

重力の作用の下での中空環状液体ジェット

阪大・基礎工

吉永隆夫 (Takao YOSHINAGA)

谷本和雅 (Kazumasa TANIMOTO)

角谷典彦 (Tsunehiko KAKUTANI)

Abstract

内部に中空部を持つ環状ジェットは、その流速及び内部（中空部）と外部の圧力差が十分小さければ、重力と表面張力の作用により先端の閉じた安定な円錐ジェットになることが知られている。本研究では、薄膜近似を用いてこの円錐ジェットを定式化し、圧力差に対するジェットの‘収束距離’をジェットが定常な場合について調べている。外圧を一定として数値計算を行った結果、内圧が増加するにつれて収束距離も増加し、内圧が臨界値に達すると半径一定の環状ジェットになることが示される。しかし、臨界値付近では僅かな圧力変化に対しても収束距離が大きく変化することから、非定常な場合ジェットは不安定になることが予想される。このことは、内圧を増加させた場合ジェットが振動を始め、最終的には不安定のため壊れるという実験結果とも対応している。さらに、モデルで用いた薄膜近似の妥当性をみるため、一定半径のジェットに対する線形安定性を調べ、従来のモデルで得られている結果との比較を行っている。

1 はじめに

流体ジェットは、その形状から中実円柱ジェット、シートジェット、中空環状ジェットと大きく3種類に分けられる。特に、中空環状ジェットは、流体に働く表面張力や重力、ジェット内部（中空部）と外部の圧力差、周囲の流体（気体）とジェットの流速の違い等の影響により、複雑でかつ興味深い現象を示す。

ジェットの流出速度と圧力差が十分小さければ、鉛直下向きに放出された液体環状ジェットは重力と表面張力の作用により先端が閉じた円錐ジェット（‘Water Bell’）となる。この円錐ジェットに関する研究が、すでに19世紀Boussinesq [1]により始められている。近年、このような環状液体ジェットが、レーザー核融合や化学反応での遮蔽膜として利用できることから、再びその形状や安定性が詳しく調べられるようになった [2], [3]。特に、ノズル出口からジェット先端までの‘収束距離’に関して、流速や圧力差が十分小さければ実験結果と解析結果とは比較的良好に一致することが示されている [2], [3]。しかし、最近KihmとChigier [4]は、ジェット内圧が外圧に比べてかなり大きい場合を実験的に調べ、内圧の増加と共にジェット先端部が振動を始め、最終的には不安定性によりジェットが壊れることを示した。このことは、圧力差が大きくなると定常解は不安定になり、ジェットの形状は円錐形から円筒形へと連続的に移行できないことを示唆している。

一方、流速が十分大きく (1m/s以上) かつジェット半径が小さいとき ($\phi = 5 \sim 0.1\text{mm}$), 重力の影響は無視でき、表面張力が重要な役割を果たす。特に、ジェットが円筒形を保つのに十分な圧力差の下で、ジェットの周囲の流体に対する (相対) 速度がある範囲内にあるとき、表面張力による不安定性により、軸方向に空間周期的に風船のように膨らんだ状態 (Balloon effect) が現れることを Kendall [5] が実験で示した。さらに Lee と Wang [6] は薄膜近似を用いたジェットのモデルを示し、数値的にこのような現象が起こることを説明している。

本研究では、重力の効果を考慮し、Lee と Wang が用いた薄膜近似を円錐ジェット適用し、非定常な現象をも記述できるように定式化を行う。簡単のため解析は定常状態についてのみ行い、圧力差に対するジェットの '収束距離' を調べる。さらに、この薄膜近似の妥当性を調べるために重力の効果を無視し、従来知られているモデルとの比較を線形安定性に関して行った。

2 薄膜近似による定式化

Lee と Wang [6] の導入した '薄膜近似' に従い、液体シートの厚みはその半径に比べて十分薄い場合を考え、シート内での半径方向及び周方向の変化を無視する。図1で示すように半径方向に r 軸を取り、重力加速度 g が鉛直下向き z 軸方向に働いているとする。長さ δs の円環要素内で圧力、表面張力、重力による力の釣り合いを考る。法線方向ベクトルを \mathbf{n} , 接線方向ベクトルを \mathbf{s} とし、ジェット内外の圧力差を $P (= P_i - P_e; P_i: \text{内圧}, P_e: \text{外圧})$, 表面張力係数を σ , 流体の密度を ρ とする。さらに、円環要素の速度を \mathbf{v} , 厚さを b , z 軸方向とジェットのなす角を θ , 円環要素の中心線部分の半径を R とする。粘性の影響は無視するので、問題は以下で示す連続の式と運動方程式を適当な境界条件の下で解くことに帰着する。

