数理解析研究所講究録
946巻 1996年 25-34

調和 Bergman 空間上の作用素

日本工業大　大野　修一 (Shûichi Ohno)

1. 導入

D を複素平面上の単位開円板、 $dA(z)$ を D 上の正規化された Lebesgue 測度とする。$1 < p < \infty$ に対して, $L^p = L^p(D, dA)$ と L^∞ を通常の Lebesgue 空間とし、空間 L_h^p を D 上の複素調和関数 f で

$$\|f\|_p = \left(\int_D |f(z)|^p dA(z)\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

を満たすものとする。このとき、この空間は調和 Bergman 空間と呼ばれる。(解析的) Bergman 空間 L_a^p は D 上解析的な L^p 関数からなる空間を言う。両者の空間には次の関係式が成り立つ：$L_h^p = L_a^p + \overline{L_a^p}$ 、ただし、$\overline{L_a^p}$ は L_a^p の複素共役関数の空間とする。点 $z \in D$ に対して、

$$f(z) = \int_D f(w) H_z(w) dA(w), \quad f \in L_h^p$$

となる再生核 H_z が L_h^p に存在する。実際、$H_z(w) = (1 - \bar{z}w)^{-2} + (1 - z\bar{w})^{-2} - 1$ であり、次のような性質を持つ：

(1) $H_z(\cdot)$ は D 上有界調和な実数値関数である；

(2) $H_z(w) = H_w(z)$ ；

(3) $\|H_z\|_2^2 = (1 + 2|z|^2 - |z|^4)(1 - |z|^2)^{-2}$.

D の点 z と L^p の関数 f に対して、

$$Q(f)(z) = \int_D f(w)H_z(w)dA(w)$$

とおく。このとき、Q は $1 < p < \infty$ に対して L^p から L^p_h への有界な射影となる。さらに私たちは $p = 1$ でさえも有界な射影を作ることもできる。よって Bergman 空間の場合と同様に Toeplitz 、Hankel 作用素を定義することができる： 関数 $f \in L^\infty$ に対して、L^p_h 上の Toeplitz 作用素 T_f と Hankel 作用素 H_f をそれぞれ $T_f g = Q(fg)$ 、$H_f g = fg - Q(fg)$ とする。

この小論では L^p_h 上のこれらの作用素の代数的性質や compact 性について論じる。Faour [5] は f が $\bar{D}$ 上連続ならば、H_f は compact であると示した。我々はここでは同じ結果を定理の系として得る。また compact 性については、Adams [1] によって、関数の積を convolution とみて、最近では Jovović[7] が $n \geq 2$ に対して R^n の単位球上の実数値調和関数の場合について、それぞれ結果を得ている (実数値調和関数については [2] を参照)。

2. 代数的性質

明らかに次のことが成り立つ：

(a) $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ に対して、$T_{\alpha f + \beta g} = \alpha T_f + \beta T_g, \quad H_{\alpha f+\beta g} = \alpha H_f + \beta H_g$ ；

(b) $T_f^* = T_{\bar{f}}$ ；

(c) $T_f T_g - T_{fg} = -H_{\bar{f}}^* H_g$ ；

(d) $H_f^* g = Q(\bar{f} g)$.

調和関数の積は必ずしも調和にはならないことが解析的 Bergman 空間に比べて調和 Bergman 空間における特徴付けを困難にしている。この節では解析的

Bergman 空間のとき明らかであるような性質について考える。

まず、$T_z T_z \neq T_{z^2}$ であることが確かめられる。

定理 2.1. L^∞ の関数 f に対して、$T_{\bar{f}}T_f = T_{|f|^2}$ であるための必要十分条件は $f=$ 定数である。

証明. $T_{\bar{f}}T_f = T_{|f|^2}$ であると仮定する。上の関係式 (c) により、$H_f = 0$, 即ち, 任意の $g \in L_h^2$ に対して $fg = Q(fg)$ である。このとき、$g = 1$ とおいて、$f \in L_h^2$ である。f は D 上有界調和であるから、$f = f_1 + \bar{f_2}$ と書ける。ただし、f_1 と f_2 は L_a^2 の関数である。$g = z$ および $g = \bar{z}$ とおいて、fg が調和であることから、各 f_i が定数であることがでる。

T_f の可換性については、次のことが容易に確かめられる：

(1) $T_{\bar{z}}T_z \neq T_z T_{\bar{z}}$;

(2) $T_{z^2}T_z \neq T_z T_{z^2}$.

