数理解析研究所講究録
947 巻 1996 年 200-212



# ２種の不完全修理を伴う平均最適保全政策

京都学園大学経営学部　瀬川良之　(Yoshiyuki Segawa)
東北大学経済学部　大西匡光　(Masamitsu Ohnishi)

## 1 はじめに

本論文は信頼性システムの最適化に関するものである．小修理・取り替え問題 (minimal ripair-maximal repair problem) は, 実際の信頼性システムに関して，実践的な定式化として有用なものである．小修理とは，故障したユニットの年齢を変えることなく稼働状態に復帰させる保全行為であり，取り替えとは，ユニットを新品と同様にして稼働状態に復帰させる保全行為である．

こうした保全問題，すなわち，小修理を含む保全行為を最初に導入したのは Barlow and Hunter [1] (1960) である．彼らは，小修理・事前取り替え問題を研究した．

続いて，Phelps [4] (1983) が，期待時間費用規範の下で，小修理・取り替え問題を議論している．彼は，このモデルをセミ・マルコフ決定過程として定式化し，故障率が IFR であるという仮定の下で，$t$–政策が最適であることを示した．すなわち，故障時において，そのユニットの年齢が $t$ 以下であるときには小修理を行い，$t$ より故障時の年齢が上ならば取り替えを行うという政策が最適であると結論した．

最近になって，Segawa et al. [6] (1992) が，故障率が IFR より緩い buth-tub 型である様な場合を含むある現実的な仮定の下で，同モデルを再構成し，セミ・マルコフ決定過程の理論を用いて最適政策が $t$–政策であることを示した．

Brown and Proschan [5] (1983) は，今までの保全行為を含むより緩やかな保全行為として不完全修理のモデルを分析している．

本論文では，こうした保全行為として不完全修理を考える．つまり，minimal repair と maximal repair を混合した２種類の不完全修理を対象に，ある最適政策が $t$–政策であることを証明する．

## 2 モデルと最適性方程式

以下のような信頼性モデルを考える．

ユニットは年齢という属性を持ち，年齢を $x$ で表す．ユニットの故障時間の分布関数を $F(x)$ とし，これは連続な密度関数を持つものとする．信頼度関数を $\bar{F}(x)$ で表すと $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$ である．故障率関数を $\lambda(x)$ で表すと，$\lambda(x) = f(x)/\bar{F}(x)$ である．システムの状態は，動作と故障のみを考え，その状態は常に観測されているものとする．保全にかかる時間は無視できるものとする．取りうる保全行為は，修理 P と修理 Q のみとする．故障時の年齢が $x$ のとき修理 P を行うとは，費用 $c_p$ を要し，確率 $p$ で新品と同様なシステムになり，確率 $1-p$ で年齢不変のまま再稼働させる保全行為である．すなわち，この保全行為により，確率 $p$ で maximal repair が起こり，確率 $1-p$ で minimal repair が起こるものとする．また，故障時の年齢が $x$ のとき修理 Q を行うとは，費用 $c_q$ を要し，確率 $q$ で新品と同様なシステムになり，確率 $1-q$ で年齢不変のまま再稼働させる保全行為

である．すなわち，この保全行為により確率 $q$ で maximal repair が起こり，確率 $1-q$ で minimal repair が起こるものとする．

目的は，故障時の各年齢に対して，必ず，修理Pと修理Qのどちらかを行うような可能な全ての政策の中で，期待時間平均費用を最小にする政策を見いだすことである．

この信頼性システムに対して，以下の仮定を導入する．

**仮定 1**

$$0 \le p < q \le 1 \quad \square \tag{2.1}$$

**仮定 2**

$$0 < c_p < c_q \quad \square \tag{2.2}$$

**仮定 3** IFR (increasing failure rate) ( 但し，本論文中では，厳密な意味で故障率が単調増加とする) かつ$\lambda(x)$ は連続であり$\lambda(\infty)=\infty$ 及び$\bar{F}(x)>0$ であるとする． $\square$

これらの仮定は，きわめて現実的なものである．仮定3はシステムの劣化を表すための一般的な表現である．また，仮定 1，2 は, 次のような例を考えれば理解しやすい．

例) テレビが壊れたとしよう．このとき，P店とQ店という2つの電機店があり修理をしてもらえる．P店は修理費用は安いが腕は悪い，また，Q店は修理費用は高いが腕は良い場合がこれにあたる．さて，このような2者択一的な状況の下で，どちらの店に修理を依頼したら良いであろうか.