(i) 連続の式:

円環要素の質量は保存されるので、 $m = R\rho b$ とおくと

$$\frac{d}{dt}(2\pi m \delta s) \equiv 2\pi \frac{dm}{dt} \delta s + 2\pi m \frac{d(\delta s)}{dt} = 0, \quad (1)$$

である。半径方向の変化は無視できるので、 dm/dt は

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial m}{\partial z} v_z, \quad (2)$$

とかける。 $R = R(z, t)$ であるので θ は z, t の関数で

$$\tan \theta = \frac{\partial R}{\partial z}, \quad (3)$$

の関係がある。また、速度 \mathbf{v} は

$$\mathbf{v} = v_n \mathbf{n} + v_s \mathbf{s}, \quad (4)$$

であり, \mathbf{n}, \mathbf{s} は

$$\mathbf{n} = \cos \theta \mathbf{r} - \sin \theta \mathbf{z}, \quad (5)$$

$$\mathbf{s} = \sin \theta \mathbf{r} + \cos \theta \mathbf{z}. \quad (6)$$

のように表されるので,

$$v_z \equiv \mathbf{v} \cdot \mathbf{z} = v_s \cos \theta - v_n \sin \theta, \quad (7)$$

$$v_r \equiv \mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = v_s \sin \theta + v_n \cos \theta, \quad (8)$$

とかける。(7)式を(2)式に代入し, (3)式の関係を用いると

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\partial m}{\partial t} + \cos \theta (v_s - v_n \frac{\partial R}{\partial z}) \frac{\partial m}{\partial z}, \quad (9)$$

を得る。一方, $d(\delta s)/dt$ を計算するために, 時刻 t における円環の長さ δs が, 時刻 $t + \delta t$ に $\delta s'$ に変化したとき, δz を z 軸における δs の射影とすると

$$\delta s' = \delta s + \mathbf{s} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \delta z \delta t, \quad (10)$$

である。また, (5),(6)式に(3)の関係を用いると

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial z} = -\frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \cos \theta^2 \mathbf{s}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial z} = \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \cos \theta^2 \mathbf{n}, \quad (12)$$

が得られる。(4)式を(10)式に代入し, (11),(12)式を用いることにより

$$\frac{d(\delta s)}{dt} = \frac{\delta s' - \delta s}{\delta t} = \delta z \left(\frac{\partial v_s}{\partial z} - v_n \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \cos^2 \theta \right), \quad (13)$$

が導かれる。最後に, (13),(9)式を(1)式に用いると連続の式は

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -\cos \theta (v_s - v_n \frac{\partial R}{\partial z}) \frac{\partial m}{\partial z} - \cos \theta \left(\frac{\partial v_s}{\partial z} - v_n \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \cos^2 \theta \right) m, \quad (14)$$

と書くことができる。

(ii) 境界条件:

ジェット表面を

$$f(z, t) \equiv r - R(z, t) = 0, \quad (15)$$

で表すと, 運動学的条件 (ジェット面上の流体粒子が飛び出さない条件):

$$\frac{df}{dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) f = 0, \quad (16)$$

から次式を得る：

$$\frac{\partial R}{\partial t} = v_r - \frac{\partial R}{\partial z} v_z. \quad (17)$$

上式に(7),(8)式を用いて境界条件：

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{v_n}{\cos \theta}, \quad (18)$$

を得る。

(iii) 運動方程式：

円環要素に働く力の釣り合いを考える。表面張力とジェット内外の圧力差が法線方向にのみ働くことに注意して運動方程式：

$$2\pi m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 2\pi R(P - 2\sigma \nabla \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + 2\pi mgz, \quad (19)$$

を得る。(19)で、 $\nabla \cdot \mathbf{n}$ は(16)式の f を用いて $[\nabla \cdot (\nabla f / |\nabla f|)]_{f=0}$ と表されるので

$$\nabla \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{R} \cos \theta - \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \cos^3 \theta, \quad (20)$$

となる。一方、 d/dt は(9)式からわかるように

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \cos \theta (v_s - v_n \frac{\partial R}{\partial z}) \frac{\partial}{\partial z}, \quad (21)$$

