数理解析研究所講究録
948巻 1996年 11-38

Shiftsの周辺の話題について

甲子園大経営情報　榎本雅俊(Masatoshi Enomoto)

V. Jonesの仕事以来，作用素環の指数理論は多くの異なる方向で発展している．このノートでは，Powers [43]により始められた$*$-endomorphismsの分類問題についての話題を，筆者の関係した観点から述べる．また，それらに関係した話題についても触れることにする．

[I] Powersのbinary shiftsについて

ここでは後で必要となる言葉と概念を述べて，Powersの仕事を概説して，我々の結果との関連を述べる．

定義1　$\mathfrak{A}$を単位元をもつC^*-algebraとする．$End(\mathfrak{A})$で，$\mathfrak{A}$上の$*$-endomorphisms全体を表すとする．$\alpha, \beta \in End(\mathfrak{A})$として，$\alpha$と$\beta$がconjugateであるというのを，ある$\gamma \in Aut(\mathfrak{A})$で，$\beta = \gamma\alpha\gamma^{-1}$となるものが存在することで決める．$\alpha$と$\beta$がcocycle conjugateであるというのを，あるunitary $w \in \mathfrak{A}$，ある$\gamma \in Aut\,\mathfrak{A}$で，$Ad\,w \cdot \beta = \gamma\alpha\gamma^{-1}$となるものが存在することで決める．

Powersは，$B(H)$上の$*$-endomorphismsの間のconjugacy，cocycle conjugacyの問題を，次のshiftsのクラスについて解決した．

<u>定義2</u>　$\mathfrak{A}$を単位元をもつC^*-algebraで，$\alpha \in \mathrm{End}\,\mathfrak{A}$とする．$\alpha$がshiftであるとは，$\alpha(1)=1$で，$\bigcap_{k=1}^{\infty} \alpha^k(\mathfrak{A}) = \mathbb{C}1$なるときで決める．

<u>定義3</u>　$\alpha \in \mathrm{End}(B(H))$, $\alpha \notin \mathrm{Aut}(B(H))$とする．$N_1 = \alpha(B(H))'$としたとき，$N_1 = \mathrm{I}_n$-factor $(n=2,3,\cdots,\infty)$で，nのことを，αのmultiplicityと言う．

<u>定理4.</u>　α, βを$B(H)$上のshiftsとする．$B(H)$のpure normal state ω_0で，αのもとに不変なものが存在すると仮定する．このとき，αとβがconjugateであることと，βのもとに不変なpure normal state ω_1が存在して，αとβは同じmultiplicityをもつこととは同値である．

<u>定理5</u>　αとβを$B(H)$上のshiftsとする．このとき，αとβがcocycle conjugateであることと，αとβが同じmultiplicityをもつこととは同値である．

つまり，$B(H)$上のshifts達は，multiplicityにより殆んど決定されてしまうのである．その後，PowersはHyperfinite II_1 factor R上のshiftsの分類を問題とした．まず，R上のshiftsの最も簡単なクラスとして，次のbinary shiftsを考えた．

<u>定義6</u>　αをR上のshiftとする．αが<u>binary shift</u>

であるとは，次を満たす unitary $u \in R$ が存在することである．

① $u^2=1$ ② $u\alpha^k(u)=\pm\alpha^k(u)u$ $(k=1,2,\cdots)$

③ $R=\{u,\alpha(u),\alpha^2(u),\cdots\}''$.

（注意として，このとき，Jones index $[R:\alpha(R)]=2$ である．）

この binary shifts の conjugacy class について，Powers は次を示した．

定義7 α を R の binary shifts として，α の反交換集合 $S(\alpha)$ を，

$$S(\alpha)\equiv\{k>0 : u\alpha^k(u)=-\alpha^k(u)u\}$$

で定義する．

このとき，

定理8 α と β を R 上の binary shifts とすると，α と β が conjugate であることと，$S(\alpha)=S(\beta)$ とは同値である．

これを用いて，

定理9 R の binary shifts は conjugacy を除いて uncountably infinite 存在する．また，R の binary shifts の cocycle conjugacy classes は少なくとも countably infinite は存在する．

Powers は，[43] で次の問題を与えた．

問題10 α と β を binary shifts とする．

$g(\alpha)=\min\{k \mid \alpha^k(R)'\cap R\neq\mathbb{C}1\}$ とおく．このとき，$g(\alpha)$ は，α の cocycle conjugacy invariant である．もし $g(\alpha)=g(\beta)$

ならば，α と β は cocycle conjugate であるか？

この問題は，[23]の中で，次のように解かれた．

<u>定義11</u>　$G=\coprod_{i=0}^{\infty}\mathbb{Z}_2$ とする．$a:\mathbb{Z}\to\{0,1\}$ が signature sequence とは，$a(0)=0$，$a(n)=a(-n)$ $(n\in\mathbb{Z})$ なるときをいう．G 上の shift σ を，$(\sigma(x))(i)=x(i-1)$ $(i\geq 1)$，$(\sigma(x))(0)=0$ $(x=(x(i))\in G)$ とする．a に対応する multiplier $m_a\in Z^2(G,\mathbb{T})$ を，

$$m_a(x,y)=(-1)^{\sum_{i>j}a(i-j)x(i)y(j)}\quad (x=(x(i)),\ y=(y(j))\in G)$$

で決める．

$\ell^2(G)$ 上の unitary operator $\lambda_{m_a}(x)$ を，

$$(\lambda_{m_a}(x)\xi)(y)=m_a(x,x^{-1}y)\xi(x^{-1}y)\quad (x,y\in G,\ \xi\in\ell^2(G))$$

と定義する．$R_{m_a}(G)$ で，$\{\lambda_{m_a}(x)\mid x\in G\}$ により生成された von Neumann algebra とする．signature sequence a が periodic とは，ある整数 k で，$a(k+n)=a(n)$ $(n\in\mathbb{Z})$ が成立するときをいう．a が eventually periodic とは，ある整数 $k(\geq 0)$，$p(>0)$ で，$\forall n\geq k$ について，$a(n+p)=a(n)$ となるときをいう．

$m_a(\sigma(x),\sigma(y))=m_a(x,y)$ なので，σ は $R_{m_a}(G)$ 上の shift で，$\sigma(\lambda_{m_a}(x))=\lambda_{m_a}(\sigma(x))$ $(x\in G)$ なるものを induce する．$e_0=(1,0,0,0,\cdots)\in G$ で，$e_n=\sigma^n(e_0)\in G$ で，$u_0=\lambda_{m_a}(e_0)$ とおくと，$u_n=\sigma^n(u_0)$ である．このとき，$u_nu_m=(-1)^{a(n-m)}u_mu_n$ で，Hyperfinite II_1 factor $R=R_{m_a}(G)$ は，$\{u_n\mid n=0,1,2,\cdots\}$ により生成される．この $R_{m_a}(G)$ 上の shift $\sigma=\sigma_a$ は，signature sequence a をもつ Powers の binary shift である。

