

非一様な気体中における弱非線形波動の伝播

北大・工 井上良紀 (Yoshinori Inoue)

The weakly nonlinear progressive waves are studied, which propagate in a perfect gas with the spatial distribution of the density and constant thermoviscosity. As a far-field approximation, a generalized Burgers equation is first derived by making use of the method of multiple scales. A typical boundary value problem is here taken up, in which the source begins to execute the unceasing sinusoidal motion at the time $t = 0$ and so radiates a harmonic wave train. When the acoustic Reynolds number is extremely high, the exact solution of the generalized Burgers equation is easily obtained with the aid of the method of characteristics and the equal-areas rule: In marked contrast to the wave behaviour in homogeneous media, no shock may emerge in some cases, and in the other cases the leading wave in a half-cycle may evolve into a triangular wave and the subsequent wave train into a sawtooth-like wave, or may not completely, or the wave may even diverge. The amplitude saturation does not necessarily take place in the sawtooth-like wave.

§1. 一般化された Burgers 方程式

一般化された Burgers 方程式は、遠方場において、弱い非一様性の効果、および弱い非線形効果と散逸効果が競合しているような波動現象を記述する [Ref.1]:

$$\frac{\partial U}{\partial \sigma} - U \frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{\sqrt{\bar{c}(\sigma)}}{Re} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}, \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{u^*}{u_0 \sqrt{\bar{c}(x)}}, \\ \sigma &= \frac{M(\gamma + 1)}{2} \int_0^x \frac{dx}{[\bar{c}(x)]^{\frac{3}{2}}}, \\ \tau &= t - \int_0^x \frac{dx}{\bar{c}(x)}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ただし, ω は音源の角振動数であり, 時刻 t^* と音源からの距離 x^* は, $t^* = \omega t$, $x^* = k_0 x$ ($k_0 = \omega/c_0$, c_0 は音源の位置での $t = 0$ における音速) のように無次元化してある. u^* は流速, $\bar{c}(x)$ は c_0 で無次元化された局所音速を表す. 明らかに, 無次元化された初期密度分布と温度分布をそれぞれ $\bar{\rho}(x)$, $\bar{T}(x)$ ($\bar{\rho}(0) = \bar{T}(0) = 1$) とすれば, $\bar{c}^2(x) = 1/\bar{\rho}(x) = \bar{T}(x)$ の関係が成り立つ. また, $M \equiv \frac{u_0}{c_0}$ (u_0 は音源での流速の最大値) は音響 Mach 数, $Re \equiv (\gamma + 1)c_0 u_0 / \delta \omega$ (δ は音の拡散率) は音響 Reynolds 数である. とくに, (1) と (2) において, $\bar{c}(x) \equiv 1$ とすると, 通常の Burgers 方程式になることを注意しておく.

(cf.) 断面積がゆっくりと変化する管中を伝播する弱非線形波動は次のような一般化された Burgers 方程式によって支配される [Ref.2].

$$u^* = u_0 f(\omega t^*), \quad x^* = x_0 \text{ において};$$

$$\tau = \omega \left(t^* - \frac{x^* - x_0}{c_0} \right), \quad U = \left(\frac{A}{A_0} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{u^*}{u_0} \quad (A(x^*) \text{ は管の断面積}),$$

$$\sigma = \frac{\gamma + 1}{2} M k_0 \int_{x_0}^{x^*} \left(\frac{A_0}{A} \right)^{\frac{1}{2}} dx^*, \quad G(\sigma) = \left(\frac{A}{A_0} \right)^{\frac{1}{2}} (\sigma);$$

$$\frac{\partial U}{\partial \sigma} - U \frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{G(\sigma)}{Re} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}. \quad (3)$$

§2. 波の運動量とエネルギーに関する考察

音源である無限平板が周期的な振動を繰り返して, 右半空間を満たしている気体中に音波を放射している. このとき, ある固定点 ($x > 0$) において観察すると, 波動現象は周期性を持つ.