と書けるので、(21)式を(5),(6)式に用いて

$$\frac{dn}{dt} = -s \left[\cos^2 \theta \frac{\partial^2 R}{\partial t \partial z} + \cos^3 \theta (v_s - v_n \frac{\partial R}{\partial z}) \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \right], \quad (22)$$

$$\frac{ds}{dt} = -n \left[\cos^2 \theta \frac{\partial^2 R}{\partial t \partial z} + \cos^3 \theta (v_s - v_n \frac{\partial R}{\partial z}) \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \right], \quad (23)$$

を得る。ここで、 $\partial^2 R / \partial t \partial z$ は(18)式より

$$\frac{\partial^2 R}{\partial t \partial z} = \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial v_n}{\partial z} + v_n \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \cos \theta, \quad (24)$$

である。その結果、(19)式に(20),(24)式を用い、(22),(23),(24)式を考慮することにより、以下の接線方向及び法線方向の運動方程式がそれぞれ \mathbf{n} 方向成分と \mathbf{s} 方向成分を書きだすことによって得られる：

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} = -\cos \theta (v_s - v_n \frac{\partial R}{\partial z}) \frac{\partial v_s}{\partial z} + v_n \cos \theta \left(\frac{\partial v_n}{\partial z} + v_s \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \cos^2 \theta \right) + g \cos \theta, \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_n}{\partial t} &= -\cos \theta (v_s - v_n \frac{\partial R}{\partial z}) \frac{\partial v_n}{\partial z} - v_s \cos \theta \left(\frac{\partial v_n}{\partial z} + v_s \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \cos^2 \theta \right) \\ &\quad + \frac{R}{m} \left[P - 2\sigma \left(\frac{\cos \theta}{R} - \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \cos^3 \theta \right) \right] - g \sin \theta. \end{aligned} \quad (26)$$

3 計算結果及び考察

3.1 定常解

定常状態でのジェットの収束距離を求めるため、上で示した方程式の定常解を考える。 $\partial/\partial t = 0$ とおと(18)式より

$$v_n = 0, \quad (27)$$

となり、これを用いて(25), (26)式より

$$v_s \frac{\partial v_s}{\partial s} = g \cos \theta, \quad (28)$$

$$\frac{v_s}{r_v} = \frac{R}{m} \left[P - 2\sigma \left(\frac{\cos \theta}{R} - \frac{1}{r_v} \right) \right] - g \sin \theta, \quad (29)$$

を得る。ここで r_v は曲率半径

$$\frac{1}{r_v} = \frac{d^2 R/dz^2}{[1 + (dR/dz)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

である。一方、連続の式(14)より

$$mv_s = \text{const.}, \quad (30)$$

のように積分できる。定常状態を記述する(28),(29),(30)式はHoffman [2]やRamos [3]らがLagrange的な手法を用いて導出した方程式に一致することを注意しておく。

(28)式から(30)式を無次元化するため、無次元パラメーター、 $Wb = \rho v_0^2 R_0 / \sigma$, $Fr = v_0^2 / g R_0$, $Cp = P / \rho v_0^2$, 及び無次元変数 $z^* = z / R_0$, $R^* = R / R_0$, $b^* = b / b_0$, $m^* = m / m_0 = Rb / R_0^2$, $t^* = v_s / R_0 t$, $v_s^* = v_s / v_0$, $v_n^* = v_n / v_0$ を導入する。ここで、 R_0, v_0, m_0 はそれぞれ R, v_s, m の $z = 0$ での値、 Wb はWeber数、 Fr はFroude数、 Cp は圧力係数である。これらを用いて(28)式から(30)式は以下のように書ける：

$$v_s^* = \sqrt{\frac{2}{Fr} z^* + 1}, \quad (31)$$

$$\cos^3 \theta^* \frac{\partial^2 R^*}{\partial z^{*2}} v_s^{*2} = \frac{R^*}{m^*} \left[Cp - \frac{2}{Wb} \left(\frac{\cos \theta^*}{R^*} - \frac{\partial^2 R^*}{\partial z^{*2}} \cos^3 \theta^* \right) \right] - \frac{\sin \theta^*}{Fr}, \quad (32)$$

$$m_s^* = \text{Const.} / \sqrt{\frac{2}{Fr} z^* + 1}, \quad (33)$$

上式を次に示すパラメーターに対して解き、 R^* の z^* 発展を求める：ノズルの出口の半径 $R_0 = 5 \times 10^{-2} (m)$, 初期速度 $v_0 = 0.8 (m/s)$, 初期厚さ $b_0 = 1.0 \times 10^{-3} (m)$, 流体は水とし密度 $\rho = 10^3 (kg/m^3)$, 重力加速度 $g = 9.8 (m/s^2)$, 初期角度 $\theta = 0$, 表面張力係数 $\sigma = 0.074 (N/m)$ 。この時、無次元数は $Fr = 1.27$, $Wb = 431$ となる。