<u>定理12</u> a を aperiodic signature sequence で、finite support をもつとする。つまり、$^{\#}\{i\in\mathbb{N}\,;\,a(i)\neq 0\}<+\infty$ を仮定する。$d=\max\{i\in\mathbb{N}:a(i)\neq 0\}$ とする。このとき、$\sigma^k(R)'\cap R=\mathbb{C}1$ $(0\leq k\leq d)$、$\sigma^k(R)'\cap R=\{u_i:0\leq i\leq k-d-1\}''$ $(d+1\leq k)$

これを使うと、Powers の問題には、次の反例が取れる。

<u>例</u> a,b を次の signature sequence とする。$a(1)=a(3)=1$, $a(i)=0$ $(i\neq 1,3)$, $b(1)=b(2)=b(3)=1$, $b(j)=0$ $(j\neq 1,2,3)$. このとき、$\sigma_a^{\,7}(R)'\cap R\cong M_2\otimes\mathbb{C}^4$, $\sigma_b^{\,7}(R)'\cap R\cong M_4$. このように、これらは同型でない。よって、$\sigma_a$ と σ_b は cocycle conjugate ではない。

この問題を考えているときに、[22]の中で、a,b を finite support をもつ signature sequence として、それらに対応する binary shifts を σ_a,σ_b とするとき、σ_a が σ_b に conjugate であることと、σ_a と σ_b とが cocycle conjugate が同値であるという予想を出したが、これは [9] の中で肯定的に解決された。[9] では、a を eventually periodic な signature sequence とすると、$\exists r$ で、$\sigma_a^{\,r}(R)'\cap R\neq\mathbb{C}$ なので、次の derived shift $(\sigma_a)_\infty$ を考えることができる。つまり、

$$(\sigma_a)_\infty\equiv\sigma_a\Big|_{\bigcup_{r\geq 0}\sigma_a^{\,r}\cap R}.$$

このとき，σ_a と σ_b が cocycle conjugate のとき，$(\sigma_a)_\infty$ と $(\sigma_b)_\infty$ は conjugate が示せるので，このようにして我々の予想が示された．

又，binary shifts の cocycle conjugacy を考える中で，[21] の結果を得た．finite support をもつ binary shifts に対する relative commutant algebras の構造を決定して，殆んどの binary shifts が cocycle conjugacy を除いて，relative commutant algebras で分類される。また，[9] の結果と合わせると，ある２つの異なる signature sequences a_1, a_2 で，a_1 と a_2 から得られる binary shifts の relative commutant algebras の Bratteli diagrams が同じになるものの存在が示せる．

また，Stacey [62] は，[21] での議論を使って，一般の p-shift（p は素数）に対して，我々の結果を拡張している．

さて，Powers の binary shift ではない index 2 の shift の存在は，Price [52] により，binary shifts を AF 的に積み重ねることで得られた，ただし，[52] では，binary shift ではない index 2 の shift の例を１つ作ったに留まった。その後，我々 [20] に於て，[52] の例を更に一般化して，binary shift ではない index 2 の shifts を，uncountably many な non-conjugate shifts を構成した．この構成は，次のようになされる．

$X=\coprod_{i=0}^{\infty}\mathbb{Z}_2$ とし, signature sequence a に対応する X 上の multiplier を m_a と書く. 同様に $Y=\coprod_{i=0}^{\infty}\mathbb{Z}_2$ とおく. monic な多項式 $p(t)=c_0+c_1t+\cdots+c_kt^k\in F_2[t]$ (ここで, $c_0=1$) とおき, $F_2[t]/p(t)=\{f(t)/p(t): f(t)\in F_2[t]\}$ とし, 埋め込み $\psi: F_2[t]\to F_2[t]/p(t)$ を, $\psi(f(t))=\dfrac{p(t)f(t)}{p(t)}$ とする. $\theta: X\to F_2[t]$ を, $x=(x(i))\in X$ に対して,

$$\theta(x)=\sum_{i\geq 0}x(i)t^i\in F_2[t] \text{ とおく.}$$

また, $\gamma: Y\to F_2[t]/p(t)$ を, $y=(y(i))\in Y$ について,

$$\gamma(y)=\Big(\sum_{i\geq 0}y(i)t^i\Big)\Big/p(t)$$

とおく. $\Phi_p: X\to Y$ を, $\Phi_p=\gamma^{-1}\psi\theta$ とおく. signature sequence a と monic 多項式 $p_\ell(t)=c_{\ell,0}+\cdots+c_{\ell,k(\ell)}t^{k(\ell)}$ (ここで, $c_{\ell,0}=1$), $X_\ell=\coprod_{i=0}^{\infty}\mathbb{Z}_2$ $(\ell=1,2,\cdots)$ として,

$$\Phi_{p_\ell}: X_\ell\to X_{\ell+1}$$

を作る。nonperiodic な signature sequences a_ℓ $(\ell=1,2,\cdots)$ を, nonperiodic signature sequence $a_1=a$ から出発して,

$$m_{a_{\ell+1}}(\Phi_{p_\ell}(x),\Phi_{p_\ell}(y))=m_{a_\ell}(x,y)\quad (x,y\in X_\ell)$$

と作ることが出来るので, nonzero constant terms をもつ monic polynomials p_ℓ の列 $p=(p_1,p_2,\cdots)$ と nonperiodic signature sequence a に対して,

$$X_{[p]}=\varinjlim(X_\ell,\Phi_{p_\ell}),\quad m_{[a,p]}(x,y)=m_{a_\ell}(x,y)\quad (x,y\in X_\ell)$$

とおくことで，Hyperfinite II_1 factor $R_{m_{[a,p]}}(X_{[p]})$ が作れて，その上に canonical shift $\sigma_{[p]}$ が持ちあがる．このとき，埋め込む多項式の選び方により，uncountably many な non-conjugate, non-binary shifts で，index 2 のものを得る．我々と異なるやり方で，[10] で同様の結果が得られている．そこでは，[52] の non-binary shift の例を用いて，abstract なもとの group shift の方は固定して，様々に multiplier を動かすことにより，uncountably many な non conjugate, non-binary shifts で，index 2 なものを得ている．