この問いに明確な答えを与えるのが，本論文の主旨である．

但し，仮定3については，数学的な処理の簡便さのため，信頼度関数の非零性と，故障率の連続性および厳密な意味での単調増加性を仮定した．現実には，信頼度が 0 になる分布も存在し，故障率がある区間において一定となり増加しない場合も考えられるが，本論文をこうした条件まで拡張するのは，技術的な手間がかかる割には本質的な利益がないのであえて割愛した．

しかしながら，IFR を指数分布が含まれるように設定することは，きわめて重要であるが，指数分布に対しては修理P のみの政策が最適であり，その証明は簡単であるので本論文では取り扱わないこととする．

ところで，厳密な意味での $t$–政策とは，故障時の年齢 $x$ に対してある有限な $t$ が存在して $x \in [0,t)$ のときは修理P を行い，$x \in [t,\infty)$ においては修理Q を行う政策とする．また，修理Pのみの政策とは，故障時の年齢に関わらず必ず修理P を行うような政策とする (これは，$t=\infty$ に対応する)．そして，単に $t$–政策と述べるときには，厳密な意味での $t$–政策，もしくは，修理P のみの政策を指すものとする．

まず，最も重要な役割を担う Ross[2] の最適性方程式に関する定理を導入する．

**定理 1 (S.M. Ross) [最適性方程式]** ある有界な関数 $v$ と定数 $g$ が存在して

$$v(x)=\min\left\{\begin{array}{l} c_p+p\left\{\int_0^\infty v(s)f(s)ds-g\int_0^\infty \bar{F}(s)ds\right\} \\ \quad +\dfrac{(1-p)}{\bar{F}(x)}\left\{\int_x^\infty v(s)f(s)ds-g\int_x^\infty \bar{F}(s)ds\right\}, \\ c_q+q\left\{\int_0^\infty v(s)f(s)ds-g\int_0^\infty \bar{F}(s)ds\right\} \\ \quad +\dfrac{(1-q)}{\bar{F}(x)}\left\{\int_x^\infty v(s)f(s)ds-g\int_x^\infty \bar{F}(s)ds\right\} \end{array}\right. \tag{2.3}$$

が成立するならば，$g$は最適な期待時間平均費用であり，$v$は最適な相対値関数である．$\square$

ここに現れる相対値関数$v$は定数項の自由度があり，等式を1本導入することによって，方程式は簡略化され，また，相対値関数は唯一になる．

**定理 2 [簡単化された最適性方程式]** ある有界な関数$v$と定数$g$が存在して

$$v(x) = \min \left\{ \begin{array}{l} c_p + \dfrac{(1-p)}{\bar{F}(x)} \left\{ \displaystyle\int_x^\infty v(s)f(s)ds - g\int_x^\infty \bar{F}(s)ds \right\}, \\ c_q + \dfrac{(1-q)}{\bar{F}(x)} \left\{ \displaystyle\int_x^\infty v(s)f(s)ds - g\int_x^\infty \bar{F}(s)ds \right\} \end{array} \right. \tag{2.4}$$

但し

$$\int_0^\infty v(s)f(s)ds - g\int_0^\infty \bar{F}(s)ds = 0 \tag{2.5}$$

が成立するならば，$g$は最適な期待時間平均費用であり，$v$は最適な相対値関数である．□

**定義 1** 相対値関数$v$の修理Ｐに対応する変換を$T_p$とし，また，修理Ｑに対応する変換を$T_q$とする．すなわち，

$$T_p[v](x) \equiv c_p + \frac{1-p}{\bar{F}(x)} \left\{ \int_x^\infty v(s)f(s)ds - g\int_x^\infty \bar{F}(s)ds \right\}, \tag{2.6}$$

$$T_q[v](x) \equiv c_q + \frac{1-q}{\bar{F}(x)} \left\{ \int_x^\infty v(s)f(s)ds - g\int_x^\infty \bar{F}(s)ds \right\} \tag{2.7}$$

と定義する．□

**定義 2** 簡単化された最適性方程式を$T_p, T_q$を用いて書き直すと，$v$を有界な相対値関数，$g$を最適期待時間平均保全費用として

$$v(x) = \min \left\{ \begin{array}{l} T_p[v](x), \\ T_q[v](x) \end{array} \right. \tag{2.8}$$

但し

$$\int_0^\infty v(s)f(s)ds - g\int_0^\infty \bar{F}(s)ds = 0 \tag{2.9}$$

と表される．□

## 3 最適政策

まず，$0 < p < q < 1$ の場合を考える．

こうした仮定の下で修理Ｐと修理Ｑを比べると，年齢が小さいときは修理Ｐの方が安上がりで故障率も小さいので修理Ｑより得に見える．また，年齢が大きなときは故障しやすいので，少々費用を要しても新品と同じような状態に直せる修理Ｑの方が長期的には得に見える．すなわち，年齢が小さいときは修理Ｐを，年齢が大きなときは修理Ｑを行うのが有利と予想される．

そこで，故障したときの年齢が$[0,t)$に入るときには修理Ｐを，また，$[t,\infty)$に入るときには修理Ｑを施す，いわゆる，$t$–政策が最適であると仮定しよう．その上で，対応する相対値関数と時間平均期待保全費用を陽に求められるかどうか検討してみよう．