臨界状態は(32)式で $R^* = 1$, dR/dz , $d^2 R/dz^2 = 0$, $\theta^* = 0$ と置くことにより $Cp = Cp_* = 2/Wb$ となる。 $Wb = 431$ に対して $Cp_* = 0.0046$ が臨界圧力係数であることを考慮

し $C_p = 0, 0.0010, 0.0020, 0.0030, 0.0040, 0.0045$ の六つの場合について R^* と z^* の関係を図2に示す。図よりわかるように、ジェット内部の圧力がジェット外部の圧力より高くなる（圧力係数 C_p が大きくなる）につれて、ジェットの収束距離がしだいに長くなる。特にジェットが収束する限界である C_{p*} に近づくとつれ、僅かな圧力の違が大きく集束距離に影響を与えていることがわかる。このように臨界圧力付近では内圧の変化に対しジェットは非常に敏感に応答することから、解析で非定常性を考慮すれば不安定な振動現象が示される可能性がある。この不安定な振動現象は、Kihm と Chigier の実験で内圧を増加したとき現れる不安定な振動現象に対応していると思われる。

3.2 線形安定性

本研究で用いた薄膜近似の妥当性をみるために線形安定性を調べ、従来知られているモデルでの結果と比較を行う。簡単のためにジェットに働く重力の効果を無視し、一定半径の円筒形を保つジェットに微小攪乱 $R'(z, t), m'(z, t), v'_s(z, t), v'_n(z, t)$ が以下のように加わった場合を考える：

$$R = R_0 + R'(z, t), m = m_0 + m'(z, t), v_s = v_0 + v'_s(z, t), v_n = v'_n(z, t). \quad (34)$$

(34) 式を (14), (18), (25), (26) 式に代入し、 R', m', v'_s, v'_n に関して2次以上の項を無視することによって次式を得る：

$$\frac{\partial m'}{\partial t} = -v_0 \frac{\partial m'}{\partial z} - m_0 \frac{\partial v'_s}{\partial z}, \quad (35)$$

$$\frac{\partial R'}{\partial t} = v'_n, \quad (36)$$

$$\frac{\partial v'_s}{\partial t} = -v_0 \frac{\partial v'_s}{\partial z}, \quad (37)$$

$$\frac{\partial v'_n}{\partial t} = -2v_0 \frac{\partial v'_n}{\partial z} - v_0^2 \frac{\partial^2 R'}{\partial z^2} + \frac{1}{m_0} \frac{2\sigma}{R_0} R' + \frac{1}{m_0} 2\sigma R_0 \frac{\partial^2 R'}{\partial z^2}. \quad (38)$$

さらに、

$$R'(z, t), m'(z, t), v'_s(z, t), v'_n(z, t) \propto \exp[i(kz - \omega t)],$$

と仮定すると、(35) 式から (38) 式が自明でない解を持つための条件：

$$\det \begin{pmatrix} (v_0 k - \omega) & m_0 k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i\omega \\ 0 & (v_0 k - \omega) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (2v_0 k - \omega)i & -v_0^2 k^2 - \frac{1}{m_0} \frac{2\sigma}{R_0} + \frac{2\sigma R_0 k^2}{m_0} \end{pmatrix} = 0, \quad (39)$$

より分散関係：

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{2\sigma R_0}{m_0} \sqrt{k^2 - \frac{1}{R_0^2}}} + v_0 k, \quad v_0 k, \quad (40)$$

を得る。無次元変数 $\omega^* = \omega R_0/v_0$, $k^* = kR_0$, $\alpha = b_0/R_0$ を導入すると

$$\omega^* = \pm \sqrt{\frac{2}{Wb \cdot \alpha} \sqrt{k^{*2} - 1}} + k^*, \quad k^*, \quad (41)$$