定理 2.2. 関数 f は D 上解析的とする。このとき、次のことは同値：

(i) L_h^2 上 $T_f T_z = T_z T_f$;

(ii) $f = a_0 + a_1 z$, $a_0, a_1 \in \mathbf{C}$.

証明. (i)⇒(ii)　関数 $\bar{z} \in L_h^2$ に対して、次の等式

$$T_z\bar{z}(w) = \int z\bar{z}H_w(z)dA(z) = \frac{1}{2}$$

が成り立つ。よって

$$T_f T_z \bar{z}(w) = \frac{1}{2}f(w).$$

一方、$f(w)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ として

$$T_f\bar{z}(w)=a_0\bar{w}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\frac{n}{n+1}w^{n-1}$$

である。したがって

$$T_zT_f\bar{z}(w)=\frac{a_0}{2}+\frac{a_1}{2}w+\frac{2a_2}{2}w^2+\cdots$$

等式$T_fT_z\bar{z}=T_zT_f\bar{z}$ より

$$a_2=a_3=\cdots=0$$

が確かめられるから、$f(z)=a_0+a_1z$　となる。逆は明らか。

同様の計算によって、次のことも得られる。

定理 2.3. 関数 f はD上解析的とする。このとき $T_{\bar{f}}T_z=T_zT_{\bar{f}}$ であるための必要十分条件は f=定数　である。

問題 1. 等式$T_fT_g=T_gT_f$ が $f,g\in L^\infty$ に対して成り立つ必要十分条件を見つけよ。

問題 2. 解析関数 f に対して *Toeplitz* 作用素 T_f が *normal* 作用素になるための必要十分条件を見つけよ。

3. Toeplitz 作用素の compact 性

この節では、 Toeplitz 作用素の compact 性について考える。

定理 3.1. 関数 f が $\bar{D}$ 上連続であるとする。このとき、次のことは同値：

(1) T_f は L_h^2 上 *compact* である；

(2) D の境界上　$f=0$.

証明. (1)⇒(2) だけを示す。$\lambda \in D$ に対して、$k_\lambda(z)=(1-|\lambda|)/(1-\bar{\lambda}z)^2$ とおく。このとき $\|k_\lambda\|_2=1$ であり、$|\lambda|\to 0$ のとき k_λ は L_h^2 で弱位相で0 に収束する。よって

$$
\begin{aligned}
C &\geqq \|T_f k_\lambda\|_2 \\
&= \sup\{|\langle T_f k_\lambda, g\rangle| : g \in L_h^2, \|g\|_2 = 1\} \\
&\geqq |\langle T_f k_\lambda, k_\lambda\rangle| \\
&= |\langle f k_\lambda, k_\lambda\rangle| \\
&= |\int f|k_\lambda|^2 dA| \\
&= |\int f\circ\varphi_\lambda(z) dA(z)|, \quad \varphi_\lambda(z) = (\lambda - z)/(1-\bar{\lambda}z).
\end{aligned}
$$

T_f は compact であり、$|\lambda|\to 1$ のとき $\varphi_\lambda(z)$ は λ に収束するので、D の境界上 $f=0$ である。

