([i], [\tau]))$.

系 6. *Torus* 間の正則写像 $F : T_1 \to T_2$ は常に *BMO* 写像 でかつ $\|T_F\|_{BMO} \leq C(T_2)$.

楕円関数は対応する torus の普遍被覆写像と torus から $\hat{\mathbf{C}}$ への 2 葉の関数の合成としてあらわされるので

系 7. 楕円関数 $F : \mathbf{C} \to \hat{\mathbf{C}}$ は常に *BMO* 写像 で $\|T_F\|_{BMO} \leq C(p, T)$. ここで p は F の位数, T は F に付随する *torus* とする.

例 . T を torus, $F_n : T \to T$ を普遍被覆面間の写像 $\tilde{F}_n : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $\tilde{F}_n(z) = nz$, から導かれる被覆写像とするとき, F_n は n^2 葉で $\hat{\rho}_T(F_n(z))|dF_n(z)| = n\hat{\rho}_T(z)|dz|$ となるが $\|T_{F_n}\|_{BMO} \leq C(T)$. よって compact な値域を持つ写像についてはその *BMO* 写像としての作用素 norm によって被覆の葉数を評価する事はできない.

値域が compact である場合については *BMO* 写像の特徴づけ (作用素 norm の評価) は有理関数の場合にさえ得られていない. 有理関数に関しては唯一 Blaschke 型のものについてのみ評価が知られている. $B(z)$ を

$$B(z) = \prod_{n=1}^{N} \frac{z - z_n}{1 - \bar{z}_n z}, \qquad |z_n| < 1,$$

なる有限 Blaschke 積としその零点の導く測度 $\mu_B = \sum_{n=1}^{N} (1 - |z_n|^2)\delta_{z_n}$ の Carleson 定数を $\mathrm{Carl}(\mu_B)$ とする. さらに $B_\zeta(z) = (B(z) - \zeta)/(1 - \bar{\zeta}B(z))$, $\zeta \in \Delta$, として $\mathrm{Carl}_*(B) = \sup_{\zeta \in \Delta} \mathrm{Carl}(\mu_{B_\zeta})$ とおくとき

定理 7. *Blaschke* 型の正則写像 $B : \hat{\mathbf{C}} \to \hat{\mathbf{C}}$ について $\mathrm{Carl}_*(B) \leq K$ ならば $\|T_B\|_{BMO} \leq C_1(K)$. 逆に $\|T_B\|_{BMO} \leq L$ ならば $\mathrm{Carl}_*(B) \leq C_2(L)$.

この定理の証明には次の結果及び Carleson 測度を導くような Δ 上の点列が interpolating sequence の有限和としてあらわせることを利用する.

命題 5. 単位円板 Δ 上の正測度 μ について

$$f(z) = \int_\Delta \log \left| \frac{1 - \bar{\zeta} z}{z - \zeta} \right| d\mu(\zeta), \quad z \in \mathbf{C},$$

が $BMO(\mathbf{C})$ 関数となるのは $(1 - |z|^2)d\mu$ が *Carlesen* 測度なる場合に限る.

他方

定理 8. 任意の平面領域 D 及びその上の内部に集積しない任意の点列 $\{z_n\}$ に対し丁度 $\{z_n\}$ においてのみ極を持つ BMO 写像 $F: D \to \hat{\mathbf{C}}$ で $\|T_F\|_{BMO} \lesssim 1$ なるものが存在する.

具体的には $|\varepsilon_n|$ を十分小さくとれば

$$F(z) = z + \sum_n \frac{\varepsilon_n}{z - z_n},$$

が求める関数となる. 証明は 各 z_n の近傍で F の値を取り替え F を擬等角写像に作りなおすことでなされる.

系 8. 有限集合 $E \subset \hat{\mathbf{C}}$ に対し E においてのみ極を持つ有理関数 $F: \hat{\mathbf{C}} \to \hat{\mathbf{C}}$ で $\|T_F\|_{BMO} \lesssim 1$ なるものが存在する.

最後に $BMOH$ 写像 については値域 R' が平面領域であれば定理 2 が Riemann 面の場合にもそのまま成立する. しかし一般の正則写像についてはその特徴づけは得られていない. $BMOA$ 写像 については定理 3 が Riemann 面の場合にもそのまま成立する.

問題

まず BMO の擬等角不変性に関する基本的問題を挙げる.

(1) Maximal dilatation K を持つ擬等角写像 F に対し $\|T_F\|_{BMO} \lesssim K$ となるか.

(2) 命題 1 で F に対する ACL なる条件ははずせるか. 例えばある定数 $C > 0$ があって任意の有界連続関数 f に対し $\|T_F f\|_* \leq C\|f\|_*$ となる向きを保つ同相写像は擬等角写像か.

BMO 写像 に関しては

(3) Compact な値域を持つ正則写像 F に対する $\|T_F\|_{BMO}$ の評価を求めよ. (有理関数, 多項式に対してさえそのような評価は知られていない.)

(4) $BMOH$ 写像 を特徴づけよ.

(5) R^n, $n \geq 3$, の部分領域間の擬正則写像についてそれがいつ BMO を保存するかを調べよ.

(4) についてはそれ以前に $BMOH$ の退化する Riemann 面の特徴づけ問題がある. (5) についてはまず Riemann-Jones の定理は 3 次元以上の Euclid 空間においても成立し特に全空間の間の擬正則写像 $F: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ についてはそれが BMO を保存するのは F が多項式型 ($x \to \infty$ なるとき $F(x) \to \infty$ ということ) なるときに限ることが知られている (Heinonen-Rohde[10]). また Heinonen-Rohde は定理 1 の別証明を与えている.

References

[1] Y. Gotoh, On the composition of functions of bounded mean oscillation with analytic functions, J. Math. Kyoto Univ., 29 (1989), 309-315.

[2] Y. Gotoh, On the composition of functions of bounded mean oscillation with meromorphic functions, J. Math. Kyoto Univ., 31 (1991), 635-642.

[3] Y. Gotoh, On holomorphic maps between Riemann surfaces which preserve BMO, J. Math. Kyoto Univ., 35 (1995), 229-324.

[4] K. T. Hahn, Some remarks on a new pseudo-differential metric, Ann. Polon. Math., 39 (1981), 71-81.

[5] P. Jones, Extension theorems for BMO, Indiana Univ. Math. J., 29 (1980), 41-66.

[6] C. D. Minda, The Hahn metric on Riemann surfaces, Kodai Math. J., 6 (1983), 57-69.

[7] B. G. Osgood, Some properties of f''/f' and the Poincaré metric, Indiana Univ. Math. J., 31 (1982), 449-461.

[8] H. M. Reimann, Functions of bounded mean oscillation and quasiconformal mappings, Comm. Math. Helv., 49 (1974), 260-276.

[9] H. M. Reimann and T. Rychener, Funktionen beschränkter mittelerer Oszillation, Lecture Notes in Math. 489, Springer, 1975.

[10] J. Heinonen and S. Rohde, Koenigs functions, quasicircles and BMO, Duke Math. J., 78 (1995), 301-313.