の無次元化された分散関係式を得る。(41)式で $\alpha = 0.1, Wb = 32.1$ とした場合, ω^* の虚部 ω_i^* と k^* の関係を図3に示す。図よりわかるように $k^* \leq 1$ で攪乱は増幅し不安定となるが, $k^* = 0$ でも有限の増幅率を持つ。一方, Crapper等 [7]はジェットを非圧縮渦なしのポテンシャル流れとしてモデル化し, 線形安定性を調べている。彼らはジェット周囲の流体(密度 ρ_{gas})の影響を考慮しており, $\rho_{gas} = 0, 0.5, 1.0(kg/m^3)$ の場合について ω_i^* と k^* の関係を図4に示す。 $\rho_{gas} \neq 0$ のとき, $k^* = 0$ で $\omega_i^* = 0$ となるが, $\rho_{gas} = 0$ のとき $k^* = 0$ で ω_i^* は有限の値をとることがわかる。薄膜近似によるモデルでは周囲の流体の影響は考えていないので($\rho_{gas} = 0$), 少なくとも低波数域では増幅率及び増幅領域に関して両モデルは一致することから薄膜近似は有効であると言える。

参考文献

- [1] J. Boussinesq: Compt.Rend.Acad.Sci.Paris**69**(1869)128.
- [2] M.A.Hoffman, R.K.Takahashi and R.D.Monson: J.Fluids Eng.ASME**102**(1980)344.
- [3] J.I.Ramos: Chem.Engng Sci.**43**(1988)3171.
- [4] K.D.Kihm and N.A.Chigier: J.Fluids Eng.**112**(1990)61.
- [5] J.M.Kendall: Phys.Fluids**29**(1986)2086.
- [6] C.P.Lee and T.G.Wang: Phys.Fluids**29**(1986)2076.
- [7] G.D.Crapper, N.Dombrowski and G.A.D.Pyott: J.Fluid Mech.**68**(1975)497.

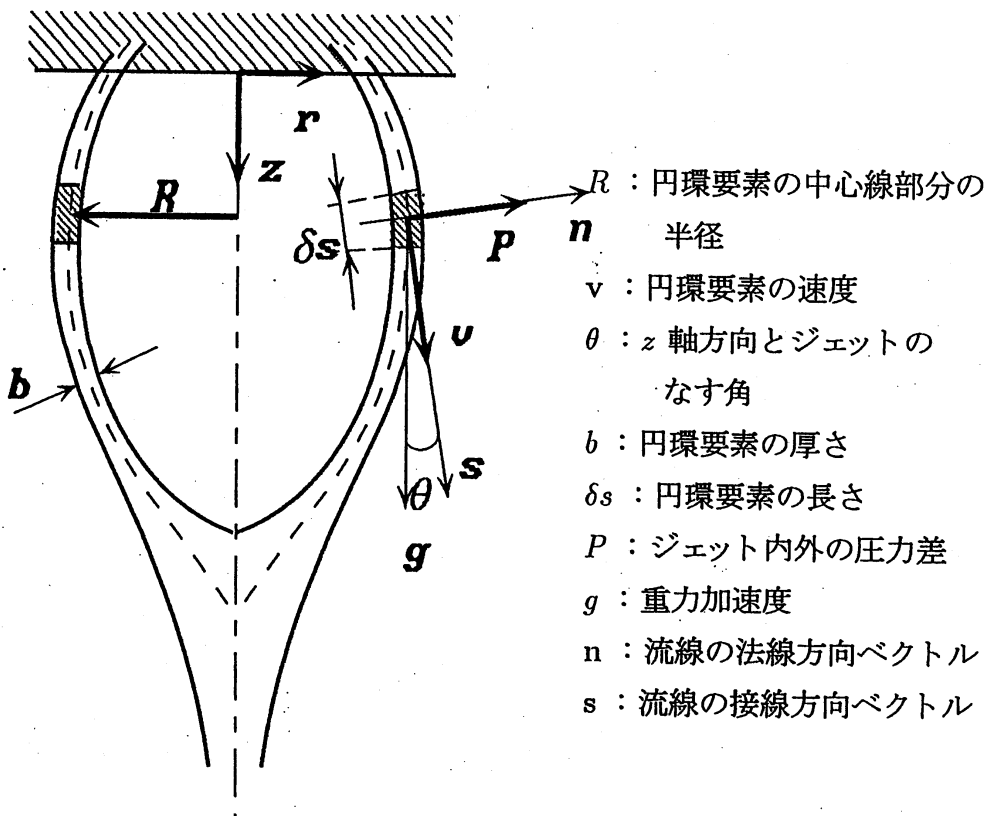


図 1: 環状ジェットモデル.