[21] の中で得られた結果の一般化が，[50] でなされている．[21] では，signature sequence に finite support をもつという条件を課していたのを，eventually periodic という条件にゆるめても，我々のと同じ結果が成り立つことを示している．Nagisa [36] では，Hyperfinite II_1 factor R 上の，任意の binary shift α に対して，α と cocycle conjugate となる binary shifts で，その signature sequence がお互いに異なる無限に多くのものが存在することが示されている．最近，Price [58] により，binary shifts で，commutant index $= 2$ をもつものの cocycle conjugacy の class は唯1つであることが示されている．ここで，commutant index k とは，$\sigma^k(R)' \cap R \neq \mathbb{C}$ となる最初の k のことである．以上，index 2 の shifts を扱って来

たが，一般の index n の shifts についても，index 2 に対応する結果が得られている．（[8, 9, 10, 12, 19, 53, 62]）

[II] Endomorphisms と Cuntz algebras

Arveson [1] の結果：「α を nonzero な normal $*$endomorphisms of $B(H)$ としたとき，$\exists$ isometries の列 $v_1, v_2, \cdots \in B(H)$ で，mutually orthogonal ranges をもつもので，

$$\alpha(a) = \sum_n v_n a v_n^* \quad (a \in B(H))$$

となるものの存在を示した」から，Laca [33] は，この $*$-endomorphism と，$v_1, v_2, \cdots$ から生成される Cuntz algebra の表現を対応させるという idea により，$B(H)$ の $*$ endomorphism についての結果を得ている．その内容の拡大 version が，Bratteli, Jorgensen, Price 達により，[6, 7] で調べられている．[27] の中で，我々は Laca の結果の II_1-version を示した．結果としては，

定理　M を II_1 factor，α を M の unital $*$ endomorphism とする．$[M : \alpha(M)] < \infty$ と仮定する．このとき，ある自然数 n，M のある Hilbert 空間上への $*$-表現 ρ と，Cuntz algebra $\mathcal{O}_n = C^*(\{v_i : i = 1, \cdots, n\})$ の $B(H)$ への $*$ 表現で，

$$n \leqq 4(([M : \alpha(M)]) \text{の整数部分} + 1) と,$$

$$\rho(\alpha(m)) = \sum_{i=1}^{n} \pi(v_i)\rho(m)\pi(v_i)^*, \quad m \in M$$

を満たすものが存在する.

<u>定理</u>　II_1 factor M が Hilbert space H に standardly に作用しているとする. $\mathcal{O}_m = C^*(\{s_i : i=1,\cdots,m\})$, $\mathcal{O}_n = C^*(\{t_j : j=1,\cdots,n\})$ を, H 上の isometries $\{s_i\}_i$, $\{t_j\}_j$ により生成された Cuntz algebras とする. α, β を, $\alpha(x) = \sum_{i=1}^{m} s_i x s_i^*$, $\beta(x) = \sum_{j=1}^{n} t_j x t_j^*$ $(x \in M)$ となる unital $*$ endomorphism とする.

このとき, 次は同値である:

(1) α と β は cocycle conjugate

(2) $m=n$ で, ある unitary $w \in B(L^2(M,\mathrm{tr}))$, ある unitary $v \in M$ とある unitary 行列 $(u_{ij}) \in M' \otimes M_n(\mathbb{C})$ で,

$$\sum_{j=1}^{n} v(w s_j w^*) u_{ji}$$

を満たすものが存在する,

[III] <u>その他の shifts の関連する話題</u>

Powers [43] に於て, $B(H)$ 上の $*$-endomorphisms の E_0-semigroups の理論が始められた. この後, Arveson [1] により, product system の名の下に, Powers の E_0-semigroup の理論が再構築されている. hyperfinite II_1 factor R の E_0-semigroups についても, [43] で考察されている. ([3, 44, 45, 46, 47, 48, 51]). shifts をつなぎ合わせた endomorphisms の考察が, [54] にある.

[IV] 未発表の結果

以下では，綿谷氏と筆者の間で得られた結果で，結果だけアナウンスしたものの紹介をする。これは，$\mathbb{R}$上のshiftsのcocycle conjugacyを考えるときに出て来たものである．(cf. [42])

主題4.1　Pを，Hilbert space上のII_1 factorとする．σをPのunital $*$ endomorphismとする．

$$N(\sigma)=\left\{\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & \sigma(x)\end{pmatrix} : x\in P\right\}\subset P\otimes M_2(\mathbb{C})$$

とおく．このとき，$N(\sigma)$はfactorである．

最初に，次を示す．

補題4.2　σをPのunital $*$-endomorphismで，$\sigma(P)\neq P$とする．もし $ax=\sigma(x)a$ $(\forall x\in P)$ とすると，$a=0$ が成立する．

証明　$ax=\sigma(x)a$ なので，$xa^*=a^*\sigma(x)$ である．よって，

$$a^*ax=a^*\sigma(x)a=xa^*a \ (\forall x\in P).$$

Pはfactorなので，$a^*a\in\mathbb{C}1$．もし$a\neq 0$とすると，$a^*a=\lambda 1>0$とおくと，$u=\lambda^{-1/2}a$．このとき，

$$u^*u=(\lambda^{-1/2}a^*)(\lambda^{-1/2}a)=\lambda^{-1}a^*a=1.$$

Pはfiniteなので，$uu^*=1$．このように，uはunitary $\in P$である．他方，$x\in P$について，

$$x=\lambda^{-1}\lambda x=\lambda^{-1}a^*ax=(\lambda^{-1/2}a)^*\sigma(x)(\lambda^{-1/2}a)=u^*\sigma(x)u$$

このように，$\sigma(x)=uxu^*=(\mathrm{Ad}\,u)(x)$．よって，$\sigma(P)=P$．これは，

矛盾なので，主張を得る．

<u>主題4.3</u>　σ_1 と σ_2 を II_1 factor P 上の unital $*$ endomorphisms で，$\sigma_i(P)\neq P$ なるものとする．$\sigma_i(P)'\cap P=\mathbb{C}1$ かつ $[P:\sigma_i(P)]<\infty$ を仮定する．このとき，σ_1 と σ_2 が cocycle conjugate であることと，$N(\sigma_1)$ と $N(\sigma_2)$ が conjugate であることとは同値である．

<u>証明</u>　σ_1 と σ_2 とが cocycle conjugate とする．このとき，ある unitary $w\in P$ と $\theta\in \mathrm{Aut}\,P$ で，$\sigma_2=\mathrm{Ad}w\circ\theta\sigma\theta^{-1}$ となるものが存在する．

$$\Phi\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & w\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta(x_1) & \theta(x_2) \\ \theta(x_3) & \theta(x_4)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & w\end{pmatrix}^*$$

とおく．このとき，$\Phi\in\mathrm{Aut}(M)$．もし $y=\theta(x)$ とおくならば，

$$\Phi\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & \sigma_1(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & \sigma_2(y)\end{pmatrix}.$$