さて，先ほどの仮定に沿って，$t$-政策を用いたときの相対値関数$v$と期待時間平均保全費用$g$を陽に決定するための方程式を導入しよう．特に，区間$[0,t)$における相対値関数を$v_p$，区間$[t,\infty)$における相対値関数を$v_q$と置くと，

$$v(x) = \begin{cases} v_p(x) & x \in [0,t), \\ v_q(x) & x \in [t,\infty) \end{cases} \tag{3.1}$$

と表せる．$v_p, v_q$が満足する方程式を次のように与える．すると，

$$v_p(x) = c_p + \frac{1-p}{\bar{F}(x)}\left\{\int_x^\infty v(s)f(s)ds - g\int_x^\infty \bar{F}(s)ds\right\} \quad x \in [0,t), \tag{3.2}$$

$$v_q(x) = c_q + \frac{1-q}{\bar{F}(x)}\left\{\int_x^\infty v(s)f(s)ds - g\int_x^\infty \bar{F}(s)ds\right\} \quad x \in [t,\infty), \tag{3.3}$$

$$\int_0^\infty v(s)f(s)ds - g\int_0^\infty \bar{F}(s)ds = 0 \tag{3.4}$$

である．(3.4) と $v_p, v_q$の定義されている区間から導出される

$$\int_x^\infty v(s)f(s)ds - g\int_x^\infty v(s)f(s)ds = -\int_0^x v(s)f(s)ds + g\int_0^x \bar{F}(s)fds \tag{3.5}$$

を用いて $v_p, v_q$は積分方程式

$$v_p(x) = c_p + \frac{1-p}{\bar{F}(x)}\left\{-\int_0^x v_p(s)f(s)ds + g\int_0^x \bar{F}(s)ds\right\} \quad x \in [0,t), \tag{3.6}$$

$$v_q(x) = c_q + \frac{1-q}{\bar{F}(x)}\left\{\int_x^\infty v_q(s)f(s)ds - g\int_x^\infty \bar{F}(s)ds\right\} \quad x \in [t,\infty) \tag{3.7}$$

を満足する．

両辺を $x$ について微分すると

$$-f(x)v_p(x) + \bar{F}(x)v_p'(x) = -c_pf(x) - (1-p)f(x)v_p(x) + (1-p)g\bar{F}(x) \tag{3.8}$$

である．$v_p'(x)$ について整理すると

$$v_p'(x) - p\lambda(x)v_p(x) + c_p\lambda(x) - (1-p)g = 0 \tag{3.9}$$

なる非斉次な線形微分方程式を得る．この方程式は定数変化法により容易に解くことができ（例．吉田 [8]）$c_1$を積分定数として

$$v_p(x) = \exp\left(-\int_0^x \{-p\lambda(s)\}ds\right)\left[c_1 - \int_0^x \{c_p\lambda(s) - (1-p)g\}\exp\left(\int_0^s \{-p\lambda(u)\}du\right)ds\right] \tag{3.10}$$

である．信頼度関数の定義から

$$\bar{F}(x) = \exp\left\{-\int_0^x \lambda(s)ds\right\} \tag{3.11}$$

を (3.10) に代入して

$$v_p(x) = \bar{F}^{-p}(x)\left\{c_1 - c_p\int_0^x \lambda(s)\bar{F}^p(s)ds + (1-p)g\int_0^x \bar{F}^p(s)ds\right\} \tag{3.12}$$

である．

まず，$0 < p < 1$ の場合を考える．

$c_1 - \dfrac{c_p}{p}$ を改めて $c_1$ と置けば，$v_p$は $c_1$ を未定定数として

$$v_p(x) = \frac{c_p}{p} + (1-p)g\bar{F}^{-p}(x)\int_0^x \bar{F}^p(s)ds + c_1\bar{F}^{-p}(x) \tag{3.13}$$

と表される．

ところで $0 \in [0,t]$ であり，$v_p(0)$ の値は (3.2) と (3.13) に $x=0$ を代入して $v_p(0) = \frac{c_p}{p} + c_1 = c_p$ を得る．よって $c_1 = -\frac{1-p}{p}c_p$ である．(3.13) に代入して，再度書き改めると

$$v_p(x) = \frac{c_p}{p} + (1-p)g\bar{F}^{-p}(x)\int_0^x \bar{F}^p(s)ds - \frac{1-p}{p}c_p\bar{F}^{-p}(x) \quad x \in [0,t) \tag{3.14}$$

である．

また $p=0$ の時を考える．(3.14) において $p \to 0$ のの極限をとると

$$v_p(x) = c_p - c_p\int_0^x \lambda(s)ds + gx, \quad x \in [0,t] \tag{3.15}$$

であり，これは Segawa et al. の (3.12) に一致し，積分方程式 (3.14) の解であることから $v_p(x)|_{p=0}$ を (3.15) によって表す．