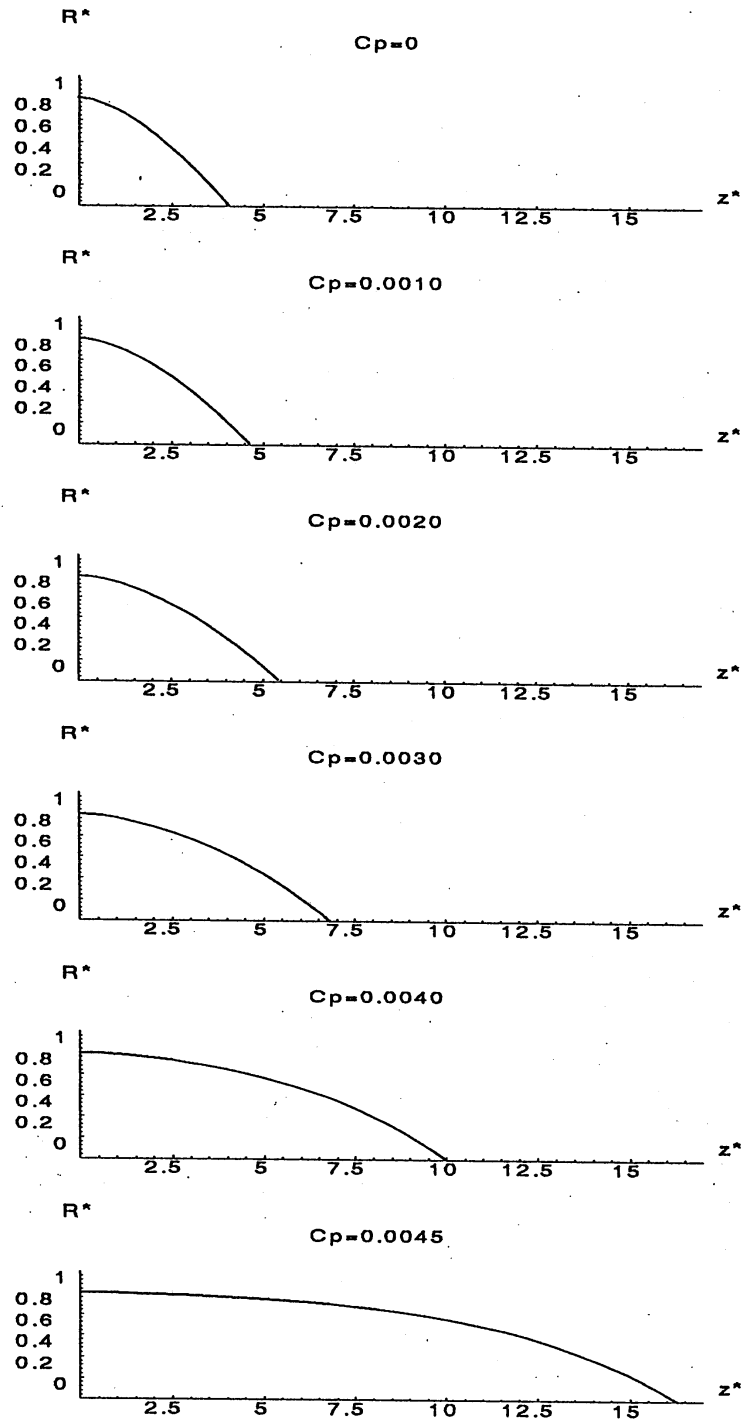


図 2: C_p に対するジェットの状態。

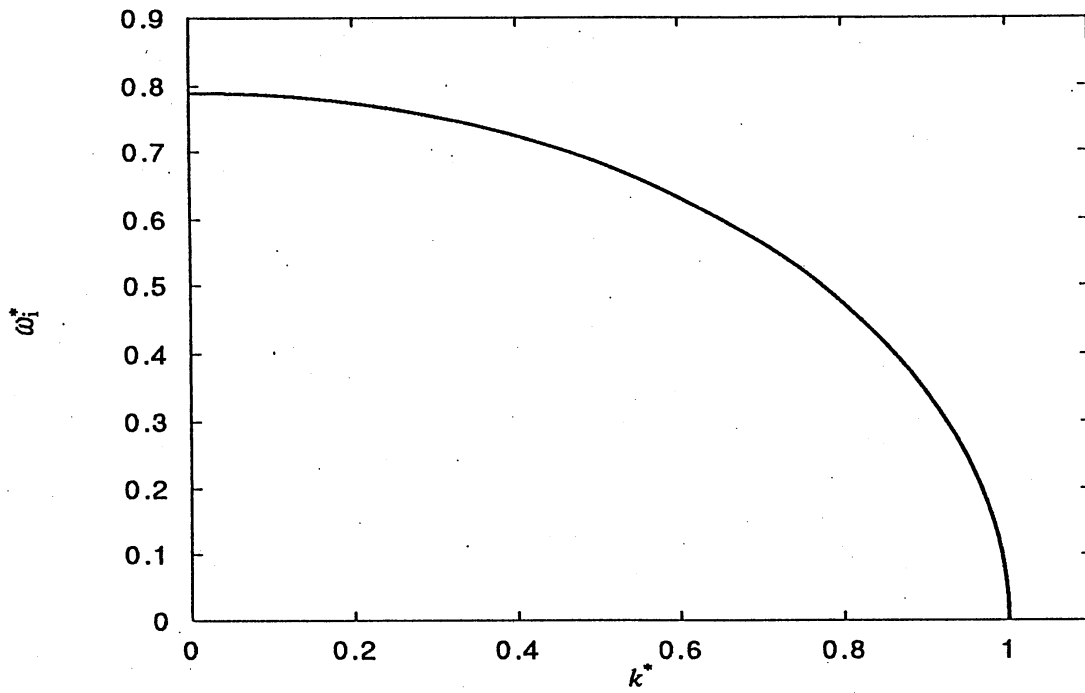