このように，$\Phi(N(\sigma_1))=N(\sigma_2)$．逆に，ある automorphism $\Phi\in\mathrm{Aut}(M)$ で，$\Phi(N(\sigma_1))=N(\sigma_2)$ なるものが存在すると仮定する．よって，$x\in P$ について，

$$\Phi\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & \sigma_1(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & \sigma_2(y)\end{pmatrix}$$

がある $y\in P$ に対して成立する．このとき，automorphism $\theta\in\mathrm{Aut}(P)$ を，$\theta(x)=y,\ x\in P$ と定義する。次に，

$\Phi\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ w & c\end{pmatrix}$ を考える．このとき，w が P の

unitaryであることを示す．最初に，$\Phi\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$を示す．明らかに，

$$\Phi(N(\sigma_1)'\cap M)=N(\sigma_2)'\cap M$$

である．次に，

$$N(\sigma_i)'\cap M=\left\{\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}:\lambda,\mu\in\mathbb{C}\right\}\ \text{を示す.}$$

$\begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix}\in N(\sigma_i)'\cap M$ に対して，

$$\begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & \sigma_i(y) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & \sigma_i(y) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix}.$$

よって，$\forall y\in P$ に対して，

$$sy=ys,\ v\sigma_i(y)=\sigma_i(y)v,\ t\sigma_i(y)=yt,\ vy=\sigma_i(y)u.$$

Pはfactorであることと，$\sigma_i(P)'\cap P=\mathbb{C}I$ とlemma1から，

$$s,v\in\mathbb{C}1,\ t=u=0$$

から，

$$N(\sigma_i)'\cap M=\left\{\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}:\lambda,\mu\in\mathbb{C}1\right\}.$$

$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\in N(\sigma_1)'\cap M$ より，

$$\Phi\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\in N(\sigma_2)'\cap M=\left\{\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}:\lambda,\mu\in\mathbb{C}1\right\}.$$

よって，

$$\Phi\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\ \text{か,}\ \Phi\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

しかし，$\Phi\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&I\end{pmatrix}$ は起きない．これは，次の理由による．

$$\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}M\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}N(\sigma_1)\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right]=[P\oplus 0:P\oplus 0]=1$$

が成立するが，他方，

$$\left[\Phi\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}M\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right):\Phi\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}N(\sigma_1)\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right)\right]=[0\oplus P:0\oplus\sigma_2(P)]$$

$\geqq 2$ （$\Phi(N(\sigma_1))=N(\sigma_2)$ を使っている．）

ところが，index は isomorphism invariant なので，これは矛盾．

よって，$\Phi\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$.

更に，$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\Phi\left(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}^*\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}a&b\\w&c\end{pmatrix}^*\begin{pmatrix}a&b\\w&c\end{pmatrix}$ が成立する．

これは，$\Phi\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right)=\Phi\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ から導かれる．

よって，$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^*a+w^*w & a^*b+w^*c\\ b^*a+c^*w & b^*b+c^*c\end{pmatrix}$. これより，$b=c=0$.

他方，$\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\Phi\left(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}^*\right)=\begin{pmatrix}a&0\\w&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0\\w&0\end{pmatrix}^*=\begin{pmatrix}aa^*&aw^*\\wa^*&ww^*\end{pmatrix}$.

よって，

$a=0$ かつ，w は P の unitary となる．更に，

$$\Phi\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \Phi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & \sigma_1(x) \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta(x) & 0 \\ 0 & \sigma_2(\theta(x)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta(x) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\Phi\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1(x) \end{pmatrix} = \Phi\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & \sigma_1(x) \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Phi\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & \sigma_1(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2(\theta(x)) \end{pmatrix}.$$

よって，$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2(\theta(x)) \end{pmatrix} = \Phi\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1(x) \end{pmatrix} = \Phi\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_1(x) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^*\right)$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ w & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta(\sigma_1(x)) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ w & 0 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & w\theta(\sigma_1(x))w^* \end{pmatrix}.$$

よって，　$\sigma_2(\theta(x)) = w\,\theta(\sigma_1(x))w^*$.　このように，$\sigma_1$ と σ_2 は cocycle conjugate.

$N(\sigma)$ の M の中の index は，local index を使って計算される．

$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$p_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in N(\sigma)' \cap M$ から，p_1 と p_2 は $N(\sigma)' \cap M$ の partition である．よって，

$$[M : N(\sigma)] = \frac{[M : N(\sigma)]_{p_1}}{\tau_M(p_1)} + \frac{[M : N(\sigma)]_{p_2}}{\tau_M(p_2)}$$

このとき，$\tau_M(p_1) = \tau_M(p_2) = \frac{1}{2}$.

$$[M : N(\sigma)]_{p_1} = [M_{p_1} : N(\sigma)_{p_1}] = [P : P] = 1.$$

$$[M : N(\sigma)]_{p_2} = [M_{p_2} : N(\sigma)_{p_2}] = [P : \sigma(P)].$$

このように，

$$[M : N(\sigma)] = \frac{1}{1/2} + \frac{[P : \sigma(P)]}{1/2} = 2(1 + [P : \sigma(P)]).$$

よって，もしσが binary shift ならば，この index は6である．次に，$N(\sigma)$はMで，infinite depth をもつことを示す．Popa の結果から，もし$N \overset{e_0}{\subset} M$ が finite depth をもつならば，$E_{N'\cap M}(e_0)=[M:N]^{-1}I$ が成立する．ここで，$N\subset M$が finite depth をもつとは，$\sup \dim \mathcal{Z}(M'\cap M_{i+1})<\infty$ のことである．Pimsner-Popa により，$N\subset M$を finite factors で，$[M:N]<\infty$ としたとき，次の(1)と(2)の同値が示されている．

$$(1)\ H(M|N)=\log[M:N]$$

$$(2)\ E_{N'\cap M}(e_0)=[M:N]^{-1}I_M.$$

次を考えよう．

$$N(\sigma)'\cap M=\left\{\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}\middle|\ \lambda,\mu\in\mathbb{C}I\right\}=\mathbb{C}p_1\oplus\mathbb{C}p_2.$$

p_1とp_2は，$N(\sigma)'\cap M$の minimal projection である．だから，Pimsner-Popa の公式より，

$$H(M|N(\sigma))=\tau(p_1)\log\left(\frac{[M_{p_1}:N(\sigma)_{p_1}]}{\tau(p_1)^2}\right)+\tau(p_2)\log\left(\frac{[M_{p_2}:N(\sigma)_{p_2}]}{\tau(p_2)^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{\frac{1}{4}}\right)+\frac{1}{2}\log\left(\frac{[p:\sigma(p)]}{\frac{1}{4}}\right)=\log 4[p:\sigma(p)]^{\frac{1}{2}}.$$