式 (1) を, 位置を固定して, 時間に関して積分して

$$\frac{d}{d\sigma} \int_t^{t+2\pi} U d\tau = 0$$

を得る。これより、

$$\int_t^{t+2\pi} \rho(x)u(x,t)dt = 0 \quad (4)$$

が帰結される。つまり、任意の点における運動量の時間平均はゼロである。あるいは、最低次のオーダーで、音響流（実質的な質量流）が存在しないことを示す。

一方向に進行する平面波（音波）のエネルギー密度 E は、 $E = \bar{\rho}(x)u^2$ によって与えられる[Ref.3]。また、エネルギーの流速密度 \mathbf{q} は、 $\mathbf{q} = \bar{c}(x)E\mathbf{n}$ (\mathbf{n} :波の進行方向に向かう単位ベクトル) によって与えられる。散逸性の効果が無視できる場合 ($1/Re = 0$) を考えると、式(1)に U を乗じて積分することによって

$$\int_t^{t+2\pi} \mathbf{q}d\tau = \mathbf{n} \int_t^{t+2\pi} \bar{c}(x)\bar{\rho}(x)u^2(x,t)dt = const. \quad (5)$$

を得る。つまり、どの点をとっても、右方へと流れるエネルギーの流束密度 (=音波の強度 (sound intensity)) の時間平均値は同一である。ただし、散逸性を考慮に入れた場合、音波の強度は音源から遠ざかるにつれて小さくなる。

つぎに、波の一波長内に含まれる全エネルギーを計算しよう。波長を L とすれば、

$$\begin{aligned} E_L &= \int_x^{x+L} \bar{\rho}(x)u^2(x,t)dx && (t \text{ は固定する}) \\ &= M^2 \int_z^{z+2\pi} U^2(\sigma, t-z)dz \\ &\cong M^2 \int_\tau^{\tau+2\pi} U^2(\sigma, \tau)d\tau \\ &= const. \end{aligned} \quad (6)$$

を得る。最後の積分の全体の値は、式(5)の絶対値に等しいから、 $E_L = const.$ が帰結される。

§3. $Re \rightarrow \infty$ の場合の厳密解

このとき、衝撃波が形成される以前では、式(1)の右辺は無視できて、支配方程式は

$$\frac{\partial U}{\partial \sigma} - U \frac{\partial U}{\partial \tau} = 0 \quad (7)$$

となる。衝撃波形成後は、式(7)の多価の解に等面積則を適用すればよい。

式(7)は、一様媒質中の弱非線形波動伝播を記述する単一波の方程式と同じ形をしており、

$$\text{境界条件} \quad U(0, \tau) = \sin \tau, \quad \tau \geq 0 \text{ に対して;} \quad (8)$$

$$\text{初期条件} \quad U(\sigma, 0) = 0, \quad \sigma \geq 0 \text{ に対して;} \quad (9)$$

を満足する厳密解は、パラメータ ξ を用いた表示で

$$U = \sin \xi, \quad \xi = \tau + \sigma \sin \xi \quad (10)$$

のように表せる。ただし、 $\sigma \geq 0$ 、 $\xi \geq 0$ とする。周知のように、 $\sigma = 1$ で衝撃波は形成される[Ref.4]。一様な気体の場合、 $\sigma = \beta M x$ ($\beta = (\gamma + 1)/2$)であるから、衝撃波の形成距離は、 $x_s = 1/\beta M$ で与えられる。非一様な気体に対しては、 σ は式(2)で定義されているので、当然

$$\frac{M(\gamma + 1)}{2} \int_0^\infty \frac{dx}{[c(x)]^{\frac{3}{2}}} \leq 1 \quad (11)$$

の場合があり得る。このとき衝撃波は形成されない(図1参照)。

衝撃波が形成される場合、 $\sigma > 1$ で解(10)は多価となるが、この場合には、これに等面積則を適用すると衝撃波形成後の波動伝播を簡単に解析できる[Ref.5]。最先端をゆく波の正の位相をもつ部分について、衝撃波の振幅 U_s と波の長さ l は、

$$U_s = 2\sqrt{\sigma - 1}/\sigma \quad (12)$$

$$l = 2 \left(\sqrt{\sigma - 1} + \arcsin \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \right) \quad (13)$$