**定義 3** $v_p(x)|_{p=0}$を

$$v_p(x)|_{p=0} = c_p - c_p\int_0^x \lambda(s)ds + gx \tag{3.16}$$

によって定義する．□

続いて $v_q$について考えよう．

まず，$0 < q < 1$ の場合を考える．同様にして

解は $c_2$を未定定数として

$$v_q(x) = \frac{c_q}{q} + (1-q)g\bar{F}^{-q}(x)\int_0^x \bar{F}^q(s)ds - c_2\bar{F}^{-q}(x) \quad x \in [t,\infty) \tag{3.17}$$

と表現される．ところで，$v_q(\infty)$ の値は (3.7) に $x=\infty$ を代入して

$$\begin{aligned} v_q(\infty) &= \lim_{x\to\infty}\left\{c_q + \frac{1-q}{\bar{F}(x)}\left\{\int_x^\infty v_q(s)f(s)ds - g\int_x^\infty \bar{F}(s)ds\right\}\right\} \\ &= c_q + (1-q)\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{d}{dx}\left\{\displaystyle\int_x^\infty v_q(s)f(s)ds - g\int_x^\infty \bar{F}(s)ds\right\}}{\dfrac{d}{dx}\bar{F}(x)} \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$= c_q + (1-q)\lim_{x\to\infty}\frac{\{-v_q(x)f(x) + g\bar{F}(x)\}}{\{-\lambda(x)\bar{F}(x)\}} = c_q + (1-q)\lim_{x\to\infty}\left\{v_q(x) - \frac{g}{\lambda(x)}\right\} = c_q + (1-q)v_q(\infty)$$

である．よって

$$v_q(x) = \frac{c_q}{q} - (1-q)g\bar{F}^{-q}(x)\int_x^\infty \bar{F}^q(s)ds \tag{3.19}$$

と表現できる．

当然 $q=1$ の場合を考えると，$v_q(x)$ は積分方程式としては成立しないが $q=1$ に対して $v_q(x)$ は (3.19) より直接 $c_q$になる．よって，$0 < q \le 1$ に対応する相対値関数として (3.19) を定義できる．

以上より，仮定１の下で未定定数$t, g$を含む$v(x)$の陽な表現

$$
(3.20)\qquad v(x) = \begin{cases} \dfrac{c_p}{p} + (1-p)g\bar{F}^{-p}(x)\displaystyle\int_0^x \bar{F}^p(s)ds - \dfrac{1-p}{p}c_p\bar{F}^{-p}(x) & x \in [0,t), \\ \dfrac{c_q}{q} - (1-q)g\bar{F}^{-q}(x)\displaystyle\int_x^\infty \bar{F}^q(s)ds & x \in [t,\infty) \end{cases}
$$

を得る.

$p=0$の場合は

$$
(3.21)\qquad v(x) = \begin{cases} c_p - c_p\displaystyle\int_0^x \lambda(s)ds + gx & x \in [0,t), \\ \dfrac{c_q}{q} - (1-q)g\bar{F}^{-q}(x)\displaystyle\int_x^\infty \bar{F}^q(s)ds & x \in (t,\infty) \end{cases}
$$

である.

まず，$0<p<1$かつ$x \in [0,t]$のときを考える．このとき

**定義 4**

$$
(3.22)\qquad L(x) \equiv T_q[v](x) - T_p[v](x) \qquad x \in [0,t]
$$

とおく．□

$0<p<q<1$の場合展開して

$$
(3.23)\qquad \begin{aligned} L(x) &= c_q + \frac{1-q}{\bar{F}(x)}\left\{\int_x^\infty v(s)f(s)ds - g\int_x^\infty \bar{F}(s)ds\right\} - \left\{c_p + \frac{1-p}{\bar{F}(x)}\left\{\int_x^\infty v(s)f(s)ds - g\int_x^\infty \bar{F}(s)ds\right\}\right\} \\ &= c_q - c_p - \frac{q-p}{\bar{F}(x)}\left\{\int_x^\infty v(s)f(s)ds - g\int_x^\infty \bar{F}(s)ds\right\} \\ &= c_q - c_p + \frac{q-p}{\bar{F}(x)}\left\{\int_0^x v_p(s)f(s)ds - g\int_0^x \bar{F}(s)ds\right\} \end{aligned}
$$

と$v_p$のみで表される．そこで$v_p$の陽な表現 (3.20) を代入して

$$
(3.24)\qquad \begin{aligned} L(x) &= c_q - c_p + \frac{q-p}{\bar{F}(x)}\left\{\int_0^x \left\{\frac{c_p}{p} + (1-p)g\bar{F}^{-p}(s)\int_0^s \bar{F}^p(u)du\right.\right. \\ &\qquad \left.\left. - \frac{1-p}{p}c_p\bar{F}^{-p}(s)\right\} f(s)ds - g\int_0^x \bar{F}(s)ds\right\} \\ &= \frac{pc_q - qc_p}{p} + \frac{q-p}{p}c_p\bar{F}^{-p}(x) - (q-p)g\bar{F}^{-p}(x)\int_0^x \bar{F}^p(s)ds \end{aligned}
$$

