

# あるリスク分担問題に対する Nash 交渉解

東北大学 経済学部 大西 匡光 (Masamitsu OHNISHI)

## 1 はじめに

本報告ではある保険契約を共同で提供する 2 社の保険会社間でのリスク分担問題 (risk sharing problem) を Nash 交渉問題 (Nash bargaining problem) として定式化し, 2 社が合意に至るような保険プレミアムの配分と保険補償額の分担の方法に関する考察を行う. 保険会社のリスクに対する態度がリスク中立的である場合とリスク回避的である場合を考え, 各保険会社のリスク回避性の変化と保険会社間の Arrow-Pratt の意味でのリスク回避性の差異が, 保険プレミアムの配分と保険補償額の分担に与える影響についての比較静学を行う.

## 2 保険契約におけるリスク分担

### 2.1 保険契約

ある事故・災害が発生する確率を  $q$  ( $0 < q < 1$ ) とし, そのときの損害額を  $c$  ( $> 0$ ) とする. 保険会社の提供する完全保険とは保険プレミアム  $p$  ( $> 0$ ) で事故・災害発生時に損害額の全額を補償するものである.

### 2.2 リスク分担

事故・災害が起こる確率  $q$  は小さいが, 起こった場合に支払う保険補償額  $c$  が非常に大きいような保険契約の場合, 保険会社が 1 社単独で引き受けることを後込みすることがある.

このような場合, 複数の保険会社が保険補償額を分担することで個々の保険会社のリスクを減じて, その保険契約の締結を可能にするリスク分担という方法が適用されることが多い.

簡単のため, 前述の事故・災害を 2 社の保険会社 1, 2 が共同で補償する保険契約を考える:

$c_i, i = 1, 2$ : 事故・災害発生時に保険会社  $i$  が受け持つ補償額 ( $c_1 + c_2 \geq c$ ),

$p_i, i = 1, 2$ : 保険会社  $i$  が受け取る保険プレミアム ( $p_1 + p_2 \leq p$ ), ただし  $p$  ( $> 0$ ) は保険加入者が支払う保険プレミアムで所与であるものとする.

$u_i, i = 1, 2$ : 保険会社  $i$  の vN-M 効用関数.

一般性を失うことなく,  $u_i(0) = 0, i = 1, 2$  と仮定する.

保険会社  $i = 1, 2$  にとって,

$$qu_i(p_i - c_i) + (1 - q)u_i(p_i) \geq u_i(0) = 0 \quad (2.1)$$

が成立するとき、そしてそのときに限り、他社と共同して保険契約を提供するメリットがある。さらにそのような  $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ ,  $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$  をいかに 2 社間で交渉し、決定するかが問題となる。

### 3 リスク分担問題に対する Nash 交渉解の適用

保険契約のリスク分担問題を Nash 交渉問題として定式化しよう。  
保険会社の期待効用を  $U_i(\mathbf{p}, \mathbf{c})$ ,  $i = 1, 2$  とすると

$$U_1(\mathbf{p}, \mathbf{c}) = qu_1(p_1 - c_1) + (1 - q)u_1(p_1), \quad (3.1)$$

$$U_2(\mathbf{p}, \mathbf{c}) = qu_2(p_2 - c_2) + (1 - q)u_2(p_2). \quad (3.2)$$

従って、交渉集合は次のようになる:

$$B = \{(U_1(\mathbf{p}, \mathbf{c}), U_2(\mathbf{p}, \mathbf{c})) : p_1 + p_2 \leq p, c_1 + c_2 \geq c\}.$$