となる。 σ が十分に大きな値をとり得る場合には、波のこの部分はいわゆる“三角波”(triangular wave)に漸近する(図2参照)。そうでない場合には、波は三角波へと成長する途中の段階でその伝播過程を終了する。

また、後続の波列は、 $\sigma \rightarrow \infty$ で

$$U = \begin{cases} \frac{\pi - \bar{\tau}}{1 + \sigma} & (0 \leq \bar{\tau} < \pi) \\ -\frac{\pi + \bar{\tau}}{1 + \sigma} & (-\pi \leq \bar{\tau} < 0), \end{cases} \quad (\bar{\tau} = \tau - 2\pi) \quad (14)$$

で与えられる“鋸歯状波”(sawtooth wave)となる。このとき、 $\tau = t - z(z \equiv \int_0^x dx/\bar{c}(x))$ であるから、座標 z に関して、衝撃波は 2π の間隔で並ぶ。このことは、もちろん実空間座標 x に関する等間隔性を意味しない。したがって、場合によっては、有限個の衝撃波しか現われないこともある。

つぎに、先頭を進む衝撃波の速度の跳びの量(速度振幅)の変化を調べてみよう。具体的な例として、初期の密度分布が $\bar{\rho} = (1 + \alpha x)^{-4} (\alpha > 0)$ で与えられる場合を考える。衝撃波形成条件(11)は $M(\gamma + 1) > 4\alpha$ となり、この条件が満足されているものとする。このとき、衝撃波の速度振幅は、(2)と(12)より

$$u_s = \frac{2}{\sigma} \sqrt{\frac{\sigma - 1}{1 + \nu\sigma}} \quad (15)$$

のように与えられる。ただし、 $\nu = [\alpha(4 - 3n)]/[2M(\gamma + 1)]$ 、 $\sigma = [1 - (1 + \alpha x)^{-2}]/|\nu|$ である。容易にわかるように、 $1/9 \leq |\nu| < 1$ の場合、伝播とともに速度振幅は単調に増大する。この場合には、非一様性の効果が散逸性の効果に完全に打ち勝っている(図3参照)。 $0 < |\nu| < 1/9$ の場合は、速度振幅は $\sigma = [1 - 3\nu - \sqrt{(1 + \nu)(1 + 9\nu)}]/4|\nu|$ において極大値、 $\sigma = [1 - 3\nu + \sqrt{(1 + \nu)(1 + 9\nu)}]/4|\nu|$ において極小値をとり、 $\sigma = 1/|\nu| (x = \infty)$ で発散する。 $\nu = 0$ は一様な媒質の場合にあたり、速度振幅は $\sigma = 2$ において最大の値に達した後は減少の一途をたどる。もう一つの例として、初期密度分布が $\bar{\rho} = (1 + \alpha x)^{-4/3} (\alpha > 0)$ の場合を考えてみよう。この場合には、

$$x \rightarrow \infty \text{ のとき, } u_s \rightarrow 2M\sqrt{\nu} \quad (16)$$

であることが示せる。つまり、非常に遠方の場で、非一様性の効果が、非線形性および散逸性の効果とつりあっている。

あとに続く鋸歯状波の衝撃波面における速度の跳びの量（全速度振幅）の変化も同様に求めることができる（図4参照）．初期の密度分布として、 $\bar{\rho} = (1 + \alpha x)^{-n} (n > 0)$ を考えよう．いま、 $\nu \equiv \alpha(4 - 3n)/[2M(\gamma + 1)] \geq 0$ とすれば、波は鋸歯状波に漸近する．このとき、(2) と (14) より

$$2u_s \rightarrow \begin{cases} 2\pi M \nu^{\frac{n}{4-3n}} \sigma^{\frac{4(n-1)}{4-3n}} & (n \neq \frac{3}{4}) \\ \frac{2\pi M}{\sigma} \exp\left[\frac{n\alpha\sigma}{2M(\gamma+1)}\right] & (n = \frac{3}{4}) \end{cases} \quad (\sigma \rightarrow \infty \text{のとき}) \quad (17)$$