このとき，

$$H(M|N(\sigma))\neq\log[M:N(\sigma)].$$

何故なら，もし一致したとすると，$16[p:\sigma(p)]=4(1+[p:\sigma(p)])^2$.
これより，$[p:\sigma(p)]=1$ を得る．これは，$\sigma(p)\neq p$に矛盾する．

これに関連して，index 6 の subfactors の 1 つの部分は次で特徴づけられる．

<u>主題 4.4</u>　$N \subset M$ を II_1 factors とし，$[M:N]=6$ とする．τ を faithful normal trace on M とする．次を仮定する．

$$N' \cap M = \mathbb{C}^2 = \mathbb{C}_p \oplus \mathbb{C}_{(1-p)},\ p \in M^p.$$

このとき，(1) $\tau(p) = \frac{3 \pm 3^{\frac{1}{2}}}{6}$ とすると，ある onto $*$ endomorphism $\sigma : M_p \longrightarrow M_{1-p}$ が存在して，$N = \{x \oplus \sigma(x) \mid x \in M_p\} \subset M$ となる．(2) $\tau(p) = \frac{1}{3}$ か $\frac{1}{2}$ とすると，$\exists$ $*$-isomorphism σ: $M_p \longrightarrow N_{1-p} = \sigma(M_p) \subset M_{1-p}$ で，$[M_{1-p} : N_{1-p}] = 2$ かつ $N = \{x \oplus \sigma(x) : x \in M_p\} \subset M$ を満たすものが存在する．
(3) $\tau(p) = \frac{1}{2}$ か $\tau(p) = \frac{2}{3}$ ならば，ある $*$-isomorphism σ で，$\sigma : M_{1-p} \longrightarrow N_p \subset M_p$，$[M_p : \sigma(M_{1-p})] = 2$ で，$N = \{\sigma(x) \oplus x : x \in M_{1-p}\} \subset M$ となるものが存在する．

<u>証明</u>　$p \in N' \cap M$ より，$N_p \simeq N \simeq N_{1-p}$ である．

$$xp \xrightarrow{\theta_1} x \xrightarrow{\theta_2} x(1-p).$$

これより，$\theta : N_p \to N_{1-p}$ を，$\theta(xp) = x(1-p)$ で定義する。

このとき，$$[M:N] = \frac{[M_p : N_p]}{\tau(p)} + \frac{[M_{1-p} : N_{1-p}]}{\tau(1-p)}.$$

(A) $\frac{1}{\tau(p)} + \frac{1}{\tau(1-p)} = 6$ のときには，$\tau(p) = \frac{3 \pm 3^{\frac{1}{2}}}{6}$.

(B) $\frac{1}{\tau(p)} + \frac{2}{\tau(1-p)} = 6$ のときには，$\tau(p) = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$.

(c) $\dfrac{2}{\tau(p)}+\dfrac{1}{\tau(1-p)}=6$ のときには，$\tau(p)=\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{2}$.

(D) もし

$$\frac{m}{\tau(p)}+\frac{n}{\tau(1-p)}=6,\ m\geqq 2,\ n\geqq 2 \text{ のときには,}$$

$$\frac{m-2}{\tau(p)}+\frac{2}{\tau(p)}+\frac{n-2}{1-\tau(p)}+\frac{2}{1-\tau(p)}\geq 8$$

となり不可能である．

次に，M_∞ の algebra に関した話題について述べる．N を II_1-factor M の subfactor で index が有限なものとする．このとき，conditional expectation $E_N: M\to N$ を使って，II_1-factor M_1 を構成できる．これを続けて，II_1 factor $M_\infty=\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i}$ をもつ．この algebra M_∞ の性質について，Mashood [34] は，M_∞ が property T を持たないことを示した．ところが，更に強く，M_∞ は strongly stable であることが示せる．

<u>主題 4.5</u>　II_1 factor M_∞ は，strongly stable である．即ち，$M_\infty \sim M_\infty\otimes R_0$（ここで，$R_0$ は hyperfinite II_1 factor）が成立する．

<u>証明</u>　McDuff の結果を使うことにより，M_∞ の hypercentral sequences の集合が，M_∞ の central sequences の集合と一致しないことが示されれば，$M_\infty\simeq M_\infty\otimes R_0$ が示せる．その為に，Jones projections $e_N=e_1, e_M=e_2, \cdots (\in M_\infty)$ を考える．Jones projections $\{e_n\}$ の性質により，$n\geq 2$ について，$e_n x = x e_n$

$(\forall x \in M)$. 更に、$\forall$ words $e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_m}$ ($\{e_n\}$の) にたいして、nを十分大きく選べば、$e_n(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_m})=(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_m})e_n$. このように、$\{e_n\}_n$ は、M_∞ の central sequence である. 次に、$(e_n)_n$ が hypercentral seq でないことを示す. $x_n = e_{n+1}$ $(n \geq 1)$ とおく. このとき、$(x_n)_n$ は又、M_∞ の中の central sequence である. 次を計算する.

$\|[e_{n+1}, e_n]\|_2^2 = \|e_{n+1}e_n - e_n e_{n+1}\|_2^2 = \tau((e_{n+1}e_n - e_n e_{n+1})^*(e_{n+1}e_n - e_n e_{n+1})) = \tau(e_n e_{n+1} e_n - e_n e_{n+1} e_n e_{n+1} - e_{n+1} e_n e_{n+1} e_n + e_{n+1} e_n e_{n+1})$

$= \tau(\lambda e_n - \lambda e_n e_{n+1} - \lambda e_{n+1} e_n + \lambda e_{n+1})$, ここで、$\lambda = \dfrac{1}{[M:N]}$,

$= 2\lambda^2(1-\lambda) > 0$.

よって、$\|[e_{n+1}, e_n]\|_2 \not\to 0$. このように、$(e_n)_n$ は hypercentral sequence ではない. よって主張を得る.

系4.6 M_∞ は、property T をもたない.