図 3: 薄膜近似を用いたモデルでの ω_i^* と k^* の関係.

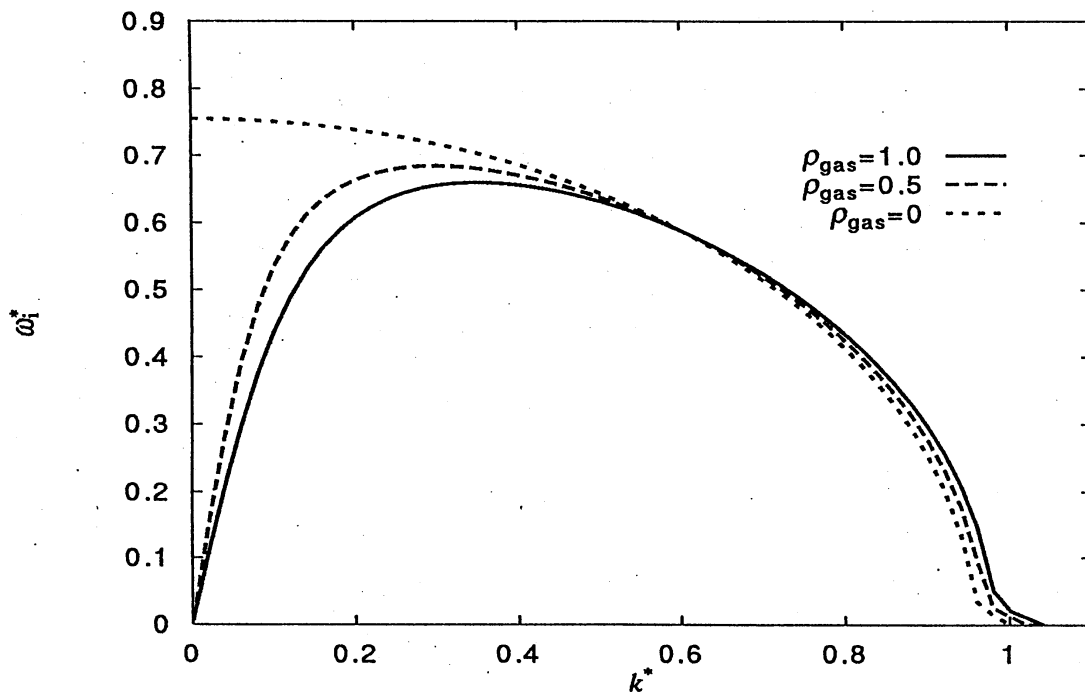


図 4: Crapper *et al.* のモデルでの ω_i^* と k^* の関係.