を得る．この場合には、速度振幅に関していわゆる飽和（saturation）現象が起る． $\nu < 0$ の場合は飽和現象は起らない．

§4. 特異摂動法（multiple-scales 法）が有効であるための条件

最後に、multiple-scales 法を用いて、一般化された Burgers 方程式を導出したが、その際なされた仮定および結果が漸近展開として有効であるための条件について検討しておこう．まず、弱非線形問題を考えているので、音響 Mach 数 M に関して

$$M \ll 1 \quad (18)$$

でなければならない．散逸性の効果は弱くて、最低次の近似方程式にはあらわれないが、2次近似の式にはその効果が含まれると仮定すると、

$$\frac{\omega}{\rho_0 c_0^2} \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta \right) = O(M), \quad \frac{\omega}{\rho_0 c_0^2} \frac{\kappa}{c_v} = O(M) \quad (19)$$

でなければならない．この条件は、音響 Reynolds 数 Re に関して、 $Re \gtrsim 1$ であることを意味する．また、非一様性は弱く、弱い非線形性と釣り合っているものとすれば、局所音速 \bar{c} を、

$$\bar{c} = \bar{c}(Mz) \quad (20)$$

の形に仮定してよい．以上の仮定、(18)、(19)、(20) のもとに、一般化された Burgers 方程式が導かれた．さらに、摂動展開式より、 M による展開の最低次の問題が通常の波動方程式に

帰着されるためには

$$\frac{1}{\sqrt{\bar{c}}} = O(1) \quad (21)$$

が成り立たねばならない。したがって、 $\bar{c} = 0$ となる点があれば、その近傍では、いま考えている特異摂動展開は有効でなくなる。

参考文献

- 1) Y. Inoue and N. Kubo: Linear and nonlinear wave propagation in a non-uniform gas, submitted to *Wave Motion*, 1996
- 2) D. G. Crighton: *Frontiers in Physical Acoustics ed. D. Sette* (North-Holland, Amsterdam, 1986).
- 3) L. D. Landau and E. M. Lifshitz: *Fluid Mechanics* (Pergamon, Oxford, 1987) 2nd ed.
- 4) O. V. Rudenko and S. I. Soluyan: *Theoretical Foundations of Nonlinear Acoustics* (Consultants Bureau, New York, 1977).
- 5) G. B. Whitham: *Linear and Nonlinear Waves* (Wiley, New York, 1974).