同様の議論によって、有界調和関数 f に対する T_f が compact である必要十分条件は $f=0$ であることが確かめられる。

4. Hankel 作用素の compact 性

この節では、Hankel 作用素について考える。まず、次のことが分かる。

定理 4.1. L^∞の関数f に対して、H_f が compact であることと $H_{\bar f}$が compact であることは同値である。

証明. $g \in L^2_h$ と $z \in D$に対して、等式 $H_{\bar f}g(z) = \overline{H_f\bar g(z)}$ が成り立つ。よって $\|H_{\bar f}g\|_2 = \|\overline{H_f\bar g}\|_2$ がいえることから示せる。

ここで、$z \in D$ に対する再生核 Q_z と Dirichlet 空間について振り返る。1 節でQ_z は次のように書けていた：

$$\begin{aligned} Q_z(w) &= \frac{1}{(1-\bar z w)^2} + \frac{1}{(1-z\bar w)^2} - 1 \\ &= K_z(w) + \overline{K_z(w)} - 1 \end{aligned}$$

ただし K_z はL^2_aにおける Bergman 核とする。

解析関数fに対して、次のように計算できる。

$$\begin{aligned} H_fQ_z(w) &= (f(w)-f(z))\overline{K_z(w)} + \int (f(z)-f(u))\overline{K_z(u)K_w(u)}dA(z) \\ &= (f(w)-f(z))\overline{K_z(w)} - P((f-f(z))\overline{K_z})(w) \\ &= (I-P)((f-f(z))\overline{K_z})(w) \end{aligned}$$

ただし P はL^2 から L^2_aへの直交射影である。

また Dirichlet 空間とは

$$\int |f'(z)|^2 dA(z) < \infty$$

となる関数 $f \in L^2_a$ からなるものであった。

定理 **4.2.** 関数 f が有界で *Dirichlet* 空間に属しているとき、作用素 H_f と $H_{\bar{f}}$ は L^2_h 上 *compact* である。

証明. $g \in L^2_h$ に対して、

$$\begin{aligned} H_f^* H_f g(z) &= \langle H_f^* H_f g, Q_z \rangle \\ &= \langle H_f g, H_f Q_z \rangle \\ &= \langle fg, (I-P)((f-f(z))\bar{K_z}) \rangle. \end{aligned}$$

よって

$$|H_f^* H_f g(z)| \leq \|fg\|_2 \|(I-P)((f-f(z))\overline{K_z})\|_2.$$

ここで

$$\|(f-f(z))\overline{K_z}\|_2^2 = \int \frac{|f(w)-f(z)|^2}{|1-\bar{z}w|^4} dA(w)$$

であるから、w を $\varphi_z(w)$ とおき、変数変換をおこなうことにより次の等式を得る。

$$\|(f-f(z))\overline{K_z}\|_2^2 = \frac{1}{(1-|z|^2)^2} \int |f \circ \varphi_z(w) - f(z)|^2 dA(w).$$

norm の同値性から

$$\begin{aligned} \|(f-f(z))\overline{K_z}\|_2^2 &\leq \frac{c}{(1-|z|^2)^2} \int (1-|w|^2)^2 |(f \circ \varphi_z)'(w)|^2 dA(w) \\ &= \frac{c}{(1-|z|^2)^2} \int (1-|\varphi_z(w)|^2)^2 |f'(w)|^2 dA(w) \\ &= c \int |f'(w)|^2 \frac{(1-|w|^2)^2}{|1-\bar{z}w|^4} dA(w) \end{aligned}$$

ただし c は定数。

任意の数 $r,\ 0 < r < 1$ に対し、$rD = \{z : |z| \leq r\}$ とおき χ_r を rD に対する特性関数とする。このとき $\chi_r H_f^* H_f$ は L_h^2 上 compact 作用素になる。