である．ここ で

**定義 5**

$$
(3.25)\qquad \phi(p,q) \equiv pc_q - qc_p
$$

とおく.□

そこで，改めて

$$L(x)=\frac{\phi(p,q)}{p}+\frac{q-p}{p}c_p\bar{F}^{-p}(x)-(q-p)g\bar{F}^{-p}(x)\int_0^x\bar{F}^p(s)ds \tag{3.26}$$

である．

$p=0$ の場合は

$$L(x)=c_q-c_p-qc_p\int_0^x\lambda(s)ds-qgx \tag{3.27}$$

である．

続いて，$q=1$ の場合を考える．この場合積分方程式とはならないが，

$$v_q(x)=c_q \tag{3.28}$$

は，(3.19) の解である．よって，この場合にも $v_q(x)$ を (3.19) と設定する事に問題はない．

さて，政策の最適性を示すためには $T_p[v]$ と $T_q[v]$ の大小関係，すなわち，$L(x)$ の符号のみが考察の対象になるので，簡単のために (3.24) の両辺に $\frac{1}{q-p}\bar{F}^p(x)>0$ を掛ける．ここで，

**定義 6**

$$l(x)\equiv\frac{1}{q-p}\bar{F}^p(x)L(x) \tag{3.29}$$

と定義する.□

このとき (3.29) は

$$l(x)=\frac{\phi(p,q)}{p(q-p)}\bar{F}^p(x)+\frac{1}{p}c_p-g\int_0^x\bar{F}^p(s)ds \tag{3.30}$$

である．

また，$p=0$ の場合は

$$l(x)=\frac{c_q-c_p}{q}-c_p\int_0^x\lambda(s)ds-gx \tag{3.31}$$

である．

次に $x\in[t,\infty)$ のときを考える．ここで

**定義 7**

$$M(x)\equiv T_q[v](x)-T_p[v](x) \tag{3.32}$$

とおく.□

このとき

$$M(x)=-\left\{c_p+\frac{1-p}{\bar{F}(x)}\left\{\int_x^\infty v(s)f(s)ds-g\int_x^\infty\bar{F}(s)ds\right\}\right\} \tag{3.33}$$

と表される．$v_q$の陽な表現 (3.20) を代入して

$$M(x)=\frac{\phi(p,q)}{q}-(q-p)g\bar{F}^{-q}(x)\int_x^\infty\bar{F}^q(s)ds \tag{3.34}$$

である．

さて，$T_p[v]$ と $T_q[v]$ の大小関係，すなわち，$M(x)$ の符号のみが考察の対象となるので

**定義 8**

(3.35)
$$m(x) \equiv \frac{1}{q-p}\bar{F}^q(x)M(x)$$

と定義する．□

(3.34) の両辺に $\frac{1}{q-p}\bar{F}^q(x) > 0$ を掛けることによって

(3.36)
$$m(x) = \frac{\phi(p,q)}{q(q-p)}\bar{F}^q(x) + g\int_x^\infty \bar{F}^q(s)ds$$

である．以後，$m(x)$ の符号を考えてゆく．

まず，$0 < p < 1$ の場合を考える．

$\eta$は区間 $[0,\infty)$ で定義され，$[0,t]$ では $l(x)$ に一致し，区間 $(t,\infty)$ では

(3.37)
$$\eta(x,g) = \frac{\phi(p,q)}{p(q-p)}\bar{F}^p(x) + \frac{c_p}{p} - g\int_0^x \bar{F}^p(s)ds$$

である．また$\xi$は区間 $[t,\infty)$ では $m(x)$ に一致し，区間 $[0,t)$ では

(3.38)
$$\xi(x,g) = \frac{\phi(p,q)}{q(q-p)}\bar{F}^q(x) + g\int_x^\infty \bar{F}^q(s)ds$$

であるものとする．

続いて $p=0$ の場合を考える．このとき

(3.39)
$$\eta(x,g) = \frac{c_q - c_p}{q} - c_p\int_0^x \lambda(s)ds - gx$$

であるとし，他に変更はない．

**定義 9** $x$ と $g$に関する連立方程式

(3.40)
$$\begin{cases} \eta(x,g) = 0, \\ \xi(x,g) = 0 \end{cases}$$

を考える．□

ここで，$\eta$と$\xi$を $x$ についてそれぞれ偏微分すると

(3.41)
$$\frac{\partial}{\partial x}\eta(x,g) = -\bar{F}^p(x)\left\{\frac{\phi(p,q)}{q-p}\lambda(x) + g\right\},$$