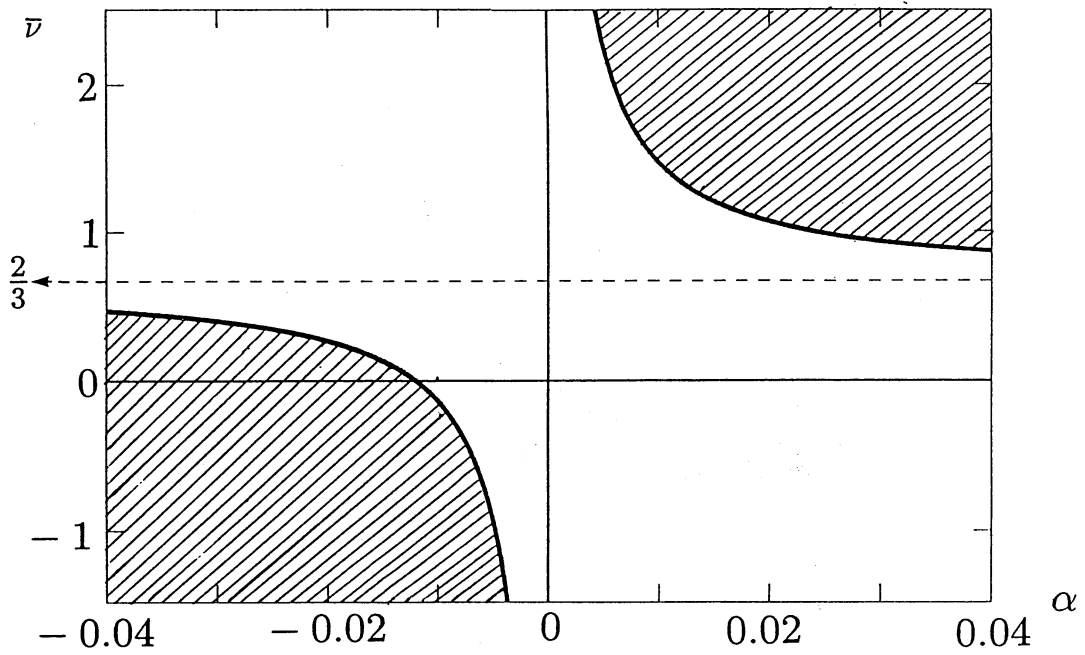


図 1. $(\alpha, \bar{\nu})$ 平面における衝撃波形成可能領域

($\bar{\nu} = n/2$, $M = 0.01$)

斜線部においては衝撃波は形成されない。

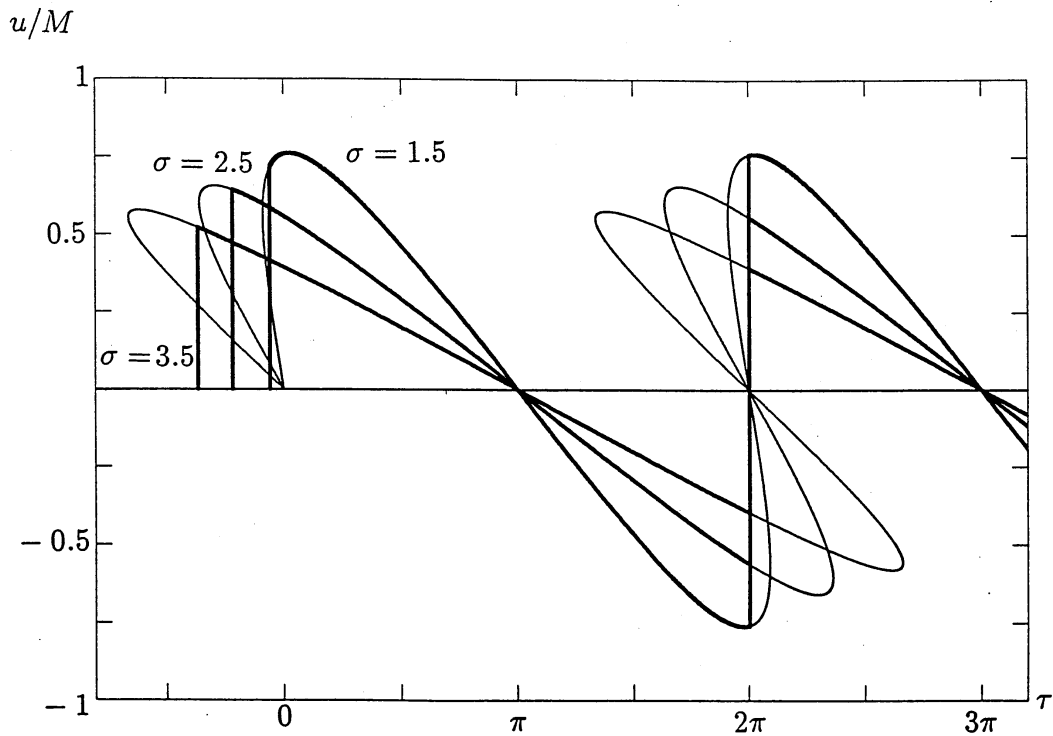


図 2. 衝撃波形成後の等面積則による波形の決定

(三角波と鋸歯状波)

$\bar{\rho}(x) = (1 + \alpha x)^{-2}$, $M = 0.01$, $\alpha = -0.005$, $\gamma = 1.4$