次に、無限 index をもつ II_1 factor の組について述べる. 有限 index をもつ2つの II_1 factor の組 $N \subset M$, $\tilde{N} \subset \tilde{M}$ を考える. このとき、$N \subset M$ と $\tilde{N} \subset \tilde{M}$ の間の conjugacy と、$N \subset M_\infty$ と $\tilde{N} \subset \tilde{M}_\infty$, ($M \subset M_\infty$ と $\tilde{M} \subset \tilde{M}_\infty$) の間の conjugacy を見てみる. $N \subset M$, $\tilde{N} \subset \tilde{M}$ が conjugate でないときを考える. $N \subset M$ について、$\tilde{N} = N$, $\tilde{M} = M_1$ とおく. このとき、$N \subset M$ と $\tilde{N} \subset \tilde{M}$ は conjugate ではない. しかし、$N \subset M_\infty$, $\tilde{N} \subset \tilde{M}_\infty$ は conjugate で

ある. $n \neq m$ について, index $4\cos^2\frac{\pi}{n}$ の組 $N \subset M$, index $4\cos^2\frac{\pi}{m}$ の組 $\tilde{N} \subset \tilde{M}$ を取る. Ocneanu の central sequence thm により, $M \subset M_\infty$ と, $\tilde{M} \subset \tilde{M}_\infty$ は conjugate であり, 何故なら,

$$[M_\infty : M \otimes (M' \cap M_\infty)] = n\left\{4\sin^2\frac{\pi}{n}\right\}^{-1}.$$

次に, 無限 index をもつ II_1 factor の組 $N \subset M$ を取る. II_1-factors の列 $(M_n)_{n\geq 0}$ を考える. この列が $N \subset M$ に対する filtration であるとは, 次を満たすときを言うことにする。

(1) $M_0 = N \subset M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M$, (2) $\overline{\bigcup_n M_n} = M$ (3) $[M_i : N] < +\infty$ $(\forall i \geq 0)$.

更に, $N \subset M$ に対する filtration が次の(4)を満たすとき, それらを $N \subset M$ に対する proper filtration と呼ぶことにする.

(4) $M_n \subsetneq M_{n+1}$ $(\forall n \geq 0)$ で, もし L_n が II_1 factor で, $M_n \subseteq L_n \subseteq M_{n+1}$ とすると, そのとき, $L_n = M_{n+1}$ か又は, $L_n = M_n$ が, 任意の $n \geq 0$ に対して成立する.

$\varphi(n) = [M_n : M_0]$ とおいて, $\varphi(n)$ を, $(M_n)_{n\geq 0}$ に対する growth function と呼ぶ. 以下では, 群の場合のみを考える. 群 $H \subset G$ に対する proper filtration $(G_n)_{n\geq 0}$ を次のように定義する.

$(G_n)_{n\geq 0}$ を群の列とする. それらが, $H \subset G$ に対する filtration であるとは, 次を満たすときを言うことにする,

(1) $G_0 = H \subset G_1 \subset \cdots \subset G$, (2) $\langle G_n \mid n \geq 0 \rangle = G$, (3) $[G_i : H]$

$<+\infty$ ($\forall i \geq 0$).

更に，もし $H \subset G$ における filtration が次の(4)を満たすとき，それらを，$H \subset G$ における proper filtration と呼ぶことにする．

(4) $G_n \subsetneqq G_{n+1}$ ($n \geq 0$) で，もし K_n が subgroup で，$G_n < K_n < G_{n+1}$ のとき，$K_n = G_{n+1}$ かまたは，$K_n = G_n$ ($\forall n \geq 0$) が成立する．

$\varphi(n) = [G_n : G_0]$ ($\forall n \geq 0$) とおく．次の値 $\lim_{n\to\infty} (\log \varphi(n))/n$ を，$(G_n)_{n\geq 0}$ に対する <u>growth rate</u> と呼ぶ．

restricted direct product group $G = \coprod_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ を取る．(ここで，$\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$) このとき，subgroup $\{e\} \subset G$ を考える．G は $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ 上の vector space と考えられ，G の vector-subspaces はその bases で記述されるので，もし $\{e\} \subset G$ が proper filtration $(H_i)_{i\geq 0}$ をもつならば，そのとき，H_i は proper で，$\dim H_{i+1} = \dim H_i + 1$ をもつ．このように，growth function $\varphi(n) = [H_n : H_0] = 2^n$ となるので，growth rate $\lim_{n\to\infty} (\log \varphi(n))/n = \lim_{n\to\infty} (\log 2^n)/n = \log 2$ をもつ．p を素数として，$\mathbb{Z}_p$ の場合も同様に考えることができる．次に，infinite symmetric group S_∞ を考える．このとき，S_n から S_{n+1} への埋め込みを次のようにもつ．埋め込み $\Xi : S_n \longrightarrow S_{n+1}$ を，$(\Xi(\sigma))(i) = \sigma(i)$ ($1 \leq i \leq n$)，$(\Xi(\sigma))(n+1) = (n+1)$ ($\sigma \in S_n$) と決める．このとき，$S_n < S_{n+1}$ で，もし $S_n \subset L_n \subset S_{n+1}$ とおると，$L_n = S_n$ か $L_n = S_{n+1}$ をもつ．よって，$(S_n)_{n\geq 0}$ は，$\{e\} \subset S_\infty$ における proper filtration であ

る．このとき，$\varphi(n)=[S_n:\{e\}]=n!$ である．

また，$\{e\}\subset G$ に対する finite group $(G_n)_{n\geq 0}$ の proper filtration $(G_n)_{n\geq 0}$ があれば，proper filtration $(R_0 \rtimes G_n)_{n\geq 0}$ を，$R_0 \subset R_0 \rtimes G$ について作ることが出来る．ここで，R_0 は hyperfinite II_1-factor で，その action は outer とする．

［V］ Hyperfinite II_1-factor 上の Frobenius endomorphisms

Powers の shift は，$\bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ 上の canonical shift を，$\bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ 上の shift invariant multiplier を使って，$\bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ の twisted group von Neumann algebra を作り，その上に，持ち上げたものであった．さて，$\bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ は，$\mathbb{Z}_2=\{0,1\}=F_2$ 上の vector space として見ることが出来て，$\bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z}_2 = F_2[t]$（$F_2$ 上の多項式環）と同一視することができる．この見方からすれば，canonical shift とは，多項式の t 倍に他ならない．このように，多項式環の間の homomorphism として，有限体の Galois 群の generator として有名な Frobenius map を拡張したものを考えることができる．

<u>定義5.1</u> p を素数とする．α が $F_p[t]$ 上の Frobenius map とは，$\alpha(f(t))=(f(t))^p$ $(f(t)\in F_p[t])$ のこととする．また，α が，multiplier $m\in Z^2(F_p[t],\mathbb{T})$ を保存するとき，m による twisted von Neumann algebra $R_m(F_p[t])$ 上に，α を拡張したものを Frobenius endomorphism と呼ぶことにする．

このとき，

主題5.2　a を $\mathbb{Z}$ 上の signature sequence とする. m_a を対応する multiplier とする. このとき, m_a が α-invariant であることの必要十分条件は, $a(pn)=a(n)$ $(n=1,2,\cdots)$ なることである.