(3.42)
$$\frac{\partial}{\partial x}\xi(x,g) = -\bar{F}^q(x)\left\{\frac{\phi(p,q)}{q-p}\lambda(x) + g\right\}$$

であるから，$\frac{\partial}{\partial x}\eta$と$\frac{\partial}{\partial x}\xi$の関係

(3.43)
$$\frac{\partial}{\partial x}\xi(x,g) = \bar{F}^{q-p}(x)\frac{\partial}{\partial x}\eta(x,g)$$

が成立する．$\bar{F}^{q-p}(x) > 0$ であることから，$\frac{\partial}{\partial x}\eta(x,g)$ と $\frac{\partial}{\partial x}\xi(x,g)$ の符号は一致する．

**定義 10**

(3.44)
$$D(x,g) \equiv -\frac{\phi(p,q)}{q-p}\lambda(x) - g$$

と置く．□

すると，$\frac{\partial}{\partial x}\eta(x,g)$ $\frac{\partial}{\partial x}\xi(x,g)$ は $D(x,g)$ の符号と一致する．

すなわち，$D(x,g)$ の符号は$\eta$及び$\xi$の増減を決定する．

**i)**　$\phi(p,q) \geq 0$ **の場合**

まず，$0 < p < 1$ の場合を考えよう．

このとき $L(x) = (q-p)\bar{F}^{-q}(x)\eta(x,g) > 0$ であり $T_q[v_p](x) > T_p[v_p](x)$ である．

**定義 11** 連立方程式 (3.40) において解がないとき $t^* = \infty$ とおき，対応する値を $g^*, v^*, L^*$ とおく．

**定理 3** $\phi(p,q) \geq 0$ のとき $t^* = \infty$（すなわち，修理 P のみの政策を意味する）と $g^* = g_p$及び，これらに対応する相対値関数 $v_p^*(x)$ は最適性方程式 (2.4) を満たす．□

（証明）

任意の $x$ に対して

(3.45)　$$L^*(x) = T_q[v_p^*](x) - T_p[v_p^*](x) = (q-p)\bar{F}^{-p}(x)l^*(x) = (q-p)\bar{F}^{-p}(x)\eta^*(x) \geq 0$$

である．

すなわち

(3.46)　$$\min\left\{\begin{array}{c} T_p[v_p^*](x) \\ T_q[v_p^*](x) \end{array}\right\} = v_p^*(x) \quad x \in [0,\infty)$$

であるから $t^*, g^*, v_p^*$は最適性方程式 (2.4) を満たす．□

これは，相対値関数が $v_p^*(x)$ のとき修理 P が安上がりであることを示しており，問題 PQ に対して修理 P のみを行う政策が最適であることを示している．

$p=0$ の場合を考える．このとき$\phi(0,q) = -qc_p < 0$ であるから．この場合は考慮しなくても良い．

**ii)** $\phi(p,q) < 0$ **の場合**

まず，$0 < p < 1$ の場合を考える．

$x = 0$ のとき $D(0,g) = -\frac{\phi(p,q)}{q-p}\lambda(0) - g$ は，$g$について単調減少である．$\phi(p,q) < 0$ であるから $D(0,0) = -\frac{\phi(p,q)}{q-p}\lambda(0) \geq 0$ である．また，$D(0,\infty) = -\infty$ である．$D(0,g)$ は $g$について連続なので

(3.47)　$$\exists g_0 \in (0,\infty) \quad \text{s.t.} \quad D(0,g_0) = 0$$

である．

**定義 12** ($g_0$)　(3.47) により $g_0$を定義する．□

このとき $g_0 = -\frac{\phi(p,q)}{q-p}\lambda(0)$ である．この $g_0$を用いて $D(0,g) > 0 \quad g \in [0,g_0)$，$D(0,g_0) = 0$，$D(0,g) < 0 \quad g \in (g_0,\infty)$ が成立する．

まず，$g \in [0,g_0)$ の場合を考える．$[0,g_0)$ の範囲に $g$を固定して $D(x,g)$ について考えると，$\lambda(x)$ は単調増加であり，係数は$-\frac{\phi(p,q)}{p-q} > 0$ であるから $D(x,g) > 0 \quad g \in [0,g_0)$ すなわち$\eta(x,g), \xi(x,g)$ は共に $g$を $g \in [0,g_0)$ に固定したとき $x \in [0,\infty)$ の範囲で $x$ に関して単調増加である．

このとき，$\eta(0,g) = \frac{c_q - c_p}{q-p} > 0$ であるから$\eta(x,g) > 0 \quad x \in [0,\infty)$ である．

また，

(3.48)　$$\xi(\infty,g) = \lim_{x\to\infty}\left\{\frac{\phi(p,q)}{q(q-p)}\bar{F}^q(x) + g\int_x^\infty \bar{F}^q(s)ds\right\} = 0$$