任意の $g \in L_h^2$ に対し、

$$
\begin{aligned}
\|(H_f^* H_f - \chi_r H_f^* H_f)g\|_2^2 &= \int_{D \setminus rD} |(H_f^* H_f)g(z)|^2 dA(z) \\
&\leq c\|f\|_\infty^2 \|g\|_2^2 \int_{D\setminus rD} \int_D |f'(w)|^2 \frac{(1-|w|^2)^2}{|1-\bar{z}w|^4} dA(w)dA(z) \\
&= c\|f\|_\infty^2 \|g\|_2^2 \int_D |f'(w)|^2 \int_{D\setminus rD} \frac{(1-|w|^2)^2}{|1-\bar{z}w|^4} dA(z)dA(w) \\
&= c\|f\|_\infty^2 \|g\|_2^2 \int_D |f'(w)|^2 \int_{D\setminus rD} |(\varphi_w)'(z)|^2 dA(z)dA(w) \\
&= c\|f\|_\infty^2 \|g\|_2^2 \int_D |f'(w)|^2 (1 - Area\varphi_w(rD))dA(w)
\end{aligned}
$$

ただし $\pi Area\varphi_w(rD)$ は rD の φ_w による像の面積とする。

$\varphi_w(rD)$ は半径 $(1-|w|^2)r/(1-r^2|w|^2)$ の Euclidean 円であるから、

$$
\|(H_f^* H_f - \chi_r H_f^* H_f)g\|_2^2 \leq c\|f\|_\infty^2 \|g\|_2^2 \int_D |f'(w)|^2 \left(1 - (\frac{1-|w|^2}{1-r^2|w|^2} r)^2\right) dA(w).
$$

Lebesgue の収束定理により、$r \to 1$ のとき上式の右辺は 0 に収束する。よって

$$
\lim_{r\to 1} \|(H_f^* H_f - \chi_r H_f^* H_f)g\|_2^2 = 0.
$$

したがって、$H_f^* H_f$ は compact 、即ち、H_f も compact である。

ここで、系として [5] の結果を得る。

系. f が$\bar{D}$上連続のとき、H_f は compact。

証明. 関数z はDirichlet 空間に入っているので、定理4.2 と Stone-Weierstrass 定理より示せる。

問題 **3.** $f \in L^\infty$に対して、T_f と H_f がcompact となるための必要十分条件をそれぞれ求めよ。

付記. Bourgain 環との関係

Yを可換Banach 環Xの部分空間とする。 関数$f \in X$ がY のXに関するBourgain 環に属するとは、Y の弱null 列$\{g_n\}$ に対して、$n \to 0$のとき$\|f_n f - g_n\|_X \to 0$ なるときをいう。単位円∂D 上の古典的Hardy 空間の$L^\infty(\partial D)$ と$L^\infty(D)$ に関するBourgain 環はそれぞれ[3] や[4] で研究されているが、Bourgain 環はHardy およびBergman 空間上のHankel 作用素のcompact 性と密接な関係を持っている。Izuchi- Stroethoff -Yale [6] はD上の有界調和関数の空間の$L^\infty(D)$に関するBourgain 環を特徴付けている。この環はH_fがL^2_h上compact となるような関数f の集合となるか？この質問については否定的な解がある。

参考文献

1. G. T. Adams, The Bilateal Bergman Shift, Memoirs of the Amer. Math. Soc. Number 355, Providence,1986.

2. S. Axler, P. Bourdon and W. Ramey, Harmonic Function Theory, Graduate Texts in Math. No.137, Springer-Verlag, New York, 1992.

3. J. A. Cima, S. Janson and K. Yale, Completely continuous Hankel operators on H^∞ and Bourgain algebras, Proc. Amer. Math. Soc.105 (1989),121–125.

4. J. A. Cima, K. Stroethoff and K. Yale, Bourgain algebras on the unit disk, Pacific J. Math.160 (1993), 27–41.

5. N. S. Faour, A class of operators associated with L_h^2 , Acta Math. Hung. 60(1992), 247–250.

6. K. Izuchi, K. Stroethoff and K. Yale, Bourgain algebras of spaces of harmonic functions,Michigan Math. J. 41(1994), 309–321.

7. M. Jovović, Compact Hankel operators on harmonic Bergman spaces, Integral Equations and Operator Theory 22 (1995), 295–304.

8. K. Zhu, Operator Theory in Function Spaces, Marcel Dekker, Inc., New York,1990.