例5.3　a を, $a(2^n)=1$ $(n=0,1,2,\cdots)$ をみたす signature sequence とする. このとき, a は non-periodic で, α-invariant である. よって, この a を使って, hyperfinite II_1 factor $R_{m_a}(F_2[t])$ 上に α を持ち上げることができる. また, Frobenius endomorphism は, 例えば, 次の性質をもつ.

(1) $[R_{m_a}(F_2[t]):\alpha(R_{m_a}(F_2[t]))]=\infty$　(2) $\bigcap_n \alpha^n(R_{m_a}(F_2[t]))=\mathbb{C}$.

注意5.4　$F_2[t,s]$ により, $F_2[t]$ 上の polynomial ring で, $s^2+s+1=0$, t は transcendental variable を満たすものとする. このとき, $\sigma(f(t,s))=tf(t,s)$ $(f(t,s)\in F_2[t,s])$ とおくと,

$$[F_2[t,s]:\sigma(F_2[t,s])]=4,\quad \bigcap_{n=1}^{\infty}\sigma^n(F_2[t,s])=\{0\}$$ より,

σ は shift である. $F_2[t,s]$ 上の適当な multiplier を与えることで, $\{R_m(F_2[t,s]),\sigma\}$ と $\{\bigotimes M_2(\mathbb{C}),\text{canonical shift}\}$ の間の conjugacy を持つ.

注意5.5　ここで, このような Frobenius endomorphism を考える理由は, 数論との接点を求める為である. 例えば, Carlitz module で出て来る $\sigma_t+\alpha$ (t によるかけ算と, Frobenius endomorphism との和）も，multiplier をうまく決めてやることで，hyperfinite II_1 factor 上に実現される．

［VI］未解決問題

(1) binary shifts には，非可算な cocycle conjugacy classes が存在するか．特に，signature sequences が eventually periodic でない binary shifts はどの位の cocycle conjugacy classes をもつか．現在の所，これらの間に cocycle conjugacy classes が1個より多いかも知られていない．しかし binary shifts の strong cocycle conjugacy classes については，1個より多くあることが示されている．

(2) II_1 factor M 上に，index finite な shift が存在すれば，M は hyperfinite であるか．

(3) σ が index 2 の group shift ならば，それは Price 型の shift であるか．

(4) (nontrivial な form で) index 2 をもつ III 型の shift は存在するか．

(5) a と b を eventually periodic signature sequence とする．もし $(\sigma_a)_\infty$ と $(\sigma_b)_\infty$ が conjugate ならば，σ_a と σ_b は cocycle conjugate であるか．

(6) $a=(a_i)_{i\geq 0}$，$b=(b_j)_{j\geq 0}$ を，$\{0,1\}$ 上の signature sequences とする．σ_a と σ_b を，hyperfinite II_1-factor R 上の対応する

binary shifts とする. signature sequence a に対して, number $\bar{a}$ を, $\bar{a} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n/2^n$ と対応させる. σ_a と σ_b が cocycle conjugate で, a と b が aperiodic と仮定する. このとき, もし $\bar{a}$ が Liouville number となると, $\bar{b}$ は Liouville number であるか.

(7) σ を, signature sequence 0100000... をもつ binary shift とする. もし τ が σ に cocycle conjugate となると, その signature sequence は, 011111... か periodic である. σ と cocycle conjugate である binary shift の signature sequence は周期の長さ 2^n-1 をもち, ある長さ n の word で $\tau^2(R)^c$ を生成するということが成立するか.

(8) binary shifts が cocycle conjugate ならば, その center sequences は高々有限個のみ異なるか.

(9) どの sequences が, eventually periodic な center sequences として起きるか.

(10) α を hyperfinite II_1 factor R 上の binary shift とする. $I(n)$ を, algebra $\alpha^n(R)$ が nontrivial commutant をもつ最初の index n とする. これを commutant index と言う. commutant index が 3 以上の binary shifts を分類せよ.

(11) binary shift でない R 上の shift α で, $\alpha^2(R)' \cap R \neq \mathbb{C}$ となるものが存在するか.

REFERENCES

1. W.Arveson, *Continuous analogues of Fock space*, Memoirs A.M.S. 80(409) (1989).
2. V.A.Arzumanjan and Am.Versik, *Factor representations of the crossed product of a commutative C^*-algebra and a semigroup of its endomorphisms*, Soviet Math.Dokl.19(1978),48-52.
3. B.V.R.BHat, *An index theory for quantum dynamical semigroups*, Trans.Amer.Math.Soc. 348(1996),561-583.
4. D.Bisch, *Entropy of groups and subfactors,*, J.Func.Anal. 103(1992), 190-208.
5. S.Boyd, N.Keswani, and I.Raeburn, *Faithful representations of crossed products by endomorphisms*, Proc.Amer.Math.Soc. 118(1993),427-436.
6. O.Bratteri,P.E.T.Jorgensen, and G.L.Price, *Endomorphisms of B(H)*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics,Amer.Math.Soc.(1995).
7. O.Bratteli and P.E.T.Jorgensen, *Endomorphisms of B(H),II: finitely correlated states on O_n*, Univ.Iowa preprint,1995.
8. D.Bures and H.S.Yin, *Shifts on the hyperfinite factor of type II_1*, J.Operator Theory 20 (1988),91-106.
9. D.Bures and H.S.Yin, *Outer conjugacy of shifts on the hyperfinite II_1 factor*, Pacific J.Math. 142(1990),245-257.
10. D.Bures and H.S.Yin, *A class of shifts on the hyperfinite II_1 factor*, Proc.Amer.Math.Soc. 110 (1990), 169-175.
11. M.Choda, *The conjugacy classes of subfactors and the outer conjugacy classes of the automorphism group*, Math.Japon. 32(1987),379-388.
12. M.Choda, *Shifts on the hyperfinite II_1-factor*, J.Operator Theory,17(1987),223-235..
13. M.Choda, *Entropy for *-endomorphisms and relative entropy for subalgebras*, J.Operator Theory, 25(1991),125-140.
14. M.Choda, *Endomorphisms and automorphisms for factor inclusions (in Quantum and Non-Commutative Analysis,291-304)*, Kluwer Academic Publishers.
15. A.Connes, *Outer conjugacy classes of automorphisms of factors*, Ann.Sci.Ec.Norm.Sup., 8(1975),383-419.
16. A.Connes and V.Jones, *Property T for von Neumann algebras*, Bull.London Math.Soc., 17(1985),57-62.
17. J.Cuntz, *Simple C^*-algebras generated by isometries*, Commun. Math. Phys. 57 (1977), 173-185.
18. S.Doplicher and J.E.Roberts, *Endomorphisms of C^*-algebras,cross products and duality for compact groups*, Ann.Math.130(1989),75-119.
19. M.Enomoto,M.Choda and Y.Watatani, *Generalized Powers' binary shifts on the hyperfinite II_1 factor*, Math.Japon. 33(19888),831-843.
20. M.Enomoto,M.Choda and Y.Watatani, *Uncountably many non-binary shifts on the hyperfinite II_1-factor.*
21. M.Enomoto,M.Nagisa,Y.Watatani and H.Yoshida, *Relative commutant algebras of Powers' binary shifts on the hyperfinite II_1 factor*, Math.Scand.68(1991),115-130.
22. M.Enomoto and Y.Watatani, *A solution of Powers' problem on outer conjugacy of binary shifts*, preprint (1986).
23. M.Enomoto and Y.Watatani, *Powers' binary shifts on the hyperfinite factor of type II_1.*, Proc.Amer.Math.Soc. 105(1989),371-374.
24. M.Enomoto, *Entropy of certain endomorphisms of the II_1-factor of the free group in infinite number of generators*, Bull.Koshien Univ. (1993),1-5.
25. M.Enomoto, *Frobenius endomorphisms on the hyperfinite II_1-factor*, preprint (1995).
26. M.Enomoto, *A characterization of Powers' binary shifts on the hyperfinite II_1-factor via group shifts*, Bull.Koshien Univ.16(1988),91-93.
27. M.Enomoto and Y.Watatani, *Endomorphisms of type II_1-factors and Cuntz algebras*, J.Austral.Math.Soc.(Series A)60(1996),1-13.
28. M.Enomoto and Y.Watatani, *Endomorphisms on II_1-factors and associated C^*-algebras*, in preparation.
29. F.Hiai, *Entropy and growth for derived towers of subfactors*, Preprint (Jan.1993).
30. V.Jones, *Index for subfactors*, Invent.Math. 72(1983),1-25.