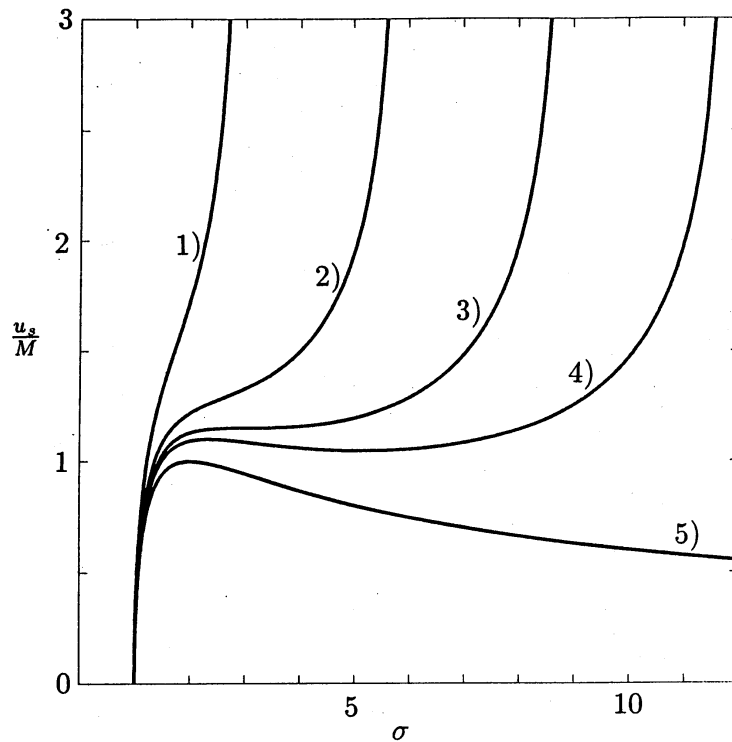


図 3. 第 1 衝撃波の速度振幅の伝播距離による変化

- (1) $\nu = -1/3$ (2) $\nu = -1/6$ (3) $\nu = -1/9$ (4) $\nu = -1/12$
 (5) $\nu = 0$ (一様媒質の場合)

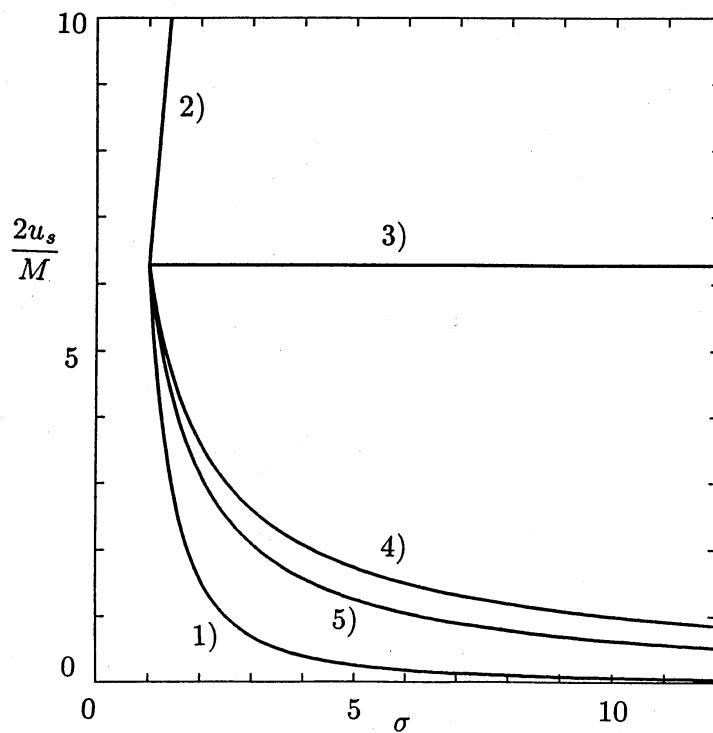


図 4. 第 2 衝撃波の速度振幅の伝播距離による変化 ($\nu = 1$)

- (1) $n = 2$ (2) $n = 7/6$ (3) $n = 1$ (4) $n = 1/2$ (5) $n = 0$ (一様媒質の場合)
 (ただし, σ が十分大きい場合の漸近形を示すので, $\sigma = 0$ (1)のところでは正しい結果を与えていない.)