であるので$\xi(x,g) \leq 0 \quad x \in [0,\infty), g \in [0,g_0)$ である．

まとめると

(3.49)
$$\begin{cases} \eta(x,g) > 0 & x \in [0,\infty), g \in [0,g_0), \\ \xi(x,g) \leq 0 & x \in [0,\infty), g \in [0,g_0) \end{cases}$$

であることから$x \in [0,\infty), g \in [0,g_0)$ において連立方程式 (3.40) には解がないことが分かる．

さて$g \geq g_0$の場合を考える．$D(0,g) < 0 \quad g \in (g_0,\infty)$ のとき，$D(x,g)$ は$x$に関して単調増加であり $D(\infty,g) = \infty$ であり，任意の$g \in [g_0,\infty)$ に対して

(3.50)
$$\exists \bar{x}(g) \in [0,\infty) \quad \text{s.t.} \quad D(\bar{x}(g),g) = 0.$$

である．

**定義 13** ($\bar{x}(g)$)　$\bar{x}(g)$ を (3.50) によって定める．□

$D(x,g)$ は$x$に関して単調増加であり$D(\infty,g) = \infty$なので$D(x,g) < 0 \quad x \in [0,\bar{x}(g))$, $D(\bar{x}(g),g) = 0$, $D(x,g) > 0 \quad x \in (\bar{x}(g),\infty)$ である．よって$\eta,\xi$共に$x \in (0,\bar{x}(g))$ において単調減少，$x \in [\bar{x}(g),\infty)$ において単調増加である．よって

(3.51)
$$\exists \bar{g}_\eta \in [g_0,\infty) \quad \text{s.t.} \quad \eta(\bar{x}(\bar{g}_\eta),\bar{g}_\eta) = 0$$

である．

**定義 14** ($\bar{g}_\eta$)　$\bar{g}_\eta$を (3.51) によって定義する．□

(3.52)
$$\exists g_\xi^0 \in [g_0,\infty) \quad \text{s.t.} \quad \xi(0,g_\xi^0) = 0.$$

また,

**定義 15** ($g_\xi^0$)　$g_\xi^0$を (3.52) によって定義する．□

**補題 1** $\bar{x}(g)$ は$g$に関して単調増加である．□

(証明)

略 □

以下，連立方程式 (3.40) に必ず解 $(t^*,g^*)$ が存在することを証明しよう．

**定義 16** 修理 Q のみを行ったときの期待時間平均保全費用を$g_q$とおく．□

このとき [9] より

(3.53)
$$g_q = \frac{\frac{c_q}{q}}{\int_0^\infty \bar{F}^q(s)ds}$$

である．

**補題 2** $x_\eta(g_q) < x_\xi(g_q)$ である．□

(証明)

略 □

まず，$\bar{g}_\eta \leq g_\xi^0$の場合を考えよう．

**補題 3**

(3.54) $$x_\xi(g_\xi^0) \le x_\eta(g_\xi^0) \quad \square$$

(証明)

明らかに$\eta(x,g)$は$g \in [0,\infty)$に関して単調減少なので$0 = \eta(\bar{x}(\bar{g}_\eta), \bar{g}_\eta) \ge \eta(\bar{x}(\bar{g}_\eta), g_\xi^0)$である．また$\eta(0, g_\xi^0) = \dfrac{c_q - c_p}{q-p} > 0$より，中間値の定理により

(3.55) $$\exists x_\eta(g_\xi^0) \in (0, \bar{x}(\bar{g}_\eta)] \quad \text{s.t.} \quad \eta(x_\eta(g_\xi^0), g_\xi^0) = 0$$

である．$x_\eta(g_\xi^0) = 0$であるから$0 = x_\xi(g_\xi^0) < x_\eta(g_\xi^0)$が成立する．□

以上により

**定理 4** $\bar{g}_\eta \le g_\xi^0$のとき

(3.56) $$\exists g^* \in (g_\xi^0, g_q) \quad \text{s.t.} \quad \xi(t^*, g^*) = \eta(t^*, g^*) = 0$$

但し，

(3.57) $$t^* = x_\eta(g^*) = x_\xi(g^*)$$

である．□

(証明)

補題2,3より，中間値の定理から明らかである．□

続いて，$g_\xi^0 < \bar{g}_\eta$の場合を考える．

**補題 4**

(3.58) $$x_\xi(\bar{g}_\eta) < x_\eta(\bar{g}_\eta) \quad \square$$

(証明)　略　□

**定理 5** $g_\xi^0 < \bar{g}_\eta$のとき

(3.59) $$\exists g^* \in (\bar{g}_\eta, g_q) \quad \text{s.t.} \quad \xi(t^*, g^*) = \eta(t^*, g^*)$$