補題 3.1  $B$  は  $\mathcal{R}^2$  の閉凸集合である。 □

簡単のため、保険会社は他社の承認無しに単独では保険契約を結ぶことはできないものとする、この問題の基準点 (非妥結点) は

$$\mathbf{d} = (d_1, d_2) = (u_1(0), u_2(0)) = (0, 0). \quad (3.3)$$

$B \cap \mathcal{R}_+^2$  は有界閉凸集合となる、ただし空集合である可能性を持つ。  $p - qc < 0$  の場合、交渉が妥結されるためには  $p_i - qc_i < 0$ ,  $i = 1, 2$  のいずれかが成立しなければならないが、このとき

$$u_i(0) > u_i(p_i - qc_i) \geq qu_i(p_i - c_i) + (1 - q)u_i(p_i)$$

となるため、交渉は成立し得ない。従って  $B \cap \mathcal{R}_+^2$  が空でない内部を持つためには  $p - qc > 0$  が成立しなければならない。

一方、 $B \cap \mathcal{R}_+^2$  が空でない内部を持つための十分条件を一般的に与えるのは容易ではないが、以下では暗にそれが満足されているものとして議論を進める。

さて、Nash 交渉解を求めるためには以下の最大化問題を解けば良い:

$$\text{maximize } U_1(\mathbf{p}, \mathbf{c}) U_2(\mathbf{p}, \mathbf{c}) \quad (3.4)$$

$$\text{subject to } p_1 + p_2 \leq p \quad (3.5)$$

$$c_1 + c_2 \geq c \quad (3.6)$$

$$U_i(\mathbf{p}, \mathbf{c}) \geq 0, \quad i = 1, 2 \quad (3.7)$$

#### 3.1 リスク中立的保険会社間の交渉

両保険会社がリスク中立的であるとして  $u_i(x) = x$ ,  $i = 1, 2$  とする。このとき

$$U_1(\mathbf{p}, \mathbf{c}) = p_1 - qc_1; \quad U_2(\mathbf{p}, \mathbf{c}) = p_2 - qc_2. \quad (3.8)$$

定理 3.1 両保険会社がリスク中立的であるとしたときの, Nash 交渉解に基づく妥結点は

$$(U_1^*, U_2^*) = \left( \frac{p - qc}{2}, \frac{p - qc}{2} \right) \quad (3.9)$$

となり, そのときの保険プレミアムの配分と保険補償額の分担は

$$p^* = \left( \frac{p}{2}, \frac{p}{2} \right); \quad c^* = \left( \frac{c}{2}, \frac{c}{2} \right) \quad (3.10)$$

となる.  $\square$

### 3.2 リスク回避的対リスク中立的保険会社間の交渉

保険会社 1 が狭義にリスク回避的で保険会社 2 はリスク中立的である場合を考える.

定理 3.2 保険会社 1 が狭義にリスク回避的で保険会社 2 はリスク中立的である場合, Nash 交渉解に基づく妥結点における保険補償額の分担は

$$c^* = (0, c) \quad (3.11)$$

となる. さらに, そのとき (狭義にリスク回避的な) 保険会社 1 が受け取る保険プレミアム  $p_1^*$  は

$$0 < p_1^* < p - qc \quad (3.12)$$

となる.  $\square$

### 3.3 リスク回避的保険会社間の交渉

定義 3.1 (Arrow-Pratt の絶対的リスク回避の尺度)  $u_I$  をあるリスク回避的意思決定者の vN-M 効用関数とする. このとき

$$R_A(x; u_I) = -\frac{u_I''(x)}{u_I'(x)} \quad (3.13)$$

で定義される関数を Arrow-Pratt の絶対的リスク回避の尺度と呼ぶ.  $\square$

定義 3.2 (Arrow-Pratt のリスク回避の順序)  $u_i, i = 1, 2$  を,  $\mathcal{R}$  の共通の部分集合上で定義されたリスク回避的 vN-M 効用関数とする.