31. V.Jones, *On a family of almost commuting endomorphisms*, J.Func.Anal.122(1994)84-90.
32. E.Kirchberg and G.Vaillant, *On C^*-algebras having linear, polynomial and subexponential growth*, Invent.math. 108(1992),635-652.
33. M.Laca, *Endomorphisms of $B(H)$ and Cuntz algebras*, J.Oper.Thy. 30(1993)85-108.
34. B.Mashood, *Notes on Property T for type II_1 factors*, preprint.
35. M.Nagisa, *On properties of the approximately finite dimensionality for C^*-algebras*, Thesis, 1988.
36. M.Nagisa, *Cocycle conjugacy of binary shifts on the hyperfinite factor of type II_1*, preprint (1995).
37. M.Nakamura and Z.Takeda, *On some elementary properties of the crossed products of von Neumann algebras*, Proc.Jap.Acad. 34(1958),489-494.
38. M.Nakamura and Z.Takada, *On inner automorphisms of finite factors*, Proc.Jap.Acad. 37(1961),31-32.
39. W.L.Paschke, *The crossed product of a C^*-algebra by an endomorphism*, Proc. Amer. Math. Soc. 80 (1980), 113-118.
40. M.Pimsner and S.Popa, *Entropy and index for subfactors*, Ann.Scient.Ec.Norm.Sup. 19 (1986), 57-106.
41. C.Pinzari, *Semigroups of non-unital endomorphisms of C^*-algebras and compact group duality*, J.Funct.Anal.,115(1993),432-453.
42. S.Popa, *Soufacteurs, actions des groupes et cohomologie*, C.R.Acad.Sci.Paris, 309 (1989), 771-776.
43. R.T.Powers, *An index theory for semigroups of *-endomorphisms of $B(H)$ and type II_1 factors*, Canadian J.Math.40(1988),86-114.
44. R.T.Powers, *Continuous semi-groups of endomorphisms of $B(H)$.*, Abstracts of A.M.S. 13(1992)450(876-46-156).
45. R.T.Powers, *Continuous semigroups of endomorphism of $B(H)$. Preliminary report*, Abstracts of A.M.S. 15(1994)93.
46. R.T.Powers, *A non-spacial continuous semigroups of *-endomorphism of $B(H)$.*, Publ. Res. Inst. Math. Sci..
47. R.T.Powers and G.Price, *Continuous spacial semigroups of *-endomorphism of $B(H)$.*, preprint.
48. R.T.Powers and D.Robinson, *An index for continuous semigroups of *-endomorphism of $B(H)$.*, J.Funct.Anal.,84(1989),85-96.
49. R.T.Powers and G.Price, *Binary shifts on the hyperfinite II_1 factor*, Contemporary Math. 145(1993),453-464.
50. R.T.Powers and G.Price, *Cocycle conjugacy classes of shifts on the hyperfinite II_1 factor*, J.Func.Anal.121(1994),275-295.
51. G.Price, *The C^*-algebras generated by paires of semigroups of isometries satisfying certain commutation relations*, preprint.
52. G.Price, *Shifts on type II_1 factors*, Canadian J.Math. 39 (1987), 493-511.
53. G.Price, *Shifts of integer index on the hyperfinite II_1 factor,*, Pac.J.Math., 132 (1988), 379-390.
54. G.Price, *Endomorphisms of certain operator algebras,*, Publ.RIMS 25(1989),45-57.
55. G.Price, *Shifts on certain operator algebras (in Operator Theory:Proceedings of the 1988 GPOTS-Wabash conference*, Longman Scientific and Technical, 1990.
56. G.Price, *Binary shifts on the hyperfinite II_1 factor*, Abstracts of A.M.S. 13 (1992) 450 (876-46-27).
57. G.Price, *Shifts on the hyperfinite II_1 factor (Preliminary report)*, Abstracts of A.M.S. 15 (1994) 94.
58. G.Price, *Cocycle conjugacy classes of shifts on the hyperfinite II_1 factor, II,*, preprint (1995).
59. Y.Sekine, *An inclusion of type III factors with index 4 arising from an automorphism*, preprint.
60. J.Slawny, *On factor representations and the C^*-algebra of canonical commutation relations,*, Comm.Math.Phys., 24(1972),151-170.
61. P.J.Stacy, *Product shifts on $B(H)$*, Proc.Amer.Math.Soc.113(1991),955-963.

62. P.J.Stacy, *A comment of certain p-shift algebras*, J. Austral. Math. Soc. 49(1990),55-58.
63. P.J.Stacy, *Crossed products of C^*-algebras by *-endomorphisms*, J. Austral. Math. Soc. 54(1993),204-212.
64. K.Watanabe, *Shifts with two generators on the hyperfinite II_1-factor*, Nihonkai J.Math.
65. H.Yin, *Entropy of certain noncommutative shifts*, Rocy Mtn.J.Math. 20(1990),651-656.