である．但し，$t^* = x_\eta(g^*) = x_\xi(g^*)$である．　□

(証明)

補題2,4により中間値の定理から明らか．□

**定理 6** 連立方程式

(3.60) $$\begin{cases} \eta(t,g) = 0 \\ \xi(t,g) = 0 \end{cases}$$

には，仮定１，２，３および$\phi(p,q) < 0$の下で，必ず解$(t^*, g^*)$が存在する．このとき$t^*$は有限である．□

（証明）

定理4,5より明らかである．□

**定義 17** $v_p^*, v_q^*, v^*, L^*, M^*, l^*, m^*, \eta^*, \xi^*$を連立方程式(3.40)の解$t = t^*, g = g^*$に固定した場合の対応する関数を表すものとする．□

**補題 5** $g^*, v^*$は最適性方程式(2.4)を満たす．□

（証明）

i) $x \in [0, t^*)$ のとき

$$L^*(x) = T_q[v_p^*](x) - T_p[v_p^*](x) = (q-p)\bar{F}^{-p}(x)l^*(x) = (q-p)\bar{F}^{-p}(x)\eta^*(x) > 0 \tag{3.61}$$

である．

ii) $x \in [t^*, \infty)$ のとき

$$M^*(x) = T[v_q^*](x) - T_p[v_q^*](x) = (q-p)\bar{F}^{-q}(x)m^*(x) = (q-p)\bar{F}^{-q}(x)\xi^*(x) \le 0 \tag{3.62}$$

である．すなわち

$$\min\left\{\begin{array}{c} T_p[v_p^*](x) \\ T_q[v_p^*](x) \end{array}\right\} = v_p^*(x) \quad x \in [0, t^*), \tag{3.63}$$

$$\min\left\{\begin{array}{c} T_p[v_q^*](x) \\ T_q[v_q^*](x) \end{array}\right\} = v_q^*(x) \quad x \in [t^*, \infty) \tag{3.64}$$

であるから，$g^*, v^*$は最適性方程式(2.4)を満たす．□

**補題 6** (3.4)が成立する．□

（証明）

略　□

続いて$p = 0$の場合を考える．

同様の計算で

$$v_p^*(t^*)|_{p=0} = c_p - c_p \int_0^{t^*} \lambda(s)ds + gt^* \tag{3.65}$$

であるから，(3.4)が成立する．

**定理 7** 仮定1，2，3及び$\phi(p,q) < 0$を満たす信頼性システムには最適である厳密な意味での$t$–政策が存在する．□

（証明）

定理6より$t^*$は有限であるので，年齢の区間$[0, t^*)$においては修理P，また，区間$[t^*, \infty)$においては修理Qを行う政策，いわゆる厳密な意味での$t$–政策は，補題5,6より定理2から1つの最適政策である．□

**定理 8** 仮定1，2，3の下で最適な$t$–政策が存在する．

（証明）定理3，7より明らか．　□

## 4 むすび

本論文では，時間平均期待費用規範の下で，小修理と取り替えの混合的な２つの政策に対する保全問題を扱った．この問題をセミ・マルコフ決定過程として定式化し，全ての政策の中で最適な $t$−政策が存在することを示した．

しかしながら，予防取り替えもまた重要な保全行為であるがここでは扱っていない．こうした保全行為を含むような問題を考察することは今後の重要な課題である．

## 参考文献


[1] R.E. Barlow and L.C. Hunter, Optimal preventive maintenance policies, *Operations Research* **8**, 90-100(1960).

[2] S.M. Ross, Average cost semi-Markov decision processes, *Journal of Applied Probability* **7**, 649-656 (1970).

[3] A.Tahara and T.Nishida, Optimal replacement policy for minimal repair model, *Journal of the Operations Research Society of Japan* **18**, 113-124 (1975).

[4] R.I. Phelps, Optimal policy for minimal repair, *Journal of the Operational Research Society* **34**, 425-427 (1983).

[5] M. Brown and F. Proschan, Imperfect Repair, *J. Appl. Prob.* **20**, 851-859 (1983).

[6] M. Ohonishi, T. Ibaraki, and H. Mine, On the optimality of $(t, T)$-policy in the minimal-repair and replacement problem under the average cost criterion, Presented in the *Proceedings of International Symposium on Maintainability and Reliability 1990-Tokyo,* Held in Tokyo, Japan, pp. 329-334, (June 5-8,1990).

[7] Y. Segawa, M. Ohnishi and T. Ibaraki, Optimal minimal-repair and replacement problem with age dependent cost structure *Computers Math. Applic.* **24**, No. 1/2, 91-101 (1992).

[8] 吉田耕作: 微分方程式の解法（第２版），岩波書店 (1978).

[9] 瀬川良之，山田隆太：「修理Ｐを行う信頼性モデルの期待時間平均費用について」，京都学園大学経営学部論集第５巻第１号 pp.177-179 (1995).