$$R_A(x; u_1) \geq R_A(x; u_2), \quad \forall x \quad (3.14)$$

が成立するとき,  $u_1$  は  $u_2$  より Arrow-Pratt の意味でよりリスク回避的であると言い,

$$u_1 \geq_{RA} u_2 \quad (3.15)$$

と書く.  $\square$

定理 3.3 2 社の保険会社のリスク回避的 vN-M 効用関数を  $u_i, i = 1, 2$  とし, それらの間に Arrow-Pratt のリスク回避の順序  $u_1 \geq_{RA} u_2$  が成立するものとする. このとき Pareto 効率的な妥結点を与える保険プレミアム  $p^* = (p_1^*, p_2^*)$  と保険補償額  $c^* = (c_1^*, c_2^*)$  において

$$p_1^* \leq p_2^* \text{ あるいは } p_1^* - c_1^* \geq p_2^* - c_2^* \quad (3.16)$$

のいずれかが成立する.  $\square$

定理 3.4 2社の保険会社のリスク回避的  $vN$ - $M$  効用関数を  $u_i, i = 1, 2$  としたときの Pareto 効率的な妥結点を与える保険プレミアムを  $p^* = (p_1^*, p_2^*)$ , 保険補償額を  $c^* = (c_1^*, c_2^*)$  とする. いま保険会社 1 の  $vN$ - $M$  効用関数を  $u_1$  と固定し, 保険会社 2 の  $vN$ - $M$  効用関数  $u_2$  が, Arrow-Pratt のリスク回避の順序の意味で, よりリスク回避的な  $\bar{u}_2 (\geq_{RA} u_2)$  に変化したときの Pareto 効率的な妥結点を与える保険プレミアムを  $\bar{p}^* = (\bar{p}_1^*, \bar{p}_2^*)$ , 保険補償額を  $\bar{c}^* = (\bar{c}_1^*, \bar{c}_2^*)$  とすると

$$p_1^* \leq \bar{p}_1^* \text{ あるいは } p_1^* - c_1^* \geq \bar{p}_1^* - \bar{c}_1^* \quad (3.17)$$

のいずれかが成立する.  $\square$

以下では簡単のため保険会社の効用関数  $u_i, i = 1, 2$  として指数効用関数を仮定する:

$$u_i(x) = -\exp(-b_i x) + 1, \quad i = 1, 2, \quad (3.18)$$

ただし  $b_i > 0, i = 1, 2$  である. このとき

$$R_A(x; u_i) = b_i \quad (3.19)$$

となる. すなわち Arrow-Pratt のリスク回避の尺度は一定の  $b_i$  である.

定理 3.5 2社の保険会社の効用関数  $u_i, i = 1, 2$  として指数効用関数 (式 (3.18)) を仮定する. このとき Nash 交渉解に基づく妥結点を与える保険補償額は

$$c^* = (c_1^*, c_2^*) = \left( \frac{b_2}{b_1 + b_2} c, \frac{b_1}{b_1 + b_2} c \right) \quad (3.20)$$

で与えられる.  $\square$

上式から以下の事実が解る:

1.  $b_1 \geq b_2$  のとき  $c_1^* \leq (1/2)c \leq c_2^*$ , すなわち Arrow-Pratt の意味でリスク回避性の高い保険会社が受け持つ保険補償額の方が小さい.
2.  $c_1^* = (b_2/\{b_1 + b_2\})c$  は  $b_1$  について単調減少で,  $b_2$  について単調増加, すなわち, 交渉相手の保険会社が Arrow-Pratt の意味でよりリスク回避的になれば, 自社で負担すべき保険補償額が増加する.

## 参考文献

- [1] Luce, R. D. and Raiffa, H., *Games and Decisions*, John Wiley and Sons, 1957.
- [2] Nash, J. F., "The Bargaining Problem", *Econometrica*, Vol. 18, pp. 155-162, 1950.
- [3] Osborn, M. J. and Rubinstein, A., *Bargaining and Markets*, Academic Press, San Diego, 1990.
- [4] Raiffa, H., *Decision Analysis — Introductory Lectures on Choices under Uncertainty*, Addison-Wesley, Massachusetts, 1968.